ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

GRAVITATION

Charles W. Misner
University of Maryland

Kip S. Thorne
California Institute
of Technology

John Archibald Wheeler
Princeton University

W. H. Freeman and Company
San Francisco 1973

Ч. МИЗНЕР

К. ТОРН

Дж. УИЛЕР

ГРАВИТАЦИЯ

ТОМ 1

Перевод с английского
М. М. Баско

под редакцией
В. Б. Брагинского и И. Д. Новикова

Издательство «Мир»
Москва 1977

УДК 530.12+523.112

Монография выдающихся американских физиков Ч. Мизнера, К. Торна и Дж. Уилера «Гравитация», выпускаемая на русском языке в трех томах, посвящена изложению физических основ, современного математического аппарата и важнейших достижений теории тяготения Эйнштейна. Она соединяет в себе качества учебного пособия по теории тяготения и обширного обзора проблем гравитации и теории пространства-времени. Книга содержит описание новейших методов и последних полученных результатов.

Первый том включает обзор физических идей, лежащих в основе теории тяготения, специальную теорию относительности и теорию искривленного пространства-времени.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов университетов и на специалистов-физиков. Качественная сторона излагаемых вопросов доступна самому широкому кругу читателей.

Редакция литературы по физике

© 1973 by W. H. Freeman and Company

М $\frac{20401-049}{041(01)-77}$ 49-77 © Перевод на русский язык, «Мир», 1977

Мы посвящаем эту книгу
Нашим согражданам,
Которые из любви к истине,
Пренебрегая собственными нуждами,
Выделяют средства в виде налогов
И пожертвований
И время от времени выдвигают
Из своей среды
Преданных слуг науки,
Чтобы сделать очередной шаг в познании
Тайн и удивительной простоты
Этой странной и прекрасной Вселенной —
Нашего дома.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редакторов перевода 15
Предисловие авторов к русскому изданию 18
Предисловие авторов 19
От авторов 25

Часть I. Физика пространства-времени

Глава 1. Геометродинамика в кратком изложении 29

§ 1.1. Притча о яблоке 29
§ 1.2. Пространство-время с координатами и без них 32
Дополнение 1.1. Математические обозначения событий, координат и векторов 41
§ 1.3. Невесомость 42
Дополнение 1.2. Вещества, имеющие совершенно различный состав, падают с одним и тем же ускорением («стандартная мировая линия») 48
§ 1.4. Локально лоренцева геометрия с координатами и без них 50
Дополнение 1.3. Локально лоренцева геометрия и локально эвклидова геометрия (с координатами и без них) 50
§ 1.5. Время 54
Дополнение 1.4. Время сегодня 60
§ 1.6. Кривизна 61
Дополнение 1.5. Как проверить, является ли пространство-время плоским? 67
Дополнение 1.6. Кривизна чего? 68
Дополнение 1.7. Уравнение движения в гравитационном поле и уравнение движения в электромагнитном поле: сходства и различия 70
Дополнение 1.8. Геометрические единицы 71
§ 1.7. Воздействие материи на геометрию 72
Дополнение 1.9. Галилео Галилей 75
Дополнение 1.10. Исаак Ньютон 76
Дополнение 1.11. Альберт Эйнштейн 78

Часть II. Физика в плоском пространстве-времени

Глава 2. Основы специальной теории относительности 83

§ 2.1. Общие замечания 83
§ 2.2. Геометрические объекты 84
§ 2.3. Векторы 85
Дополнение 2.1. Прощай *ict*! 88
§ 2.4. Метрический тензор 89
§ 2.5. Дифференциальные формы 90
Дополнение 2.2. Упражнения с решениями, в которых используется метрика 96
§ 2.6. Градиенты и производные по направлениям 96
§ 2.7. Координатное представление геометрических объектов 97
Дополнение 2.3. Дифференциалы 100
§ 2.8. Центрифуга и фотон 101
§ 2.9. Преобразования Лоренца 104
Дополнение 2.4. Преобразования Лоренца 105
§ 2.10. Столкновения 107

Глава 3. Электромагнитное поле 109

§ 3.1. Сила Лоренца и тензор электромагнитного поля 109
Дополнение 3.1. Определение поля и предсказание движения по формуле Лоренца 111
§ 3.2. Тензоры в самом общем виде 112
Дополнение 3.2. Метрика на разных языках 116
§ 3.3. Геометрическая точка зрения в сравнении с точкой зрения 3 + 1 117
§ 3.4. Уравнения Максвелла 119
§ 3.5. Операции над тензорами 121
Дополнение 3.3. Техника «жонглирования индексами» 129

Глава 4. Электромагнетизм и дифференциальные формы 131

§ 4.1. Внешнее исчисление 131
Дополнение 4.1. Дифференциальные формы и внешнее исчисление в кратком изложении 132
§ 4.2. Электромагнитная 2-форма и сила Лоренца 139
Дополнение 4.2. Как абстрагируясь от понятия «сотоподобной структуры» прийти к понятию 2-формы; случай 3-пространства и пространства-времени 143
§ 4.3. Формы позволяют лучше понять электромагнетизм, а электромагнетизм позволяет лучше понять формы 145
Дополнение 4.3. Дуальность 2-форм в пространстве-времени 150
§ 4.4. Поле излучения 151
§ 4.5. Уравнения Максвелла
§ 4.6. Внешняя производная и замкнутые формы 155
Дополнение 4.4. Последовательность форм и внешних производных 156

§ 4.7. Действие на расстоянии как следствие локального закона 160
Дополнение 4.5. Сравнение и противопоставление метрической структуры и гамильтониана, или «симплектической структуры» 169
Дополнение 4.6. История появления теоремы Стокса 170

Глава 5. Тензор энергии-импульса и законы сохранения 172

§ 5.1. Предварительные замечания, относящиеся к курсу 1 172
Дополнение 5.1. Резюме главы 5 173
§ 5.2. Трехмерные объемы и определение тензора энергии-импульса 174
Дополнение 5.2. Трехмерные объемы 177
§ 5.3. Компоненты тензора энергии-импульса 179
§ 5.4. Тензор энергии-импульса роя частиц 181
§ 5.5. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости 182
§ 5.6. Электромагнитный тензор энергии-импульса 183
§ 5.7. Симметрия тензора энергии-импульса 184
§ 5.8. Сохранение 4-импульса: интегральная формулировка 186
§ 5.9. Сохранение 4-импульса: дифференциальная формулировка 191
Дополнение 5.3. Интегралы по объему, интегралы по поверхности и теорема Гаусса в компонентных обозначениях 191
Дополнение 5.4. I. Любой интеграл есть интеграл от формы. II. Теорема Гаусса на языке форм 194
§ 5.10. Примеры применения уравнения $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ 196
Дополнение 5.5. Обзор ньютоновской гидродинамики 198
§ 5.11. Момент импульса 200
Дополнение 5.6. Момент импульса 204

Глава 6. Ускоренные наблюдатели 207

§ 6.1. Ускоренные наблюдатели могут быть изучены в рамках специальной теории относительности 207
Дополнение 6.1. Общая теория относительности построена на основе специальной теории относительности 208
Дополнение 6.2. Ускоренные наблюдатели (краткое изложение) 208
§ 6.2. Гиперболическое движение 210
§ 6.3. Ограничения на размеры ускоренной системы отсчета 213
§ 6.4. Тетрада, переносимая равномерно ускоренным наблюдателем 215
§ 6.5. Тетрада, переносимая переносом Ферми — Уолкера наблюдателем с произвольным ускорением 216
§ 6.6. Локальная система координат ускоренного наблюдателя 218

Глава 7. Несовместимость теории тяготения и специальной теории относительности 224

§ 7.1. Попытки объединить теорию тяготения и специальную теорию относительности 224
Дополнение 7.1. Попытка описать гравитацию с помощью поля симметричного тензора в плоском пространстве-времени (решение упражнения 7.3) 229
§ 7.2. Вывод гравитационного красного смещения из закона сохранения энергии 236
§ 7.3. Из гравитационного красного смещения следует кривизна пространства-времени 237
§ 7.4. Обоснование принципа эквивалентности с помощью гравитационного красного смещения 239
§ 7.5. Локально плоское, глобально искривленное пространство-время 240

Часть III. Математическая теория искривленного пространства-времени

Глава 8. Дифференциальная геометрия: общий обзор 245

§ 8.1. Краткий обзор части III 245
Дополнение 8.1. Книги по дифференциальной геометрии 246
§ 8.2. Сравнение курса 1 с курсом 2: различный кругозор, различные возможности 247
§ 8.3. Геометрия в трех аспектах: на чертежах, в абстрактной форме, в компонентных обозначениях 248
Дополнение 8.2. Эли Картан 250
Дополнение 8.3. Три урока дифференциальной геометрии 251
§ 8.4. Тензорная алгебра в искривленном пространстве-времени 252
Дополнение 8.4. Тензорная алгебра в фиксированном событии в *произвольном* базисе 257
§ 8.5. Параллельный перенос, ковариантная производная, коэффициенты связности, геодезические 259
§ 8.6. Локально лоренцевы системы: математическое рассмотрение 271
§ 8.7. Отклонение геодезических и тензор кривизны Римана 273
Дополнение 8.5. Георг Фридрих Бернхард Риман 277
Дополнение 8.6. Ковариантное дифференцирование и кривизна: основные соотношения 278

Глава 9. Дифференциальная топология 281

§ 9.1. Геометрические объекты в пространстве-времени без метрики и без геодезических 281
§ 9.2. Результат уточнения понятий «вектора» и «производной по направлению»— понятие «касательного вектора» 282

Дополнение 9.1. Касательные векторы и касательное пространство 286
§ 9.3. Базисы, компоненты и законы преобразования векторов 287
§ 9.4. 1-формы 289
§ 9.5. Тензоры 291
§ 9.6. Коммутаторы и методы наглядного представления 293
Дополнение 9.2. Коммутатор в качестве замыкающего четырехсторонники 297
§ 9.7. Многообразия и дифференциальная топология 298

Глава 10. Аффинная геометрия: геодезические, параллельный перенос и ковариантная производная 303

§ 10.1. Геодезические и принцип эквивалентности 303
Дополнение 10.1. Геодезические 305
§ 10.2. Параллельный перенос и ковариантная производная: наглядное представление 306
Дополнение 10.2. От геодезических к параллельному переносу, от параллельного переноса к ковариантному дифференцированию, от ковариантного дифференцирования к геодезическим 309
§ 10.3. Параллельный перенос и ковариантная производная: абстрактный подход 312
Дополнение 10.3. Ковариантная производная, трактуемая как машина, а коэффициенты связности — как ее компоненты 316
§ 10.4. Параллельный перенос и ковариантная производная: компонентное представление 319
§ 10.5. Уравнение геодезических 325

Глава 11. Отклонение геодезических и кривизна пространства-времени 328

§ 11.1. Кривизна, наконец-то! 328
§ 11.2. Относительное ускорение соседних геодезических 329
Дополнение 11.1. Отклонение геодезических и риманова кривизна в кратком изложении 331
Дополнение 11.2. Отклонение геодезических, представленное в виде стрелки 332
Дополнение 11.3. Отклонение геодезических: как от стрелки перейти ко второй ковариантной производной 333
§ 11.3. Приливные силы тяготения и тензор кривизны Римана 334
Дополнение 11.4. Относительное ускорение пробных частиц: геометрический анализ, выполненный по схеме ньютоновского анализа 337
Дополнение 11.5. Тензор кривизны Римана 339
§ 11.4. Параллельный перенос по замкнутому контуру 341
Дополнение 11.6. Отклонение геодезических и параллельный перенос по замкнутому контуру: два аспекта одного и того же построения 344

Дополнение 11.7. Закон параллельного переноса по замкнутому контуру 345
§ 11.5. Нулевая риманова кривизна эквивалентна тому, что многообразие плоское 347
§ 11.6. Нормальные римановы координаты 349

Глава 12. Теория тяготения Ньютона на языке искривленного пространства-времени 354

§ 12.1. Теория тяготения Ньютона в кратком изложении 354
§ 12.2. Расслоение ньютоновского пространства-времени 356
§ 12.3. Галилеевы системы координат 358
Дополнение 12.1. Отклонение геодезических в ньютоновском пространстве-времени 362
Дополнение 12.2. Пространство-время Ньютона, пространство-время Минковского и пространство-время Эйнштейна: сравнение и противопоставление 363
Дополнение 12.3. Ньютоновское тяготение в формулировке Картана и эйнштейновское тяготение: сравнение и противопоставление 365
§ 12.4. Геометрическая, свободная от координат формулировка теории тяготения Ньютона 366
Дополнение 12.4. Теория тяготения Ньютона: геометрическая формулировка в сравнении с классической формулировкой 368
§ 12.5. Геометрический подход в физике: критика 370

Глава 13. Риманова геометрия: метрика — основа всего 372

§ 13.1. Новые черты геометрии, обусловленные локальной справедливостью специальной теории относительности 372
§ 13.2. Метрика 373
Дополнение 13.1. Как извлечь метрику из расстояний 379
§ 13.3. Соответствие между геодезическими геометрии искривленного пространства-времени и прямыми линиями локально лоренцевой геометрии 381
§ 13.4. Геодезические — мировые линии с экстремальным собственным временем 385
Дополнение 13.2. «Геодезические» и «экстремальные мировые линии» 394
Дополнение 13.3. «Динамический» вариационный принцип для геодезических 394
§ 13.5. Свойства **R**, обусловленные наличием метрики 396
§ 13.6. Собственная система отсчета ускоренного наблюдателя 399

Глава 14. Вычисление кривизны 407

§ 14.1. Кривизна — инструмент, который дает возможность понять физику 407
Дополнение 14.1. Ретроспективный взгляд на кривизну 409

Дополнение 14.2. Непосредственное вычисление кривизны (иллюстрируемое на примере глобуса) 414
Дополнение 14.3. Аналитические преобразования с помощью вычислительных машин 416
§ 14.2. Нахождение тензора Эйнштейна 417
§ 14.3. Более эффективные методы расчетов 418
§ 14.4. Метод геодезического лагранжиана 419
Дополнение 14.4. Метод геодезического лагранжиана в некоторых случаях сокращает вычисление кривизны 421
§ 14.5. 2-формы кривизны 423
§ 14.6. Вычисление кривизны с помощью внешних дифференциальных форм 430
Дополнение 14.5. Вычисление кривизны с помощью внешних дифференциальных форм (метрика космологической модели Фридмана) 437

Глава 15. Тождества Бианки и граница границы 441

§ 15.1. Кратко о тождествах Бианки 441
Дополнение 15.1. Граница границы равна нулю 442
§ 15.2. Тождество Бианки $\mathbf{d}\mathscr{R} \equiv 0$ — проявление того, что «граница границы = 0» 448
§ 15.3. Момент поворота: ключ к пониманию свернутого тождества Бианки 450
§ 15.4. Нахождение момента поворота 451
§ 15.5. Сохранение момента поворота с точки зрения принципа «граница границы равна нулю» 454
§ 15.6. Сохранение момента поворота, выраженное в дифференциальной форме 455
Дополнение 15.2. Источник гравитации и момент поворота — две основные величины; их наиболее удобные математические представления 456
§ 15.7. От сохранения момента поворота к эйнштейновской геометродинамике: предварительный экскурс 457
Дополнение 15.3. Другие тождества, которым удовлетворяет кривизна 460

Литература 462

Предметный указатель 470

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Авторы предлагаемого вниманию читателей трехтомника «Гравитация» не нуждаются в специальном представлении советскому читателю. Профессор Мэрилендского университета Чарлз Мизнер, профессор Калифорнийского технологического института Кип Торн и профессор Принстонского университета Джон Арчибалд Уилер являются авторами многих замечательных книг, переведенных на русский язык, хорошо известных и быстро ставших библиографической редкостью. Они представляют разные поколения физиков-теоретиков, и каждый из них внес выдающийся вклад в физику и специально в теорию тяготения. Авторы являются основателями научных школ, и большая доля всех наших знаний по современной теории тяготения, по структуре пространства-времени связана с их именами и именами их учеников.

Монография «Гравитация» представляет собой уникальный труд, отличающийся во многих отношениях от известных книг по проблемам тяготения. Она соединяет в себе качества учебного пособия и обширного обзора по гравитационной физике (общей теории относительности Эйнштейна, или «геометродинамике»). Прежде всего это учебник, написанный весьма строго и последовательно. Но в отличие от обычных учебников, изложение ведется весьма образным, живым языком, с ясным выделением физических и математических идей, лежащих в основе излагаемого материала. Этот стиль определил и необычное построение монографии. Она по существу включает в себя два учебных пособия, совмещенных в одном издании. Первое пособие (курс 1) является учебником, в котором излагается современное состояние общей теории относительности, однако без углубления в важные и интересные, но все же более специальные вопросы. Эти вопросы освещаются во втором пособии (курс 2). Оба пособия

«перемешаны». Параграфы, относящиеся ко второму пособию, появляются по мере необходимости среди параграфов первого пособия. Это нисколько не затрудняет читателю пользование книгой, так как каждая страница первого пособия помечена цифрой 1 в верхнем углу, а каждая страница второго — цифрой 2. Читатель по желанию может знакомиться с общими вопросами, изложенными в первом учебнике, и углубляться в детали во втором. Для работы с первым учебником достаточно знания векторного анализа и простых уравнений в частных производных. Работа со вторым (кроме некоторых мест) требует прочтения только предыдущих параграфов первого учебника.

Читатель может начинать изучение книги, практически ничего не зная о теории относительности. Проработав все издание, он сможет не только разбираться в современных статьях по гравитации, но и самостоятельно начать работать в этой области. Развитию практических и исследовательских навыков способствуют упражнения, часть которых являются целыми исследовательскими работами.

Вся монография разбита на 44 главы, объединенных в 10 больших частей. Первые четыре части представляют собой современное изложение аппарата и методов как специальной теории относительности (теории плоского пространства-времени), так и общей теории относительности (геометродинамики). Последующие шесть частей («Релятивистские звезды», «Вселенная», «Гравитационный коллапс и черные дыры», «Гравитационные волны», «Экспериментальная проверка общей теории относительности», «Границы») содержат описание конкретных результатов теории Эйнштейна в изучении физики сильных гравитационных полей и протекающих в них физических процессов.

В издании на русском языке монография выходит в трех томах. Настоящий первый том включает части I — III монографии (главы 1—15), в которых содержится обзор основных идей современной теории тяготения (часть I), теория плоского пространства-времени (часть II) и математические основы теории искривленного пространства-времени (часть III). Второй том содержит части IV—VI. В них излагается теория тяготения Эйнштейна, теория релятивистских звезд и математические основы космологии. Наконец, третий том (части VII—X) содержит теорию гравитационного коллапса, теорию гравитационных волн, описание экспериментов по проверке теории тяготения и некоторые математические обобщения.

В литературе уже неоднократно отмечалась изумительная красота общей теории относительности. Новейшие глубокие результаты теории, касающиеся природы пространства-времени, его топологической структуры, процессов в окрестности «черных дыр» и вблизи сингулярностей, добавляют новые яркие краски к этому величайшему созданию теоретической мысли. Мастерское изложение этих результатов авторами монографии

позволяет понять красоту очень сложных вопросов. Здесь следует еще раз подчеркнуть, что авторы являются одними из самых известных и авторитетных специалистов по гравитации, и многие важные результаты последнего времени и глубокие идеи в этой теории принадлежат им. Авторам удалось, по нашему мнению, в последних шести частях (по объему это 2/3 всего издания) в весьма простой и вместе с тем строгой форме донести до читателя полную картину того, что часто называют теоретической релятивистской астрофизикой. Изложение ведется с точки зрения физиков-теоретиков и в первую очередь для обучения физиков-теоретиков. Поэтому в книге, естественно, отсутствуют многочисленные астрофизические аспекты проблемы, которые читателю следует искать в других, «более астрономических» книгах. Однако везде сделаны подробные библиографические ссылки, и читатель без труда сможет найти все, что его интересует.

Особенно следует отметить подробное изложение современного состояния вопроса о проверке общей теории относительности. В учебнике и на столь высоком современном уровне это сделано впервые.

Естественно, может возникнуть вопрос: по теории гравитации написано так много книг и учебников, зачем написан этот «еще один» учебник? Ответ дают сами авторы монографии.

Во-первых, в наше время теория гравитации Эйнштейна из абстрактной науки стала одной из важнейших конкретных наук. Она имеет приложения как к проблемам движения естественных и искусственных небесных тел Солнечной системы, постепенно меняя одну из старейших и патриархальных наук — небесную механику, так и к проблемам создания детекторов гравитационных волн и других приборов; наконец, самое важное — теория гравитации является основой понимания интересных астрофизических открытий — нейтронных звезд, «черных дыр», космологических процессов расширения Вселенной, реликтового излучения и многого другого. Все это не находило в полной мере отражения в прежних учебниках.

Во-вторых, новые приложения и новые задачи заставили развить новые математические методы исследования. В прежних учебниках их авторы обычно ограничивались тензорным анализом и традиционными методами описания римановых пространств. Теперь этого совершенно недостаточно, и авторы данной монографии приводят новые мощные математические методы. Изложенные причины и привели к появлению этой монографии, потребовавшей очень долгой и тщательной работы.

Мы уверены, что такое фундаментальное учебное пособие будет исключительно полезным в течение многих лет для широкого круга специалистов в этой быстро развивающейся области физики.

В. Б. Брагинский
И. Д. Новиков

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Сознавая, что мы очень многим обязаны нашим советским коллегам, которые помогли глубже проникнуть в целый ряд проблем и всячески стимулировали нашу работу, мы испытываем огромное удовольствие от того, что эта книга переведена на русский язык. Мы благодарны В. Б. Брагинскому и И. Д. Новикову, по инициативе которых предпринят перевод. Мы искренне признательны также нашим коллегам М. М. Баско, А. Г. Полнареву и А. А. Рузмайкину, взявшим на себя труд перевести книгу. Нами внесено около двадцати исправлений в первоначальное издание на английском языке. Если поставить себе целью оставаться на надлежащем уровне еще хотя бы в течение десяти лет, то судя по необычайно быстрому прогрессу в развитии теории и эксперимента в данной области как в Советском Союзе, так и за границей, следовало бы гораздо глубже пересмотреть содержание книги. С того момента, как мы закончили английское издание, появилось так много новых достижений, что нам хотелось бы многое изменить в настоящем русском издании. Но в конце концов мы решили, что быстрый перевод с незначительными исправлениями предпочтительнее, чем задержка на несколько лет, которая могла бы потребоваться для действительно основательного пересмотра книги.

Чарлз В. Мизнер
Кип С. Торн
Джон Арчибалд Уилер

Принстон, Нью-Джерси

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Эта книга является учебным пособием по теории гравитации («общей теории относительности» Эйнштейна, или «геометродинамике»). В ней содержится два курса по этому предмету (курс 1 и курс 2). В курсе 1 основное внимание сосредоточено на ключевых физических идеях. Предварительные знания по математике, необходимые для его изучения, включают лишь векторный анализ и простейшие уравнения в частных производных. Его удобно использовать в качестве семестрового курса для студентов как старших, так и младших курсов и аспирантов. По мнению авторов его содержание составляет обязательный минимум знаний по теории тяготения, которым должен обладать каждый хороший студент-физик. На страницах, содержащих материал курса 1, в верхнем внешнем углу поставлена цифра 1, позволяющая читателю легко находить параграфы этого курса. В оглавлении той же цели служит жирная черная черта рядом с номерами параграфов.

Остальная часть текста дополняет курс 1 до курса 2. Читатель и преподаватели свободны выбирать в качестве дополнительного материала те части курса 2, которые их более всего интересуют. За несколькими исключениями любая глава курса 2 может быть понята читателем, изучившим лишь предшествующий материал курса 1. Исключения подробно оговорены в начале каждой главы курса 2 и при каждом переходе от курса 1 к курсу 2 внутри глав.

Все издание в целом (полностью курс 1 и полностью курс 2) предназначено для годичного аспирантского курса в строгом изложении, хотя многие лекторы, читающие годовой курс, могут предпочесть более медленный темп, опустив часть материала курса 2. Оно должно давать уровень знаний по теории гравитации, приблизительно соответствующий уровню знаний по теории электромагнетизма, которым в среднем обладает доктор филосо-

фии [1]). Когда студент достигнет этого уровня, он будет знать законы физики в плоском пространстве-времени (главы 1—7). Он сможет делать порядковые оценки для изучаемых явлений, а также проводить расчеты с использованием основных методов современной дифференциальной геометрии (главы 8—15) с любой разумной степенью точности. Для него будет понятна геометрическая формулировка основных законов физики в духе Эйнштейна (главы 16—22). Он ознакомится с приложениями общей теории относительности, представляющими наибольший интерес в настоящее время: пульсарами и нейтронными звездами (главы 23—26), космологией (главы 27—30), геометрией Шварцшильда и гравитационным коллапсом (главы 31—34), гравитационными волнами (главы 35—37); рассмотрит эксперименты по проверке теории Эйнштейна (главы 38—40). Он сможет читать современную математическую литературу по дифференциальной геометрии, а также новейшие публикации в физических и астрофизических журналах по геометродинамике и ее приложениям.

Для тех, кто захочет продвинуться дальше, чем уравнения поля, четыре основных области приложений и эксперименты по проверке, в конце книги (главы 41—44) дан краткий обзор некоторых перспективных направлений в общей теории относительности. Среди затронутых тем особое внимание уделено суперпространству и квантовой геометродинамике. В этих главах сформулированы некоторые крупнейшие проблемы физики и направления исследований, на которых ученые в настоящее время концентрируют свои усилия.

Студенты физических, астрофизических и математических факультетов все менее и менее могут быть удовлетворены просто беседами по общей теории относительности. Они хотят услышать четко сформулированные основные положения этой теории, научиться самостоятельно ориентироваться в потоке информации. Все большее число университетов вводит в свои программы серьезные курсы по классической геометродинамике Эйнштейна, сформулированной в 1915 г. Совсем иначе обстояло дело с классической электродинамикой Максвелла, созданной в 1864 г. В 1897 г., когда Эйнштейн был студентом в Цюрихе, этого предмета не было в учебном расписании даже половины европейских университетов [2]). «Мы напрасно ждали изложения теории Максвелла»,— вспоминает один из сокурсников Эйнштейна. «Более всего был разочарован Эйнштейн» [37], так как он считал электродинамику «наиболее привлекательным в то время предметом» [38] — оценка, которую многие студенты дают теперь теории Эйнштейна!

Теория Максвелла напоминает теорию Эйнштейна по тем срокам, которые понадобились для ее признания. Даже в 1904 г.

---

[1]) Имеется в виду степень доктора философии за рубежом; она примерно соответствует степени кандидата физико-математических наук.— *Прим. перев.*

[2]) *Holton G.*, частное сообщение, 1965 г.

могла еще появиться книга, написанная таким крупным исследователем, как Вильям Томсон, лорд Кельвин, со словами: «Так называемая «электромагнитная теория света» пока ничего нам не дала ... мне кажется, что это скорее шаг назад... я полагаю, что единственная вещь, которая мне кажется вразумительной, является неприемлемой... то, что должно существовать электрическое смещение, перпендикулярное направлению распространения» [39]. Может быть один из создателей трансатлантического телеграфа именно потому и внес такой большой вклад в максвелловскую электродинамику — от единиц и основных принципов измерения до теории электромагнитных волн, распространяющихся по проводам,— что сам вначале с таким трудом ее воспринял? В таком случае это должно обнадежить многих, кто сегодня изучает геометродинамику Эйнштейна! К 1920 г., под влиянием новых достижений, от телеграфа Кельвина до радио Маркони [1]), от атома Резерфорда и Бора до новейшей техники высокочастотных контуров, возникло общее убеждение, что Максвелл был прав. Сомнения отступили. Уверенность стимулировала дальнейшие приложения, новые приложения укрепляли уверенность.

Многие сначала не торопились принять общую теорию относительности, так как казалось, что она почти не имеет приложений. Теперь теория Эйнштейна привлекает многих именно потому, что она богата приложениями. Мы более не ограничиваемся рассмотрением трех, хотя и знаменитых, но скудных тестов: гравитационного красного смещения, искривления Солнцем световых лучей и прецессии перигелия орбиты Меркурия. Общая теория относительности в соединении с радиолокационной техникой шаг за шагом превращает небесную механику Солнечной системы, созданную старшим поколением, в новую науку с другим уровнем точности, новыми эффектами и новыми перспективами. Единственным приемлемым объяснением для пульсаров, открытых в 1968 г., являются нейтронные звезды, предсказанные в 1934 г.,— объекты со столь высокой центральной плотностью ($\sim 10^{14}$ г/см^3), что предсказания теории Эйнштейна относительно их массы отличаются от предсказаний теории Ньютона на 10—100%. Относительно дальнейшего увеличения плотности, заканчивающегося процессом гравитационного коллапса, теория Ньютона вообще молчит; в отличие от этого с помощью классической геометродинамики Эйнштейна в 1939 г. были предсказаны свойства полностью сколлапсировавших объектов — «застывших звезд», или «черных дыр». В 1966 г. стали известны результаты подробных численных расчетов образования таких объектов в процессе коллапса звезд с ядром, напоминающим белый карлик.

В наши дни надежда впервые обнаружить черную дыру — отнюдь не самая беспочвенная из идей, стимулирующих научные

[1]) Здесь и иногда в дальнейшем замечания авторов исторического характера субъективны. Хорошо известно, что первый беспроволочный телеграф был создан А. С. Поповым.— *Прим. ред.*

исследования в различных направлениях. Какое влияние на свойства черной дыры оказывает вращение? Какого рода всплеск гравитационного излучения испускается при образовании такого объекта? Какой формируется спектр рентгеновских лучей, когда газ, оттекающий из соседней звезды, затягивается в черную дыру [1])? Все исследования такого рода, а также ряд других, основаны на классическом сферически симметричном статическом решении эйнштейновских уравнений поля, полученном в 1916 г. Шварцшильдом и впервые по-настоящему истолкованном в современном смысле в 1960 г., а в 1963 г. обобщенном на черные дыры с моментом вращения.

Помимо тестов в Солнечной системе и других приложений теории относительности, помимо пульсаров, нейтронных звезд и черных дыр, помимо геометростатики (ср. с электростатикой!) и стационарных геометрий (ср. с магнитным полем постоянного тока!) существует геометродинамика в полном смысле этого слова (ср. с электродинамикой!). Нигде так четко, как здесь, не выступает великая идея Эйнштейна: геометрия пространства является новой физической реальностью, наделенной степенями свободы и обладающей своей собственной динамикой. Как показал Эйнштейн в 1918 г., деформации пространственной геометрии могут переносить энергию из одного места в другое. В настоящее время во многом благодаря инициативе Джозефа Вебера детекторы гравитационного излучения уже построены и используются для установления верхних пределов потока энергии гравитационных волн с определенными значениями частоты, пронизывающих Землю. Никто до наших дней не мог по-настоящему представить себе, как много явлений различного рода должно сопровождаться значительным гравитационным излучением. Никогда ранее не было такого интереса к выделению этих сигналов нового типа и использованию их для регистрации далеких событий. Никогда ранее не было такого стремления в целом ряде лабораторий поднять чувствительность приборов до такого уровня, чтобы гравитационное излучение стало новым привычным окном во Вселенную.

Расширение Вселенной является самым выдающимся тестом для геометродинамики Эйнштейна, а космология — самой обширной областью применения. Предсказание теорией расширения Вселенной задолго до его экспериментального обнаружения (1929 г.) было слишком фантастично, чтобы сам автор в него поверил. Находясь в противоречии с короткой временно́й шкалой, полученной Хабблом для расширения, в противовес «теориям» («стационарное состояние», «непрерывное рождение материи»), построенным для оправдания и применения этой короткой шкалы, классическая общая теория относительности решительно настаи-

[1]) К апрелю 1973 г. имеются веские доводы в пользу того, что Лебедь X-1 и другие компактные рентгеновские источники могут быть черными дырами.

вала на предсказании длительной временно́й шкалы; и все это за десятки лет до того, как астрофизики убедились (1952 г.), что хаббловская шкала расстояний и времен неверна и должна быть увеличена более чем в 5 раз. Давая расхождение приблизительно в 30 раз в значении средней плотности энергии-массы вещества во Вселенной по сравнению с недавними астрофизическими данными 1958 г., теория Эйнштейна, как и десятки лет назад, настаивает на более высокой плотности, выдвигая «загадку недостающей материи», стимулирует астрофизиков на непрекращающиеся поиски, которые с каждым годом приводят к все новым свидетельствам в пользу существования материи в пространстве между галактиками.

Общая теория относительности предсказала существование первичного космического излучения от «начального взрыва» и даже приближенное значение его температуры в нашу эпоху за семнадцать лет до его открытия. Это излучение несет информацию о состоянии Вселенной, когда ее линейные размеры были в тысячу раз, а объем — в миллиард раз меньше, чем сейчас.

Квазизвездные объекты, открытые в 1963 г., дают более подробную информацию о не столь отдаленной эпохе, когда линейные размеры Вселенной были в два — четыре раза меньше, чем сейчас. Информируя нас о тех стадиях эволюции галактик и Вселенной, о которых мы не можем узнать иным способом, эти объекты представляют собой нечто большее, чем просто маяки, освещающие далекие области Вселенной в далеком прошлом. Они выделяют энергию в количествах, которые не встречаются нигде более во Вселенной. Они выбрасывают вещество с удивительной направленностью. Их излучение загадочным образом меняется во времени, причем по-разному в сверхвысокочастотном и видимом диапазонах. Квазизвездные объекты и ядра галактик, первые на огромных расстояниях, вторые, находящиеся ближе к нам,— в более мелком масштабе, бросают вызов общей теории относительности: их тайны еще не разгаданы!

И если большое количество приложений геометродинамики Эйнштейна привлекает к ее изучению многих молодых астрофизиков, то по той же причине эта теория привлекает и физиков, занимающихся физической космологией, экспериментами по общей теории относительности, гравитационным излучением, свойствами объектов из сверхплотного вещества. О другой причине, которая может побудить к ознакомлению с этой теорией,— об изучении плодотворной точки зрения Эйнштейна на геометрию, как на новый аппарат в физике, мы здесь не будем говорить, поскольку, как нам кажется, о ней свидетельствует каждая глава данной монографии.

Зачем нужна новая книга? Появились новые приложения общей теории относительности, чрезвычайно интересные с физической точки зрения; устарели изданные ранее прекрасные пособия и среди них даже выдающаяся монография [40], написанная Вольф-

гангом Паули в возрасте двадцати одного года. К тому же дифференциальная геометрия настолько изменилась по форме, что фактически стала недоступной для студента, обучение которого ограничено лишь традиционным тензорным исчислением, используемым в более ранних работах. Ему трудно, или даже невозможно, разобраться в современных математических работах, сформулировать для математика, который мог бы ему помочь, стоящую перед ним физическую проблему. Мы не нашли иного способа выполнить свой долг перед студентами наших институтов и университетов помимо создания нового курса, способного дать глубокие знания по предмету, с современным математическим аппаратом, ориентированного на физические и астрофизические приложения, представляющие наибольший интерес в наши дни, и пронизанного верой в то, что мир устроен красиво и просто.

Хай-Айленд,
Саут-Бристол, штат Мэн
4 сентября 1972 г.

Чарлз В. Мизнер
Кип С. Торн
Джон Арчибалд Уилер

ОТ АВТОРОВ

Мы выражаем глубокую признательность всем тем, кто сделал возможным появление этой книги. Коллега читает нам специальную лекцию, чтобы мы могли на ее основе написать одну из глав этой книги. Другой исследователь разбирает для нас сложный вопрос рождения материи из вакуума при наличии сильных приливных гравитационных сил. Далекий коллега сообщает нам по телефону список работ, касающихся неизменности во времени физических постоянных. Один исследователь ставит проблему плотности энергии нулевого электромагнитного поля. Другой снабжает нас кривыми эффективного потенциала как функции расстояния. Библиотекарь пишет за границу, чтобы достать для нас статью в малоизвестном журнале. Секретарь любезно перепечатывает в третий раз переработанную главу. Редактор и художник проявляют изобретательность, решая непростую проблему оформления. Лишь умножив эти дружеские проявления помощи и теплого сотрудничества несчетное число раз, можно получить некоторое представление о том, чем мы обязаны более чем полутора сотням своих коллег. Образ каждого из них остался в нашей памяти, и наши сердца наполнены благодарностью всем им. Мы выражаем также сердечную благодарность Калифорнийскому технологическому институту, Институту новейших исследований в Дублине, Институту новейших исследований в Принстоне, Университету в Киото, Университету штата Мэриленд, Принстонскому университету и Университету штата Техас в Остине за гостеприимство во время написания этой книги. Мы благодарны Академии наук СССР, Московскому университету и нашим советским коллегам за их гостеприимство и предоставленную нам в июне — июле 1971 г. возможность лучше ознакомиться с советскими работами по теории гравитации. За помощь в исследованиях,

вошедших в эту книгу, мы благодарим Национальный научный фонд (субсидии GP 27304 и 28027 Калтеху, GP 17673 и GP 8560 Мэриленду, GP 3974 и GP 7669 Принстону), Отдел научных исследований Военно-воздушных сил США (субсидия AF 49-638-1545 Принстону), Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства (субсидия NGR 05-002-256 Калтеху, NSG 210-002-010 Мэриленду), фонд А. Слоуна за стипендию одному из авторов (К. С. Т.), мемориальный фонд Дж. Гугенхейма и колледж Ол Соулс в Оксфорде (Англия) за стипендии, предоставленные другому автору (Ч.В.М.).

ЧАСТЬ I

ФИЗИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В которой читателя сначала бегло (§ 1.1), а затем более подробно знакомят с основными положениями и некоторыми более второстепенными вопросами геометродинамики Эйнштейна, не пользуясь в качестве компаса преимуществами хорошего математического аппарата.

1. ГЕОМЕТРОДИНАМИКА В КРАТКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

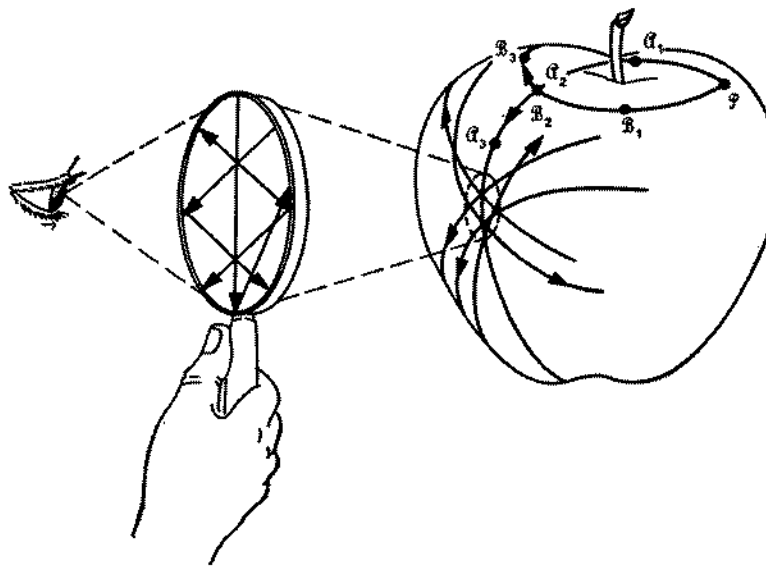
§ 1.1. ПРИТЧА О ЯБЛОКЕ

Однажды в 1666 г. Ньютон оказался за городом и, увидев, как упало яблоко (об этом мне рассказала его племянница), погрузился в глубокие размышления о той причине, по которой все предметы увлекаются в направлении, почти точно совпадающем с направлением к центру Земли.

ВОЛЬТЕР (1738 г.)

Однажды в саду под яблоней лежал студент и размышлял о том, как по-разному понимали гравитацию Ньютон и Эйнштейн. Неожиданно он вздрогнул: рядом упало яблоко. Студент взглянул на него и заметил, как по его поверхности забегали муравьи (фиг. 1.1). Ему стало любопытно, и он решил выяснить, по какому принципу муравьи выбирают свой путь. Воспользовавшись увеличительным стеклом, он тщательно отметил путь одного муравья и, отступив от него в каждую сторону по миллиметру, сделал ножом два параллельных надреза на яблочной кожуре. Затем он снял получившуюся дорожку из кожуры и разложил ее на своей книге. Теперь путь муравья на этой дорожке был прямым, словно луч лазера. Невозможно было отыскать более экономного пути для преодоления тех десяти сантиметров, которые разделяли начало и конец вырезанной полоски яблочной кожуры. Любой зигзаг или плавный поворот при движении муравья по яблочной кожуре между начальной и конечной точками увеличил бы длину его пути.

«Какая прекрасная геодезическая»,— отметил студент.



ФИГ. 1.1.

Здесь риманова геометрия пространства-времени общей теории относительности символически представлена в виде двумерной геометрии на поверхности яблока. Геодезические, вдоль которых по поверхности яблока ползают муравьи, являются символическим изображением мировых линий, вдоль которых в пространстве-времени движутся свободные частицы. В любой достаточно малой области пространства-времени геометрию можно приближенно считать плоской, и на двумерной поверхности яблока это представлено почти прямолинейными отрезками геодезических, хорошо видимыми через увеличительное стекло («локально лоренцев характер» геометрии пространства-времени). В более протяженных областях проявляется кривизна многообразия (четырехмерного пространства-времени в случае реального физического мира; криволинейной двумерной геометрии в случае яблока). Две геодезические $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, выходящие под некоторым углом друг к другу из одной точки $\mathcal{P}$, начинают сближаться, затем пересекаются и расходятся в совершенно различных направлениях. В теории Ньютона этот эффект приписывается гравитационному воздействию на расстоянии со стороны центра притяжения, который символически представлен здесь черенком яблока. Согласно Эйнштейну, траектория частицы определяется локальной геометрией пространства-времени в том месте, где она находится. «Указания» геометрии очень просты: двигаться как можно прямее (по геодезической). Локально физика настолько проста, насколько это вообще возможно. Траектории пересекаются только вследствие кривизны пространства-времени в больших масштабах. Короче говоря, геометродинамика включает два момента: воздействие геометрии на материю (приводящее к пересечению первоначально расходящихся геодезических) и воздействие материи на геометрию (искривление пространства-времени из-за наличия концентрации массы, символически представленное искривленной поверхностью яблока вблизи черенка).

Его взгляд упал на двух муравьев, отправившихся из одной и той же точки P в направлениях, слегка отличающихся друг от друга. На этот раз их пути случайно пролегли вблизи углубления в верхней части яблока, причем по разные стороны от него. Каждый из муравьев добросовестно следовал вдоль своей геодезической. Каждый старался бежать по яблочной кожуре как можно прямее. Однако из-за собственной кривизны углубления их пути сначала пересеклись, а затем разошлись в совершенно разных направлениях.

«Можно ли придумать более удачную иллюстрацию для геометрической теории тяготения Эйнштейна? — задумчиво произнес студент.— Муравьи движутся так, будто их притягивает к яблочному черенку. Можно было бы поверить и в ньютоновскую силу, действующую на расстоянии. Но муравью нечем руководствоваться при выборе своего пути, кроме локальной геометрии поверхности, по которой он ползет. А это, безусловно, и есть концепция Эйнштейна, подразумевающая, что причиной всех физических явлений является локальное воздействие. И как она отличается от ньютоновского подхода в физике с его «дальнодействием»! Теперь я гораздо лучше понимаю, о чем говорится в этой книге».

Локальное понимание физики Эйнштейна и ньютоновское «действие на расстоянии»

Сказав это, он открыл свою книгу и прочел: «Не пытайтесь описывать движение по отношению к удаленным объектам. *Физика проста только при локальном анализе.* А локально мировая линия, вдоль которой движется спутник (в пространстве-времени, вокруг Земли), уже является прямой, насколько мировая линия вообще может быть прямой. Забудьте все эти разговоры об «отклонении» от прямолинейного движения и «силе тяготения». Я нахожусь в космическом корабле. Или плаваю в космосе около него. Разве я чувствую какую-либо «силу гравитации»? Ничего подобного. Чувствует ли эту силу корабль? Нет. Тогда зачем говорить о ней? Считайте, что и корабль, и я пересекаем область пространства-времени, в которой не действуют никакие силы. Считайте, что движение в этой области уже является идеально прямым».

Физика проста только при локальном анализе

Послышался сигнал к обеду, но студент все еще сидел, рассуждая про себя. «Мне кажется, что суть эйнштейновской геометрической теории тяготения можно кратко выразить в виде трех положений: 1) локально геодезические кажутся прямыми; 2) в более обширных областях пространства-времени те геодезические, которые сначала расходятся, начинают впоследствии сближаться со скоростью, определяемой кривизной пространства-времени, и это влияние геометрии на материю и есть то, что мы сегодня подразумеваем под старым словом «тяготение»; 3) материя в свою очередь деформирует геометрию. Углубление на поверхности яблока возникает потому, что там есть черенок. Я думаю, что все это можно выразить еще более кратко: *Пространство воздействует на материю, «указывая» ей, как двигаться. Материя в свою очередь оказывает обратное действие на пространство,*

Пространство указывает материи, как двигаться

Материя указывает пространству, как искривляться

«указывая» ему, как искривляться. Другими словами, наличие материи в данном месте,— сказал он, вставая и поднимая за черенок яблоко,— приводит к кривизне пространства в этом месте. Чтобы искривить пространство в данном месте, его необходимо искривить и в соседних областях,— продолжал он, наблюдая за замешкавшимся муравьем, деловито следующим вдоль своей геодезической на расстоянии толщины пальца от черенка.— Так материя в данном месте оказывает влияние на материю в другом месте. Это и есть объяснение «гравитации», данное Эйнштейном».

Обеденный сигнал затих, и он ушел, унеся с собой книгу, увеличительное стекло — и яблоко.

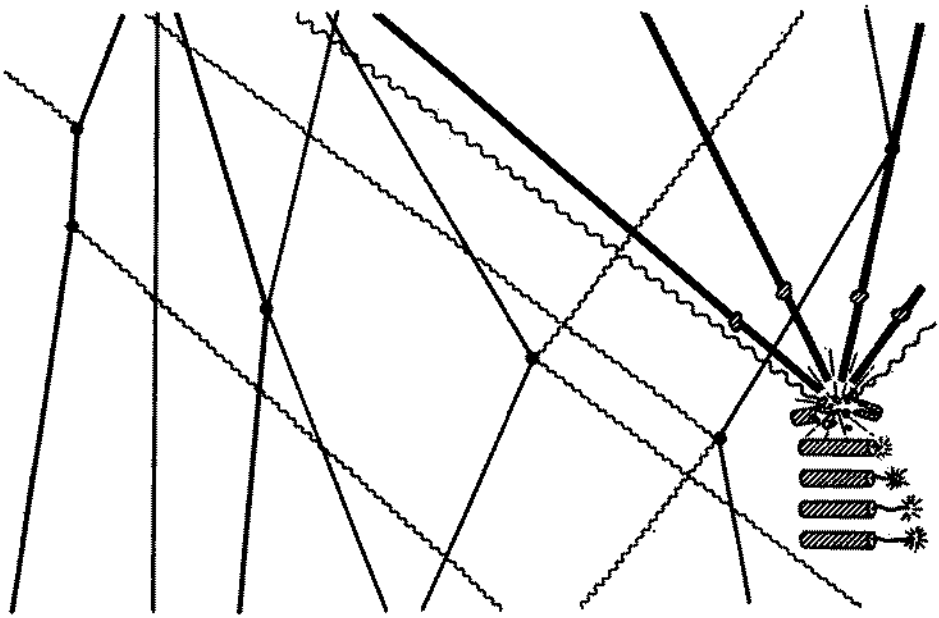
§ 1.2. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ С КООРДИНАТАМИ И БЕЗ НИХ

И вот мне пришло в голову: ... тот факт,
что ускорение свободного падения
не зависит от природы падающего вещества,
допускает следующее толкование: в поле тяготения
(малой пространственной протяженности) все происходит так,
как в пространстве без тяготения...
Это произошло в 1908 г. Почему понадобилось еще семь лет,
чтобы построить общую теорию относительности?
Главная причина заключается в том, что не так легко
освободиться от представления, что координаты
имеют прямой метрический смысл.

А ЭЙНШТЕЙН [77]

Проблема: как проводить измерения в искривленном пространстве-времени

При первом знакомстве с понятием «искривленного пространства-времени» ничто так не удручает, как боязнь того, что в этой незнакомой ситуации все простые методы измерения уже неприменимы. Чувствуешь себя так, будто тебе нужно обмерить гигантский айсберг причудливой формы, и ты стоишь с метром в руках в шлюпке, которую бросает из стороны в сторону на океанских волнах. Вот если бы нужно было обмерить форму самой шлюпки, то это не представляло бы особого труда. Мы вытащили бы ее на берег, перевернули и вбили в опорных точках по всей поверхности гвоздики. Измерив расстояния между гвоздиками, мы получили бы форму всей поверхности. Увеличивая число гвоздиков, можно выполнить это с любой точностью. Требуется куда больше смелости, чтобы решиться забить несколько десятков крюков для разметки огромного айсберга. Однако при всей смелости как можно забить гвоздь в пространство-время, чтобы отметить в нем какую-либо точку? К счастью, как впервые подчеркнул Эйнштейн, у природы есть свой способ локализации точек в пространстве-



ФИГ. 1.2.
Пересечение соломинок на сеновале, наполненном сеном, символизирует мировые линии, заполняющие пространство-время. Пересечения и искривления этих мировых линий однозначно определяют события, и координатных систем и координат не требуется. Типичные события (черные точки), символически изображенные на фигуре, представляют собой (слева направо): поглощение фотона, переизлучение фотона, столкновение двух частиц, столкновение частицы и фотона, еще одно столкновение частицы и фотона, взрыв хлопушки, столкновение внешней частицы с осколком хлопушки.

времени. Будем характеризовать точку тем, что в ней происходит! Назовем точку пространства-времени «событием». Точка, где расположено событие, определена так же четко и ясно, как точка пересечения двух соломинок на сеновале, доверху заполненном сеном (фиг. 1.2). Для идентификации достаточно сказать, что событие соответствует столкновению такого-то фотона с такой-то частицей. Мировые линии этого фотона и этой частицы выходят из прошлого и уходят в будущее. У них густая сеть связей с близлежащими мировыми линиями, которые в свою очередь множеством способов связаны с более отдаленными. Как же тогда объяснить положение события? Сначала укажите, какие мировые линии участвуют в событии. Затем проследите ход каждой из них. Назовите другие события, которые на них встречаются. В конце концов можно упорядочить весь сеновал. У каждого события теперь есть наименование. Найти нужное пересечение теперь так же легко, как коренному лондонцу легко найти дорогу на угол улиц Сент-

Решение: охарактеризуем события тем, что в них происходит

Джеймс и Никадилли. Никаких номеров. Никакой координатной системы. Никаких координат.

Наименование события может быть любым

Тот факт, что большинство улиц в Японии не имеет названий, а большинство домов — номеров, демонстрирует нашу способность обходиться без координат. Можно отказаться от обозначения события путем указания двух мировых линий, на пересечении которых оно находится. Точно так же, как в Японии можно найти дом по имени его хозяина, определенным событиям в пространстве-времени можно давать произвольные наименования, как это часто и делается (дополнение 1.1).

Координаты — удобный способ давать наименования

Но удобнее все-таки пользоваться координатами. Разве есть какой-либо иной способ легко определить (когда перед вами лежит огромный и толстый каталог хаотически расположенных событий), что на данной мировой линии сначала столкнешься с событием Тринити, затем Бэйкер, потом Майк, потом Аргус, а, скажем, не с теми же событиями, но в другом порядке?

Чтобы упорядочить события, введем координаты (фиг. 1.3)! Координаты — это четыре числа с индексами, поставленные в соответствие событию в пространстве-времени; на листе бумаги — только два числа. У события Тринити появляются координаты

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11).$$

В общем случае координаты не являются мерой длины

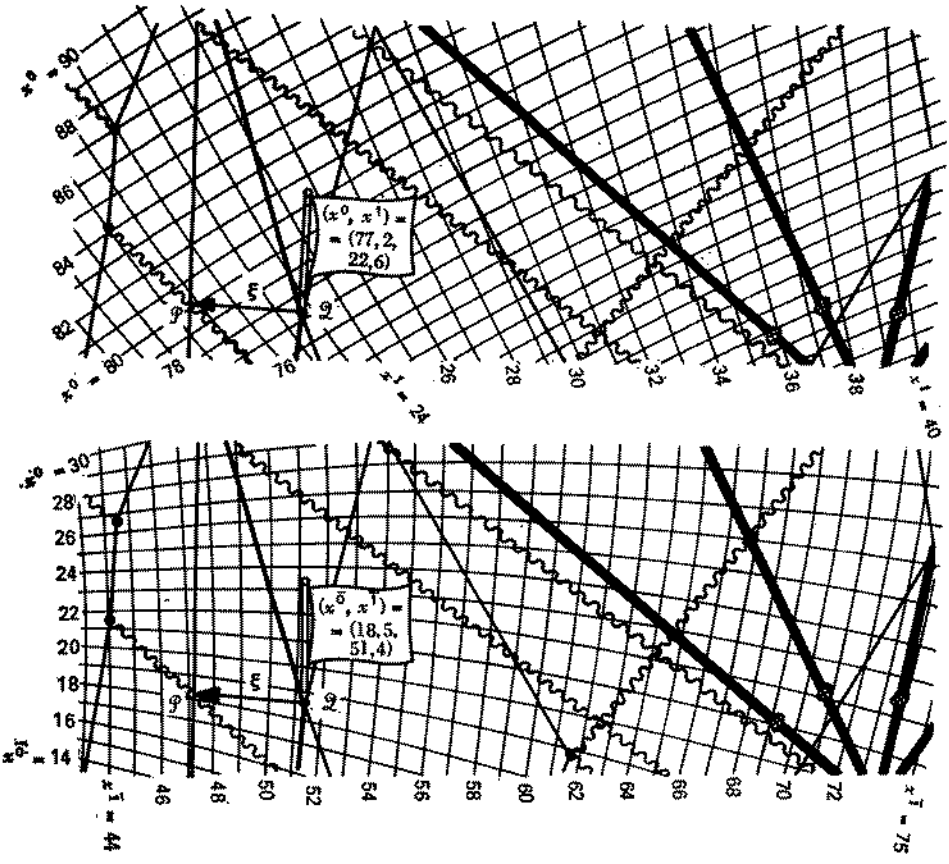
Когда событиям дают координатные наименования, процесс измерения отходит на задний план и требуется лишь выполнение гладкости. Четыре числа, соответствующие событию, есть не что иное, как своего рода усовершенствованный телефонный номер. Путем сравнения «телефонных номеров» вы можете узнать, являются ли два события близкими. Но даже не пытайтесь по разнице в телефонных номерах выяснить, сколько метров разделяет эти события!

Можно одновременно пользоваться различными системами координат

Так же, как никто не мешает абонентам пользоваться услугами различных конкурирующих телефонных сетей, так и события можно описывать в различных системах координат (фиг. 1.3). В дополнении 1.1 демонстрируются соотношения между различными системами координат, а также используемая система обозначений для координат и их преобразований.

Векторы

Выберем два события, являющихся близкими, о чем мы можем судить по близости значений их координат в некоторой гладкой координатной системе. Нарисуем маленькую стрелку, направленную от одного из них к другому. Такая стрелка называется *вектором*. (Это понятие хорошо определено для плоского пространства-времени или для искривленного пространства-времени в пределе бесконечно малой длины; в случае конечной длины в искривленном пространстве-времени ему надо дать более строгое и точное определение, после чего оно появляется под названием «касательный вектор», см. гл. 9.) Вектору, так же как и событиям, можно дать наименование. Но назовем ли мы его Джон, Чарлз или Кип, он остается строго и однозначно определенным гео-



ФИГ. 1.3.

Вверху. Событиям сообщаются «телефонные номера» посредством системы координат. Когда говорят, что система координат «гладкая», имеют в виду, что близкие события имеют близкие значения координат. *Внизу.* Те же самые события упорядочены иным образом с помощью другой системы координат. Здесь выбраны два конкретных соседних события: событие $\mathcal{Q}$ с координатами $(x^0, x^1) = (77{,}2,\ 22{,}6)$ и $(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}) = (18{,}5,\ 51{,}4)$ и событие $\mathcal{P}$ с координатами $(x^0, x^1) = (79{,}9,\ 20{,}1)$ и $(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}) = (18{,}4,\ 47{,}1)$. Между событиями $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ лежит «вектор» ξ, который их разделяет. [Для точного определения вектора в искривленном пространстве-времени требуется перейти к пределу, когда две точки бесконечно приближаются друг к другу (разность $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ уменьшается в N раз), с последующим умножением этой разности на N, но уже в локально плоском пространстве, получившемся в результате этой процедуры ($\lim N \to \infty$; «касательное пространство», «касательный вектор»). Здесь мы отказываемся от абсолютной строгости, поэтому слово «вектор» взято в кавычки.] В каждой системе координат разделяющий вектор ξ характеризуется «компонентами» (разностью значений координат событий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$):

$$(\xi^0, \xi^1) = (79{,}9 - 77{,}2,\ 20{,}1 - 22{,}6) = (2{,}7,\ -2{,}5),$$
$$(\xi^{\bar{0}}, \xi^{\bar{1}}) = (18{,}4 - 18{,}5,\ 47{,}1 - 51{,}4) = (-0{,}1,\ -4{,}3).$$

Подробнее о событиях, координатах и векторах см. дополнение 1.1.

ФИГ. 1.4.
Как возникает чисто координатная сингулярность. *Вверху.* Система координат становится *сингулярной*, когда «ячейки в коробке для яиц» сплющиваются до нулевого объема. *Внизу.* Пример, демонстрирующий такого рода сингулярность в шварцшильдовских координатах r, t, часто используемых для описания геометрии в окрестности черных дыр (гл. 31). Угловые координаты θ, ϕ для простоты опущены. Сингулярность проявляется в двух аспектах. Во-первых, все точки вдоль пунктирной линии, будучи совершенно различными, обозначены одной и той же парой значений (r, t), а именно $r = 2m$, $t = \infty$. Координаты не дают возможности различить эти точки. Во-вторых, «ячейки для яиц», одна из которых на рисунке заштрихована, вдоль пунктирной линии сжаты до нулевого объема. В итоге можно сказать, что в самой геометрии на пунктирной линии нет ничего особенного: вся сингулярность заключается в системе координат («плохая система телефонных номеров»). То случайное обстоятельство, что координата t обращается в бесконечность на пунктирной линии, не должно приводить к путанице. От этой бесконечности можно избавиться, если вместо t ввести новую координату $\bar{t}$, определяемую соотношением

$$(t/2m) = \operatorname{tg}(\bar{t}/2m).$$

Когда $t = \infty$, новая координата $\bar{t}$ равна πm. Однако координаты r, $\bar{t}$ не позволяют различать точки вдоль пунктирной линии. Они также приводят к сжатым до нулевого объема «ячейкам в коробке для яиц».

метрическим объектом. Имя дается ради удобства, но вектор существует и без него.

Точно так же, как четверка координат

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11)$$

является крайне удобным наименованием для события Тринити (по нему можно судить о том, какие события находятся поблизости), так и четверка «компонент»

$$(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = (1{,}2, -0{,}9, 0, 2{,}1)$$

является удобным наименованием для вектора Джон, который выходит из точки

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11)$$

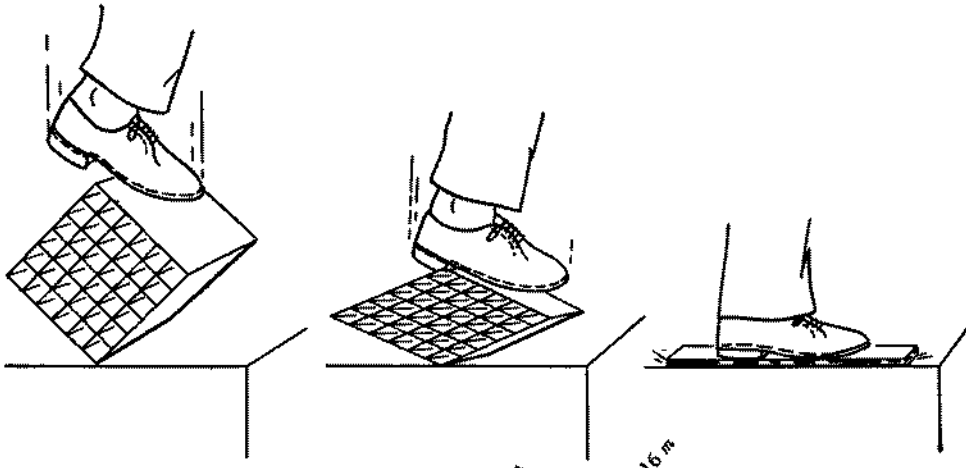
и направлен в точку

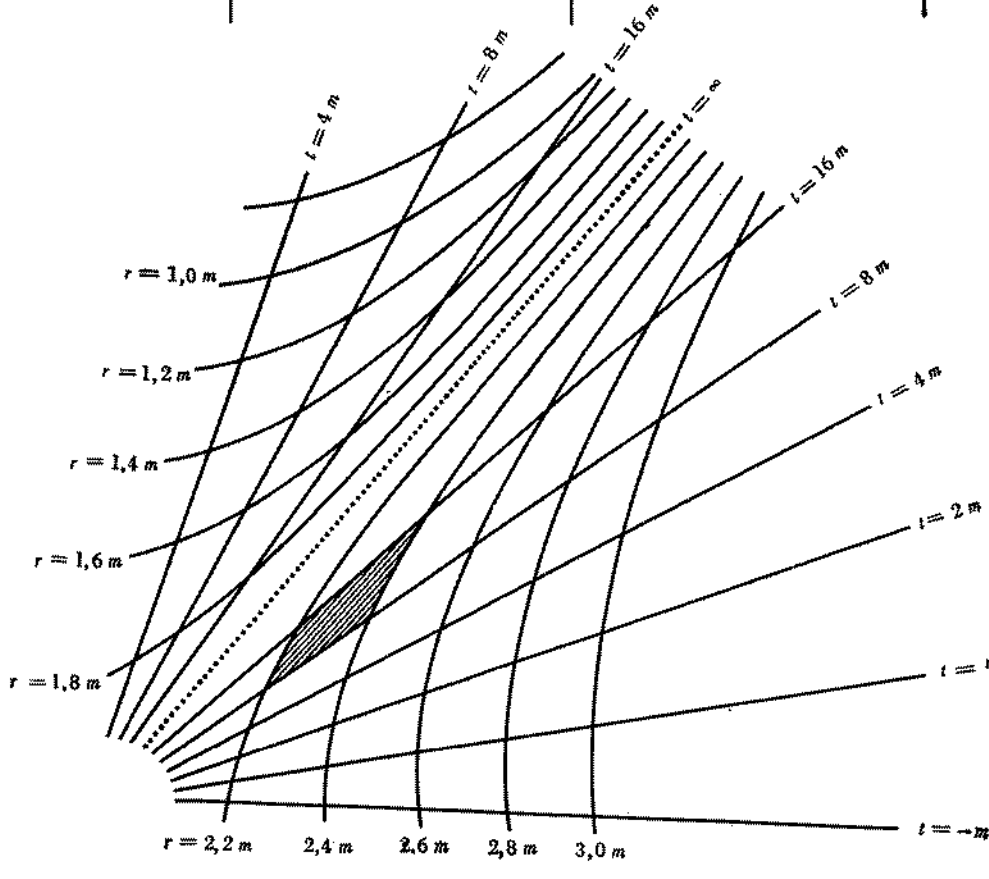
$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (78{,}2, 22{,}1, 64{,}0, 13{,}1).$$

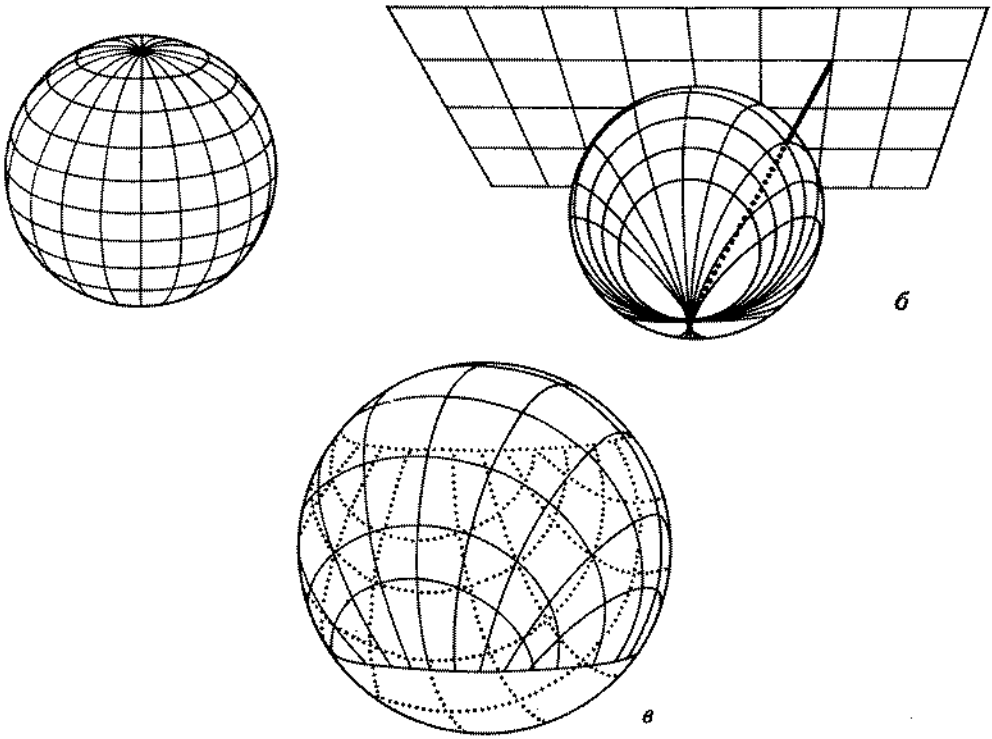
О том, как обращаться с компонентами вектора, сказано в дополнении 1.1.

Как правило, нельзя избежать координатных сингулярностей

Система координат может быть несовершенной во многих отношениях. Пример координатной сингулярности приведен на фиг. 1.4. Еще один пример координатной сингулярности — Северный полюс на поверхности глобуса. Обратите внимание, как в нем сходятся все меридианы («сжатие ячеек в коробке для яиц до нулевого объема»). Нельзя ли придумать нечто более совершенное? Например, ввести на всем глобусе единую систему координат, у которой нет сингулярностей. Существует теорема, дающая




t = 4 m
t = 8 m
t = 16 m
t = ∞
t = 16 m
t = 8 m
t = 4 m
t = 2 m
t = m
t = −m
r = 1,0 m
r = 1,2 m
r = 1,4 m
r = 1,6 m
r = 1,8 m
r = 2,2 m
2,4 m
2,6 m
2,8 m
3,0 m



ФИГ. 1.5.
Для хорошо известной системы координат на двумерной сфере можно избежать сингулярности, если покрыть сферу двумя перекрывающимися координатными листами. *а* — сферические полярные координаты, сингулярные на Северном и Южном полюсах и претерпевающие разрыв на линии перемены даты. *б* — проекция на сферу эвклидовых координат двумерной эвклидовой плоскости, касающейся сферы на Северном полюсе. Проекция построена посредством луча, проходящего через Южный полюс, на котором и появляется координатная сингулярность. *в* — покрытие двумерной сферы двумя перекрывающимися координатными листами. Один из них, построенный аналогично случаю *б*, покрывает северную полусферу с южными тропиками вплоть до тропика Козерога, и не содержит сингулярностей. Другой покрывает все тропики и южную полусферу и тоже не имеет сингулярностей.

отрицательный ответ. Нужно как минимум два «координатных листа», чтобы охватить всю двумерную сферу без сингулярностей (фиг. 1.5). Это обстоятельство по-иному освещает тот факт, что точки и события первичны, а координаты — всего лишь система учета.

Непрерывность пространства-времени

На фиг. 1.2 и 1.3 показано лишь несколько событий и мировых линий. На более подробном рисунке мы увидели бы целый лабиринт мировых линий, световых лучей и их пересечений. Отталкиваясь от такой картины, можно умозрительно перейти к идеали-

зированному предельному случаю бесконечно густой сети световых лучей и мировых линий бесконечно малых пробных частиц. Этому идеализированному предельному случаю в физике однозначно соответствует математическое понятие непрерывного четырехмерного «многообразия» (четырехмерного пространства с определенными свойствами гладкости), и в этом предельном случае используются непрерывные, дифференцируемые (т.е. гладкие) системы координат. Таким образом, математика дает тот инструмент, с помощью которого мы рассуждаем в физике.

Математическая теория многообразий в приложении к физике пространства-времени

Размерность многообразия можно определить путем простого подсчета. Возьмем точку $\mathcal{P}$ в n-мерном многообразии. Ее окрестностью является n-мерный шар (т. е. внутренность сферы, поверхность которой имеет $n-1$ измерение). Выберем этот шар таким образом, чтобы его граница была гладким многообразием. Размерность этого многообразия равна $n-1$. В этом $(n-1)$-мерном многообразии выберем точку Q. Ее окрестностью является $(n-1)$-мерный шар. Выберем этот шар таким образом, ..., и т. д. В конце концов путем таких построений мы придем к двумерному многообразию, не зная еще, что оно двумерно (двумерная сфера). В этом двумерном многообразии выберем точку $\mathfrak{M}$. Ее окрестностью является двумерный шар («диск»). Выберем этот диск таким образом, чтобы его граница была гладким многообразием (окружностью). В этом многообразии выберем точку $\mathfrak{N}$. Ее окрестностью является одномерный шар, но мы еще не знаем, что он одномерен («отрезок линии»). Граница этого объекта состоит лишь из двух точек. Это обстоятельство позволяет заключить, что находящееся внутри многообразие одномерно; следовательно, предыдущее многообразие было двумерным и т. д. Размерность первоначального многообразия равна числу точек, использованных при построении. Размерность пространства-времени равна 4.

Размерность пространства-времени

Такого рода математические рассуждения о размерности вполне оправдывают себя в обиходной шкале расстояний, на уровне размеров атома (10^{-8} см), ядра (10^{-13} см) и даже расстояний на несколько порядков меньших, если судить по тому, насколько совпадают предсказания квантовой электродинамики с наблюдениями при высоких энергиях (соответствующих дебройлевской длине волны 10^{-16} см). Более того, классическая общая теория относительности рассматривает многообразие пространства-времени как детерминированную структуру, абсолютно строго определенную вплоть до сколь угодно малых расстояний. Совсем не так обстоят дела в квантовой общей теории относительности, или в «квантовой геометродинамике». Она предсказывает сильные флуктуации геометрии на расстояниях порядка планковской длины

Нарушение гладкости пространства-времени на расстояниях порядка планковской длины

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} =$$
$$= [(1{,}054 \cdot 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с})\,(6{,}670 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2)]^{1/2} \times$$
$$\times\,(2{,}998 \cdot 10^{10} \text{ см/с})^{-3/2} = 1{,}616 \cdot 10^{-33} \text{ см}. \quad (1.1)$$

И по сей день этот вывод считается неизбежным. Насколько сейчас можно оценить, эти флуктуации придают пространству на малых расстояниях «многосвязный», или «пенообразный», характер. Вследствие отсутствия гладкости даже само понятие размерности может потерять всякий смысл в планковской шкале расстояний. Дальнейшее исследование этого вопроса приводит нас в область перспективных направлений развития теории тяготения Эйнштейна (гл. 44).

Трудности в определении геометрии даже на классических расстояниях?

Если на малых расстояниях пространство-время не описывается математической моделью непрерывного многообразия, то, может быть, и в более крупных масштабах математическая идеализация сильно расходится с физической реальностью? Бесконечно густая сеть световых лучей и мировых линий бесконечно малых пробных частиц, которая нужна для определения всех точек многообразия, безусловно, не может реализоваться на практике. Никто еще не обнаружил частицы более легкой, чем электрон, которая бы двигалась вдоль времениподобных мировых линий (с конечной массой покоя). Совокупность электронов, обладающая даже нулевой плотностью заряда (мировых линий e^+ столько же, сколько и мировых линий e^-), обладает конечной плотностью массы. Эта плотность искривляет как раз то многообразие, которое изучается. Исследование его структуры в бесконечно малом приводит к бесконечно большим плотностям, а значит и к бесконечно большим возмущениям геометрии.

Нет, необходимо признать, что на классических расстояниях геометрия вполне имеет смысл

Однако требовать возможности проводить исследования в общей теории относительности в бесконечно малом масштабе в том смысле, как указано выше, так же неуместно, как неуместно это в электродинамике или в газовой динамике. Электродинамика имеет дело с напряженностью электрического и магнитного полей в каждой точке пространства в каждый момент времени. Чтобы измерить эти поля, вводятся в рассмотрение бесконечно малые пробные частицы, плотность распределения которых мы можем неограниченно изменять по нашему желанию. Однако их присутствие совсем не обязательно, чтобы придать полю реальность. Поле везде имеет четко определенную величину и эволюционирует непрерывно и детерминированным образом независимо от нашего желания и независимо от того, есть ли бесконечно малые пробные частицы или их нет. Подобным же образом обстоит дело с геометрией пространства.

В заключение можно сказать, что когда мы имеем дело с пространством-временем в рамках классической физики, мы вводим 1) понятие «бесконечно малой пробной частицы» и 2) идеализацию, в которой вся совокупность идентифицируемых событий образует непрерывное четырехмерное многообразие. Лишь в конце этой книги мы рассмотрим некоторые из ограничений, накладываемых квантовой теорией на наши возможности исследовать пространство-время и использовать само это понятие.

Дополнение 1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ СОБЫТИЙ, КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ

События обозначаются одной заглавной рукописной латинской буквой, например: Иногда употребляются индексы:	$\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{B}_6$
Координаты события $\mathscr{P}$ обозначаются или или более абстрактно где подразумевается, что греческие индексы могут принимать значения 0, 1, 2 или 3	$t(\mathscr{P})$, $x(\mathscr{P})$, $y(\mathscr{P})$, $z(\mathscr{P})$, $x^0(\mathscr{P})$, $x^1(\mathscr{P})$, $x^2(\mathscr{P})$, $x^3(\mathscr{P})$, $x^\mu(\mathscr{P})$, или $x^\alpha(\mathscr{P})$,
Временна́я координата (если одна из четырех выбирается в качестве таковой)	$x^0(\mathscr{P})$
Пространственными координатами являются иногда их обозначают Предполагается, что латинские индексы принимают значения 1, 2 или 3	$x^1(\mathscr{P})$, $x^2(\mathscr{P})$, $x^3(\mathscr{P})$, $x^j(\mathscr{P})$ или $x^k(\mathscr{P})$, или ... .
Сокращенные обозначения. Выписывать каждый раз явно функциональную зависимость координат $x^\beta(\mathscr{P})$ довольно утомительно, поэтому вводится сокращенное обозначение для координат события $\mathscr{P}$ и для пространственных координат. При пользовании этими обозначениями постепенно начинает возникать представление будто x^β представляют само событие $\mathscr{P}$, но нельзя забывать, что значения x^0, x^1, x^2, x^3 зависят не только от выбора $\mathscr{P}$, но и от *произвольного* выбора системы координат!	x^β x^j
Другие координаты того же события $\mathscr{P}$ могут быть обозначены *Пример.* На фиг. 1.3 $(x^0, x^1) = (77{,}2,\ 22{,}6)$ и $(x^{\bar 0}, x^{\bar 1}) = (18{,}5,\ 51{,}4)$ соответствуют *одному и тому же* событию. С помощью черточек, штрихов и крышек мы отличаем одну систему координат от другой; мы расставляем их над индексами, а не над самими буквами, чтобы упростить дальнейшие обозначения	$x^{\bar\alpha}(\mathscr{P})$, или просто $x^{\bar\alpha}$, $x^{\alpha'}(\mathscr{P})$, или просто $x^{\alpha'}$, $x^{\hat\alpha}(\mathscr{P})$, или просто $x^{\hat\alpha}$.
Преобразование от одной системы координат к другой осуществляется с помощью четырех функций которые кратко обозначаются	$x^{\bar 0}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar 1}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar 2}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar 3}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar\alpha}(x^\beta)$.

Разделяющий вектор[1] (маленькая стрелка), направленный от события $\mathcal{Q}$ к событию $\mathcal{P}$, абстрактно может быть обозначен
Его можно характеризовать также разностями значений координат[2] $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ (которые называются «компонентами» вектора)

$\mathbf{u}$ или $\mathbf{v}$, или $\boldsymbol{\xi}$, или $\mathcal{P}-\mathcal{Q}$.

$$\xi^{\alpha} \equiv x^{\alpha}(\mathcal{P}) - x^{\alpha}(\mathcal{Q}),$$
$$\xi^{\bar{\alpha}} \equiv x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P}) - x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{Q}).$$

Преобразование компонент вектора от одной системы координат к другой осуществляется с помощью частных производных от уравнений преобразования координат так как[2]

$$\xi^{\bar{\alpha}} = x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P}) - x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{Q}) = (\partial x^{\bar{\alpha}}/\partial x^{\beta})\,[x^{\beta}(\mathcal{P}) - x^{\beta}(\mathcal{Q})].$$

$$\xi^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\beta}}\,\xi^{\beta},$$

Правило суммирования Эйнштейна, которое здесь используется: предполагается, что по всем индексам, повторно появляющимся в произведении, происходит суммирование

$$\frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\beta}}\,\xi^{\beta} \equiv \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\beta}}\,\xi^{\beta}.$$

[1]) Такое определение вектора справедливо лишь для плоского пространства-времени. Строгое определение («касательного вектора») для искривленного пространства-времени здесь не приводится (см. гл. 9), однако принципы плоской геометрии являются достаточно хорошим приближением и в случае криволинейной геометрии, когда две точки достаточно близки друг к другу.

[2]) Эти формулы выполняются точно лишь в том случае, когда рассматривается плоская область пространства-времени в лоренцевой системе координат. В противном случае они являются лишь приближенными, но выполняются тем точнее, чем ближе друг к другу точки и чем меньше длина вектора.

§ 1.3. НЕВЕСОМОСТЬ

Свободное падение — естественное состояние движения

«Гравитация поистине загадочна. Бросьте камень. Посмотрите, как он падает. Послушайте, как он ударяется. Никто не понимает, почему это происходит». Какое обманчивое утверждение! Загадка падения? Но что же еще делать камню, как не падать? В падении нет ничего неестественного. Ненормально то, что на пути камня оказался какой-то объект. Если вы хотите обнаружить «загадку», не нужно следить за траекторией падающего камня. Вместо этого обратите внимание на соударение и попытайтесь выяснить, какая сила столкнула камень с его естественной «мировой линии» (т. е. с его естественной траектории в пространстве-времени). Это привело бы к интересному разделу физики твердого тела, но нас сейчас интересует не это. Нас интересует падение. Свободное падение эквивалентно невесомости, т. е. отсутствию какой бы то ни было силы, способной отклонить тело от его нормальной траектории в пространстве-времени. Чтобы испытать невесомость,

достаточно попасть в свободно падающую кабину лифта. Или на борт космического корабля, падающего прямо на Землю. Или, что гораздо приятнее, на борт космического корабля, находящегося в таком стационарном состоянии падения на Землю, когда он движется по круговой орбите. Во всех этих случаях тела движутся по естественным траекториям в пространстве-времени.

У космонавта один химический состав, у космического корабля — совсем другой; однако они движутся вместе, и космонавт не имеет веса в своей движущейся кабине. Согласно Роллу, Кроткову и Дикке [41], поставившим один из важнейших в физике экспериментов, не давших положительного результата (фиг. 1.6), предметы, изготовленные из таких различных материалов, как алюминий и золото, падают с ускорениями, которые совпадают с точностью [1]), превышающей 10^{-11}. Ничем не отличается от падения макроскопических тел и падение отдельных молекул [42], отдельных нейтронов [43], отдельных электронов [44] и отдельных μ-мезонов [45]. Более того, ни одному из этих объектов не надо «выглядывать» в пространство, чтобы узнать, как двигаться.

Все тела падают с одним и тем же ускорением

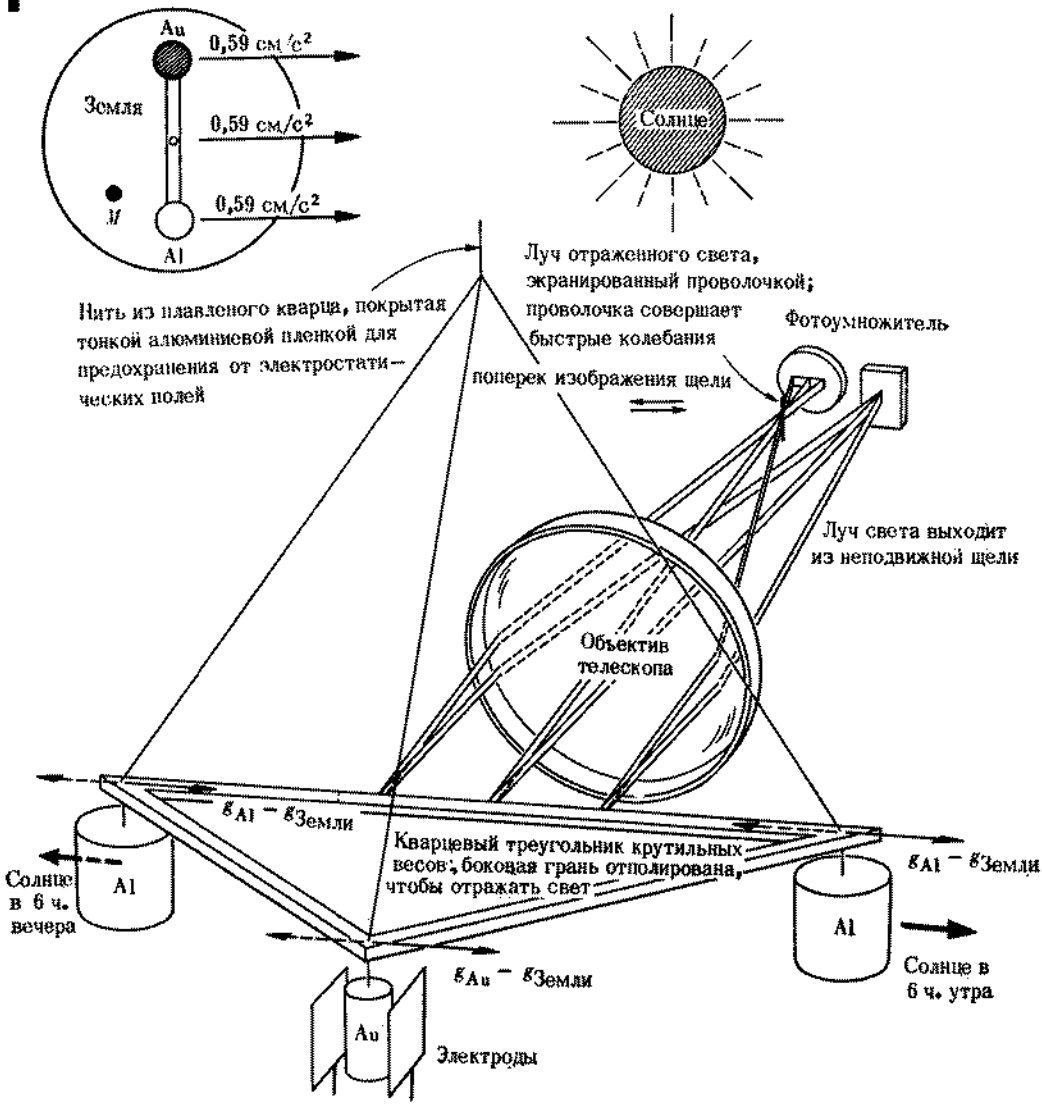
Представим себе, что внутри космического корабля случайно (или преднамеренно) оказались незакрепленными ключ, монета, орех и горошина. Все эти объекты по отношению к кораблю, стенками которого они отгорожены от окружающего мира, либо находятся в состоянии покоя, либо движутся по прямой линии с постоянной скоростью. И это очень поучительный и красноречивый опытный факт.

Не будем более говорить об ускорении! Как это ни парадоксально, но лишь в силу определенных обстоятельств стали говорить, что «все тела падают с одним и тем же ускорением». Откуда же в конце концов взялись эти ускорения? Они возникают лишь тогда, когда наблюдатель находится на поверхности Земли. Земля под ногами не дает наблюдателю двигаться вдоль естественной мировой линии. И из-за этой помехи ответственность за все эти ускорения ложится именно на него. Поместите его в космическое пространство и прикрепите к его ногам по ракетному соплу. Никакой разницы! [2]) В этом случае также ответственность за то, что видит наблюдатель, падает на него самого. Он тоже замечает, что «все тела падают с одним и тем же ускорением». Для наблю-

---

[1]) В работе [46] достигнута точность 10^{-12}.— *Прим. ред.*

[2]) Выражение «никакой разницы» равнозначно эйнштейновскому принципу локальной эквивалентности «гравитационного поля» и ускорения [13]: *«Мы придем к весьма удовлетворительной интерпретации этого опытного закона, если допустим, что системы отсчета K и K′ физически в точности равноценны, т. е. если допустим, что систему K равным образом можно рассматривать как систему, находящуюся в пространстве, свободном от поля тяжести, но при этом мы должны рассматривать K как равномерно ускоренную систему. При таком подходе нельзя говорить об абсолютном ускорении координатной системы, так же как нельзя в обычной теории относительности говорить об абсолютной скорости системы. С этой точки зрения одинаковое ускорение всех падающих тел в гравитационном поле очевидно».*



ФИГ. 1.6.
Принципиальная схема эксперимента Ролла — Кроткова — Дикке, который показал, что гравитационные ускорения золота и алюминия совпадают с точностью, превышающей 10^{-11} (Принстон, 1964). В левом верхнем углу показаны две равные массы золота и алюминия, прикрепленные к двум концам стержня. Стержень закреплен посередине. Если оба тела падают к Солнцу с одним и тем же ускорением $g = 0{,}59$ см/с², то стержень неподвижен. Если ускорение массы золота несколько больше, то в системе отсчета, связанной с Землей, конец стержня, к которому прикреплено золото, отклонится в сторону Солнца. Через двенадцать часов Солнце будет с другой стороны, и направление притяжения изменится. Переменный крутящий момент легко отделить от шума, так как его период равен точно 24 ч. К сожалению, любая сколько-нибудь значительная масса поблизости, как, например, экспе-

рументатор, находящийся в M, создает такой момент, на фоне которого искомый эффект полностью пропадает. Поэтому реально эксперимент выглядел так, как изображено на основной части рисунка. Два груза из алюминия и один из золота подвешены в вершинах горизонтально расположенного равностороннего треугольника со стороной 6 см (благодаря трехосевой симметрии система не реагирует на простейшие неоднородности гравитационного поля). Экспериментаторы во время измерений находились на удалении, чтобы исключить гравитационные эффекты, связанные с их присутствием[1]). Чтобы измерять малые углы поворота крутильных весов $\sim 10^{-9}$ рад, не внося при этом сильных возмущений, Ролл, Кротков и Дикке использовали слабый луч света, отражаемый гладкой боковой гранью кварцевого треугольника. Изображение источника, имеющего вид щели, фокусировалось на проволочку приблизительно той же толщины, что и размер самого изображения. Миновав проволочку, свет попадал на фотоумножитель. С помощью отдельной цепи переменного тока проволочка приводилась в колебательное движение поперек светового луча с частотой 3000 гц. Когда изображение находилось точно в центре, разложение интенсивности светового луча содержало лишь четные гармоники частоты колебаний. Однако, как только изображение смещалось немного в сторону, в разложении интенсивности по гармоникам появлялась основная частота. В выходном электрическом сигнале фотоумножителя при этом присутствовала компонента с частотой 3000 Гц. Знак и величина этой компоненты определялись автоматически. На электроды, показанные на рисунке, также автоматически подавалось постоянное напряжение, величина которого была пропорциональна этой компоненте. Постоянное электрическое поле возвращало крутильные весы в нулевое положение. Величина напряжения, которое надо было приложить для возвращения весов в нулевое положение, непрерывно регистрировалась и служила мерой крутящего момента, действующего на маятник. Затем зависимость крутящего момента от времени на протяжении многих суток подвергалась фурье-анализу. Величина фурье-компоненты с периодом 24 ч позволила определить отношение $\delta g/g = (0{,}96 \pm 1{,}04)\cdot 10^{-11}$. Таким образом, алюминий и золото падают с одним и тем же ускорением, несмотря на существенные различия между этими элементами, указанные ниже.

Отношение	Al	Au
$\frac{\text{Число нейтронов}}{\text{Число протонов}}$	1,08	1,5
$\frac{\text{Масса, соответствующая кинетической энергии } K\text{-электрона}}{\text{Масса покоя электрона}}$	0,005	0,16
$\frac{\text{Электростатическая энергия-масса ядра}}{\text{Масса атома}}$	0,001	0,004

Теоретические следствия этого эксперимента обсуждаются более подробно в гл. 16 и 38. Брагинский и Панов [46] выполнили в принципе тождественный эксперимент, но в усовершенствованном варианте. Сравнивая ускорения для платины и алюминия, они получили $\delta g/g \leqslant 1\cdot 10^{-12}$.

[1]) Необходимо было принять меры (и они были приняты), чтобы избавиться от других возмущений. 1. Кусочек железа размером 10^{-3} см, помещенный на крутильные весы, в магнитном поле Земли дал бы вклад в крутящий момент, в сотни раз превышающий измеренное значение. 2. Различие в давлении света на разные стороны груза привело бы к недопустимо большим возмущениям, если бы разность температур этих сторон превысила 10^{-4} К. 3. Выделение газа с одной стороны груза закрутило бы его, как ракета. Если бы газ выделялся со скоростью 10^{-8} г/сутки, то сила составляла бы $\sim 10^{-7}$ г·см/с^2 — значение, достаточное, чтобы повлиять на измерения. 4. Вращение измерялось по отношению к балке, на которой было закреплено оборудование. Чтобы быть уверенным, что эта балка сама не вращается, она была вделана в скальное основание. 5. Электростатические силы были также исключены; иначе они внесли бы свои возмущения.

дателя, который ускоряется за счет работы ракетных двигателей, физика сложна в той же мере, что и для земного наблюдателя. Чтобы физика стала простой, надо забыть про обоих этих наблюдателей и мысленно перенестись в кабину космического корабля, совершающего свободный полет в пространстве. Ничто не может быть естественнее той картины, которую мы увидим: все незакрепленные предметы движутся по прямым линиям с постоянными скоростями. Вот как надо изучать физику! Пользуйтесь специально выбранной системой координат, в которой наблюдатель невесом,— *локально инерциальной системой отсчета*. Или рассчитайте, как все происходит в этой системе. Или, если вы вынуждены пользоваться системой отсчета, связанной с Землей, работайте с такими быстрыми частицами и на столь коротких расстояниях, при которых идеальная, свободно падающая система отсчета отличается от реальной, связанной с Землей, на величину, пренебрежимо малую в шкале эксперимента. [Если длина линейного ускорителя 1500 м, энергия электрона 1 ГэВ, то время пролета $\approx (1{,}5 \cdot 10^5 \text{ см})/(3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}) = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ с; за это время тело в свободном падении пролетает $\sim {}^1/_2\, gt^2 = (490 \text{ см/с}^2)\,(0{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ с})^2 \approx \approx 10^{-8}$ см.]

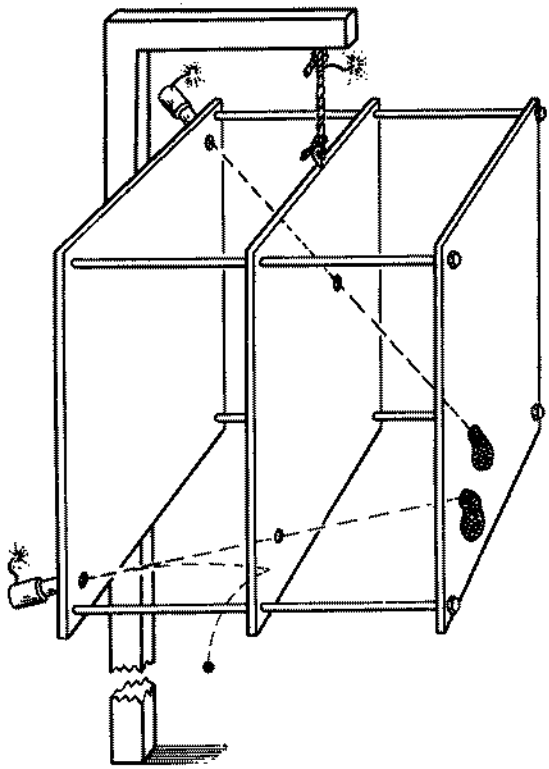
Избавимся от ускорения, использовав локально инерциальную систему отсчета

Преимуществом изучения физики в локально инерциальной системе отсчета, так же как при наблюдении за муравьем на малом участке яблочной кожуры, является простота, достигаемая за счет отказа от всяких ссылок на то, что происходит вдали. Физика проста только с локальной точки зрения — этот великий урок преподал нам Эйнштейн.

Ньютон говорил совсем по-другому: «Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным». Но как придать смысл ньютоновскому абсолютному пространству, найти его краеугольные камни, отметить его прямые линии? В реальном мире, где есть гравитация, ни одна частица не движется по ньютоновским прямым линиям. Идеальная геометрия Ньютона ненаблюдаема. «Комета, проходящая около Солнца, отклоняется от прямой линии». Нет, не существует такой «мостовой», на которой можно было бы отметить эту линию. «Идеальная прямая линия» — это миф. Ее никогда не было и не будет.

Ньютоновское абсолютное пространство ненаблюдаемо, оно не существует

> «Потребовалась жестокая борьба [для Ньютона], чтобы прийти к понятию независимого и абсолютного пространства, неоценимому для развития теории... Выводы Ньютона при современном ему состоянии науки были единственно возможными и, в частности, единственно плодотворными. Но последующее развитие проблемы, которое вряд ли можно было предвидеть заранее, показало, что сопротивление Лейбница и Гюйгенса, исходивших из интуитивно правильных, но плохо подкрепленных аргументами представлений, на



ФИГ. 1.7.
«Невесомость» в качестве теста локально инерциальной системы отсчета («лоренцевой системы»). Если система отсчета свободно падает и не вращается («естественная мировая линия в пространстве-времени»), то обе пушечки с пружинным механизмом посылают свои снаряды (стальные шарики от подшипника) сквозь отверстия в щитах из люсита, расположенные вдоль прямых линий, прямо в цель (плетеные корзинки). Если же система в момент выстрела подвешена на веревке, как показано на рисунке («система отклоняется от естественной мировой линии в пространстве-времени из-за натяжения веревки»), то попасть в цель не удается (искривленная траектория с шариком, отскочившим рикошетом, в нижней части рисунка). Такая модель инерциальной системы отсчета была построена Гарольдом Ваате в Принстоне. Площадь люситовых щитов составляла около 1 м². «Запальные шнуры», символически обозначающие задержку во времени, были заменены электрическими реле. Попадания не происходит, если движение системы является 1) вращательным, 2) ускоренным или 3) какой-либо комбинацией первых двух. Трудно придумать другое легко реализуемое устройство, которое более полно иллюстрировало бы смысл понятия «локально лоренцева система отсчета».

самом деле было вполне обосновано... Не менее напряженные усилия потребовались для того, чтобы впоследствии преодолеть это понятие [абсолютного пространства]».

А. Эйнштейн [50]

Эйнштейновские локально инерциальные системы существуют и имеют простой смысл

Согласно Эйнштейну, геометрия в любой локально инерциальной системе отсчета проста и имеет прямой и ясный смысл. В этой системе каждая частица движется по прямой линии с постоянной скоростью. *Определим* локально инерциальную систему, выбрав несколько частиц и потребовав, чтобы движение этих частиц обладало такими простыми свойствами (фиг. 1.7). В определенной таким образом системе любая другая свободная частица также движется по прямой линии и с постоянной скоростью. Процессы столкновения и аннигиляции частиц подчиняются законам сохранения импульса и энергии, справедливым в специальной теории относительности. То обстоятельство, что все происходит таким удивительным образом (а это подтверждают результаты многих тысяч экспериментов в физике элементарных частиц), есть проявление глубочайших закономерностей, которым подчиняются все явления в природе. Можно кратко сформулировать следующие выводы: 1) физика всегда и везде является локально лоренцевой, т. е. локально справедливы законы специальной теории относительности; 2) эта простота наиболее четко проявляется в локально лоренцевой системе отсчета («инерциальной системе отсчета», фиг. 1.7); 3) чтобы удостовериться, что система является локально лоренцевой, достаточно убедиться, что в ней имеет место невесомость!

В локально инерциальных системах физика носит лоренцев характер

Дополнение 1.2. ВЕЩЕСТВА, ИМЕЮЩИЕ СОВЕРШЕННО РАЗЛИЧНЫЙ СОСТАВ, ПАДАЮТ С ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ УСКОРЕНИЕМ («СТАНДАРТНАЯ МИРОВАЯ ЛИНИЯ»)

Аристотель: «Падение массы золота или свинца, или какого-нибудь другого тела, происходит тем быстрее, чем больше его размер».

Догалилеевы источники: металлический и деревянный грузы падают с одинаковой скоростью.

Галилей: 1) «Разность скоростей движения в воздухе для шаров из золота, свинца, меди, порфира и других тяжелых веществ столь ничтожна, что при падении с высоты 100 локтей (около 46 м) золотой шар не обгонит медный и на четыре пальца. Установив это из наблюдений, я пришел к выводу, что в среде, не оказывающей никакого сопротивления, все тела будут падать с одинаковой скоростью». 2) Позднейшие, более точные эксперименты, в которых «тяготение было ослаблено», показывают, что время спуска по наклонной плоскости для различных тел одно и то же.

Ньютон: наклонная плоскость заменена дугой, по которой движется груз маятника; «время падения» тел различной природы определяется путем сравнения

периодов колебаний маятника с грузом из двух различных веществ. Предел точности в этих экспериментах накладывается тем, насколько точно удается определить эффективную длину каждого маятника: (ускорение) = (2π/период)²(длина).

Лоран фон Этвеш [47, 48] сравнивал две вертикали на поверхности вращающейся Земли, определяемые отвесами с грузами из различного материала. Обе подвешенные массы, увлекаемые закрепленными нитями-подвесами, описывают тождественные мировые линии в пространстве-времени (в лаборатории Этвеша!). Но будут ли они двигаться по тождественным траекториям в пространстве-времени («естественным мировым линиям пробной массы»), если обрезать нити подвеса? Если будут, то ускорение, из-за которого фактическая мировая линия отклоняется от естественной мировой линии свободного падения, имеет вполне определенное значение **a**. В эксперименте Этвеша не делалось попытки проверить совпадение абсолютной величины **a** для двух масс. Чтобы это сделать, нужно 1) обрезать нити и 2) проследить за падением обеих масс. Этвеш отказался от такого подхода, отдав предпочтение статическим измерениям, которые он мог провести с большей точностью, сравнивая *направление* вектора **a** для двух масс. Его рассуждения сводились к следующему: направление, определяемое нитью подвеса, есть не что иное, как направление, вдоль которого масса уходит со своей естественной мировой линии «свободного падения» или «невесомости». Соответствующее ускорение является векторной суммой 1) ускорения **g**, направленного вверх против так называемого гравитационного притяжения, и 2) ускорения, направленного к оси вращения Земли и равного $\omega^2 R \sin\theta$ (ω — угловая скорость, R — радиус Земли, θ — полярный угол места, где проводился эксперимент, измеренный от Северного полюса). Вертикальная составляющая этого центростремительного ускорения — $\omega^2 R \sin^2\theta$ слишком мала, чтобы принимать ее во внимание. Более важной является составляющая $\omega^2 R \sin\theta\cos\theta$, направленная на север параллельно земной поверхности. Она отклоняет нить на угол

$$\frac{\text{горизонтальное ускорение}}{\text{вертикальное ускорение}} = \frac{\omega^2 R \sin\theta\cos\theta}{g} =$$

$$= \frac{3{,}2\ \text{см/с}^2}{980\ \text{см/с}^2}\sin\theta\cos\theta = 1{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{радиан при}\ \theta = 45^\circ$$

от прямой линии, соединяющей центр Земли с точкой подвеса. Разность в ускорениях двух подвешенных грузов $\delta g = 10^{-8} g$ приведет к разнице в углах, определяемых двумя отвесами, равной $1{,}7\cdot 10^{-11}$ радиан на широте Будапешта ($\theta = 42{,}5$). Этвеш получил, что $\delta g/g$ не превышает нескольких единиц 10^{-9}.

Ролл, Кротков и Дикке [41] использовали в качестве пробного ускорения не горизонтальную составляющую постоянного центростремительного ускорения земного вращения, равную 1,7 см/с² на широте $\theta = 45^\circ$, а переменное ускорение солнечного притяжения, меняющееся с периодом 1 сутки и равное 0,59 см/с². Они получили, что $|g(\text{Au}) - g(\text{Al})|/g$ не превышает 10^{-11} (фиг. 1.6).

Брагинский и Панов [46], как и Ролл, Кротков и Дикке, использовали в качестве пробного ускорения ускорение солнечного притяжения. Они получили, что $|g(\text{Pt}) - g(\text{Al})|/g$ не превышает 10^{-12}.

Билл [45]: Движение частиц, которые в гравитационном поле Земли и Солнца отклоняются меньше, чем фотоны, эффективно происходит со скоростью, превышающей скорость света. Если эти частицы заряжены или имеют какую-либо иную электромагнитную структуру, то они, испуская черенковское излучение, быстро уменьшают свою скорость до некоторого порогового значения на длине пути меньше 1 мкм. Порог лежит в области энергий порядка $10^3\,mc^2$. Хотя ультрарелятивистские частицы в ливнях космических лучей не так то просто отождествить, тем не менее регистрация мюонов с энергией 10^{13} эВ свидетельствует о том, что у мюонов «недостаток веса» не превышает $5\cdot10^{-5}$. Наоборот, частицы P, гравитационно сильнее связанные, чем фотоны, отбирают у последних импульс, необходимый для того, чтобы стало возможным рождение пары $\gamma \to P + \bar{P}$, на длине распада, лежащей в субмикронном диапазоне. Существование фотонов с энергиями, превышающими 10^{13} эВ, говорит о том, что у $e^{\pm}$ «избыток веса» не больше $5\cdot10^{-9}$, у $\mu^{\pm}$ — не больше $2\cdot10^{-4}$, у Λ, Ξ^-, Ω^- — не более нескольких процентов.

§ 1.4. ЛОКАЛЬНО ЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ С КООРДИНАТАМИ И БЕЗ НИХ

На поверхности яблока в пределах отпечатка пальца геометрия является эвклидовой (фиг. 1.1, вид в увеличительное стекло).

Локально лоренцева геометрия является пространственно-временным аналогом локально эвклидовой геометрии

В пространстве-времени в пределах ограниченной окрестности геометрия является лоренцевой. На яблоке расстояния между точками подчиняются теоремам геометрии Эвклида. В пространстве-времени интервалы («собственное расстояние», «собственное время») между событиями удовлетворяют соответствующим теоремам геометрии Лоренца — Минковского (дополнение 1.3). Эти теоремы легко проверяются на опыте в соответствующих крайне специфичных системах координат: эвклидовых координатах — в эвклидовой геометрии, в естественном обобщении эвклидовых координат (локально лоренцевых координатах, локально инерциальной системе) — в локально лоренцевой геометрии физики. Однако содержание теорем не зависит от той или иной системы координат. При их формулировке имеют дело с интервалами и длинами. В наши дни для определения длины координаты нужны не более, чем они были нужны во времена Эвклида. Точки в огромном стогу сена — это и есть пространство-время; расстояния между этими точками — это и есть геометрия! Говорим ли мы о них на языке координат или на другом языке, они от этого не меняются (дополнение 1.3).

Дополнение 1.3. ЛОКАЛЬНО ЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ И ЛОКАЛЬНО ЭВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ (С КООРДИНАТАМИ И БЕЗ НИХ)

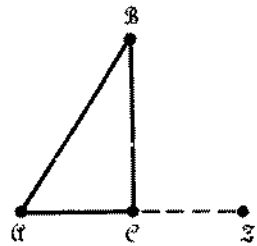
I. Локально эвклидова геометрия

Что мы имеем в виду, когда говорим, что на поверхности яблока в пределах небольшого отпечатка пальца геометрия является эвклидовой?

А. *Формулировка на языке, свободном от координат* (Эвклид):
Пусть дан отрезок $\mathscr{AC}$. Продолжим его на такую же длину $\mathscr{CZ}$. Пусть точка $\mathscr{B}$ равноудалена от $\mathscr{A}$ и $\mathscr{Z}$, но не принадлежит $\mathscr{AZ}$. Тогда

$$s^2_{\mathscr{AB}} = s^2_{\mathscr{AC}} + s^2_{\mathscr{BC}}.$$

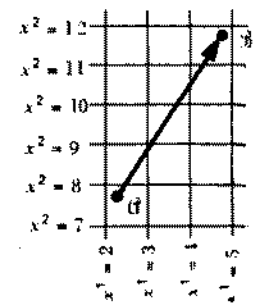
(Теорема Пифагора; справедливы также и другие теоремы эвклидовой геометрии.)



Б. *Формулировка на координатном языке* (Декарт):
Расстояние s от некоторой произвольным образом выбранной точки $\mathscr{A}$ до любой другой точки $\mathscr{B}$ в подходящей (эвклидовой) системе координат задается выражением

$$s^2_{\mathscr{AB}} = [x^1(\mathscr{B}) - x^1(\mathscr{A})]^2 + [x^2(\mathscr{B}) - x^2(\mathscr{A})]^2.$$

Если удается найти некоторую систему координат, в которой это выполняется для всех точек $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ из рассматриваемой окрестности на поверхности яблока, то отсюда сразу следует, что: 1) эта система координат локально эвклидова, и 2) геометрия поверхности яблока является локально эвклидовой.



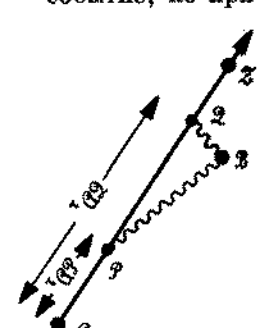
II. Локально лоренцева геометрия

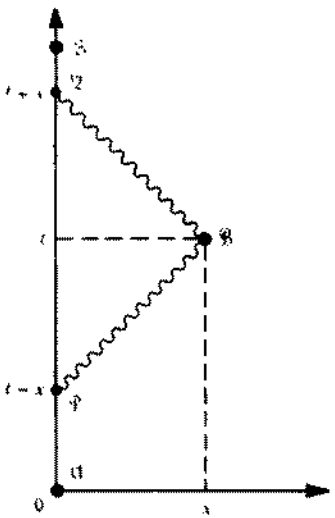
Что мы имеем в виду, когда говорим, что геометрия достаточно ограниченной окрестности пространства-времени в реальном физическом мире является лоренцевой?

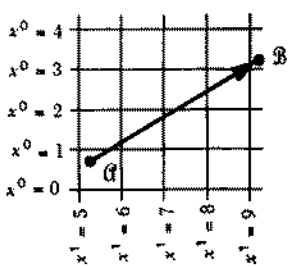
А. *Формулировка на языке, свободном от координат* (Робб [15]):
Пусть $\mathscr{AZ}$ — мировая линия свободной частицы, $\mathscr{B}$ — событие, не принадлежащее этой мировой линии. Пусть далее событие $\mathscr{Q}$ обозначает пересечение с $\mathscr{AZ}$ луча света, испущенного в $\mathscr{B}$, а $\mathscr{P}$ — такое событие на $\mathscr{AZ}$, что испущенный в нем свет как раз попадает в $\mathscr{B}$. Тогда собственное расстояние $s_{\mathscr{AB}}$ (пространственноподобный интервал) или собственное время $\tau_{\mathscr{AB}}$ (времениподобный интервал) определяются выражением

$$s^2_{\mathscr{AB}} = -\tau^2_{\mathscr{AB}} = -\tau_{\mathscr{AQ}}\tau_{\mathscr{AP}}.$$

Доказательство сформулированного выше критерия







локально лоренцевой геометрии ясно из рисунка и приведенного ниже выражения, записанного в локально лоренцевой системе отсчета, в которой частица покоится;

$$\tau^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = t^2 - x^2 = (t-x)(t+x) = \tau_{\mathscr{A}\mathscr{P}}\tau_{\mathscr{P}\mathscr{B}}.$$

Б. *Формулировка на координатном языке* (Лоренц, Пуанкаре, Минковский, Эйнштейн): Если задаться некоторым, произвольно выбранным событием $\mathscr{A}$, то любое другое близлежащее событие $\mathscr{B}$ отделено от него собственным расстоянием $s_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$ или собственным временем $\tau_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$, которые в подходящей (локально лоренцевой) системе координат определяются выражением

$$\begin{aligned} s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = -\tau^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = &-[x^0(\mathscr{B}) - x^0(\mathscr{A})]^2 + \\ &+[x^1(\mathscr{B}) - x^1(\mathscr{A})]^2 + \\ &+[x^2(\mathscr{B}) - x^2(\mathscr{A})]^2 + \\ &+[x^3(\mathscr{B}) - x^3(\mathscr{A})]^2. \end{aligned}$$

Если удается найти некоторую систему координат, в которой это выполняется локально для всех близлежащих событий $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, то отсюда сразу следует, что: 1) эта система координат локально лоренцева, и 2) геометрия пространства-времени является локально лоренцевой.

III. Положения, отражающие свойства нашего мира

Геометрия поверхности яблока является повсюду локально эвклидовой. Геометрия пространства-времени является повсюду локально лоренцевой.

IV. Локальная геометрия на языке современной математики

А. *Метрика в произвольном многообразии:*
В каждой точке на поверхности яблока, у каждого события в пространстве-времени и вообще в каждой точке любого «риманова многообразия» существует геометрический объект, называемый *метрическим тензором* $\mathbf{g}$. Это своего рода «машина» с двумя входными каналами, куда «вводятся» два вектора:

вход 1 вход 2
↓ ↓
$\mathbf{g}$(,).

Если в оба канала вводится один и тот же вектор $\mathbf{u}$, то в результате получается квадрат длины $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^2.$$

Если вводятся два различных вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (неважно в каком порядке!), то в результате получается число, называемое «скалярным произведением $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$» и обозначаемое $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

Метрика является линейной «машиной»:

$$\mathbf{g}(2\mathbf{u} + 3\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 2\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + 3\mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Следовательно, те действия, которые она производит над двумя векторами в заданной (произвольно) системе координат, можно записать в виде выражения, билинейного по компонентам этих векторов:

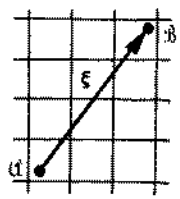
$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = g_{11} u^1 v^1 + g_{12} u^1 v^2 + g_{21} u^2 v^1 + \dots .$$

Величины $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ (α и β пробегают значения от 0 до 3 в пространстве-времени и от 1 до 2 — на поверхности яблока) называются «компонентами $\mathbf{g}$ в данной системе координат».

Б. *Компоненты метрики в локально лоренцевой и локально эвклидовой системах координат*:
Чтобы установить связь между метрикой и предыдущим описанием локальной геометрии, введем локально эвклидовы координаты (на яблоке) и локально лоренцевы координаты (в пространстве-времени). Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — вектор, разделяющий точки $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ и направленный из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$. Его компоненты в локально эвклидовых (лоренцевых) координатах имеют вид

$$\xi^\alpha = x^\alpha(\mathscr{B}) - x^\alpha(\mathscr{A})$$

(ср. дополнение 1.1). Тогда квадрат длины вектора $\mathbf{u}_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$, или, что то же самое, квадрат расстояния от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, должен составлять (ср. выше I,Б и II, Б)



$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \begin{cases} (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \text{ на яблоке,} \\ -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \\ \text{в пространстве-времени.} \end{cases}$$

Следовательно, компоненты метрики равны

$g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, т. е. $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ на яблоке в локально эвклидовых координатах;

$g_{00} = -1$, $g_{0k} = 0$, $g_{ik} = \delta_{ik}$ в пространстве-времени в локально лоренцевых координатах.

Эти специфические компоненты метрики в локально лоренцевых координатах здесь и ниже обозначаются посредством $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ или $\eta_{\alpha\beta}$ по аналогии

с символом Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$. В матричном обозначении они имеют вид

$$\| g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \| = \| \eta_{\alpha\beta} \| = \begin{array}{c|c} & \beta \longrightarrow \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \hline \alpha \downarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

§ 1.5. ВРЕМЯ

Время определено таким образом, чтобы движение выглядело простым.

Время бодрствует, когда все кругом спит.
Время стоит не шелохнувшись, когда все кругом рушится.
Время видит конец всего, но ему нет конца.
Есть, было и будет — дети времени.

«МАХАБХАРАТА» (400 г. н. э.)

По отношению к локально лоренцевой системе отсчета свободная частица «движется по прямой линии с постоянной скоростью». Что значит «по прямой линии», достаточно хорошо пояснено на модели инерциальной системы отсчета, приведенной на фиг. 1.7. Но где проявляется «постоянная скорость»? И где вообще проявляется «скорость»? На фиг. 1.7 совсем нет часов!

В более детально разработанной модели лоренцевой системы отсчета должны быть не только отверстия, как на фиг. 1.7, но и задвижки на каждом отверстии, приводимые в действие часовым механизмом. Снаряд попадет в цель лишь в том случае, если он: 1) пролетит по нужной траектории в пространстве и 2) проскочит отверстие в нужный интервал времени («окно во времени»). Но прежде необходимо дать определение времени. Время определяется таким образом, чтобы движение выглядело простым!

Временна́я координата локально лоренцевой системы отсчета определяется таким образом, чтобы движение выглядело простым

Нет такой стандартной меры времени, которая нашла бы более широкое применение, чем сутки — время от одного полудня до другого. Но стоит принять их в качестве эталона, как тотчас обнаруживается, что любые хорошие часы расходятся с ними по следующей простой причине. Земля вращается вокруг своей оси и, кроме того, совершает орбитальное движение вокруг Солнца. Движение Солнца по небосводу является результатом не одного какого-нибудь из этих движений, а их обоих в совокупности, хотя они и сильно различаются в количественном отношении. Угловая скорость быстрого вращения Земли вокруг своей оси (приблизительно 366,25 оборота в год) постоянна с уди-

вительной степенью точности. Совсем другое дело — кажущаяся угловая скорость вращения Солнца вокруг центра Земли (один оборот в год). Она превышает среднее значение на 2%, когда Земля при своем движении по орбите (эксцентриситет 0,017) оказывается на 1% ближе к Солнцу, чем среднее удаление (закон Кеплера), и на 2% меньше среднего значения, когда удаление Земли от Солнца на 1% превышает среднее. В первом случае мгновенная скорость вращения Солнца на небосводе, выраженная в оборотах в год, приблизительно составляет

$$366{,}25 - (1 + 0{,}02);$$

во втором случае она составляет

$$366{,}25 - (1 - 0{,}02).$$

Положив, что «средние солнечные сутки» содержат $24 \times 3600 = 86\,400$ эталонных секунд, мы видим, что, когда расстояние от Земли до Солнца на 1% меньше (или больше) среднего значения, число эталонных секунд от одного полудня до другого больше (или меньше) нормального значения на

$$\frac{0{,}02 \text{ (перепад в оборотах за год)}}{365{,}25 \text{ (среднее число оборотов в год)}} 86\,400 \text{ с} \approx 4{,}7 \text{ с}.$$

Все сказанное выше относится к учету времени, протекающего от полудня до полудня. Ясно, что эталон времени, который так сильно меняется от месяца к месяцу, недопустим. Если его принять, то и скорость света будет меняться от месяца к месяцу!

Такое неравномерное изменение, как только мы узнаем о нем (а о нем знали уже в древности), заставляет нас отказаться от солнечных суток в качестве эталона времени; эти сутки вовсе не приводят к тому, что движение выглядит простым. Попробуем установить новый эталон, основанный только на вращении Земли вокруг своей оси и исключающий ее движение вокруг Солнца: сидерические сутки — время, за которое звезда из зенита, совершив полный оборот на небосводе, снова возвращается в зенит. Прекрасно! Или, точнее, прекрасно до тех пор, пока точность наших измерений не позволит нам заметить изменения в самой скорости вращения Земли вокруг своей оси. Что же это за часы, которые оказались точнее, чем собственное вращение Земли? Законы небесной механики.

Сначала у Галлея [52], а затем и у других, включая Канта [53], возникло подозрение, что что-то неладно, так как предсказания теории тяготения Ньютона относительно того, где на Земле должны наблюдаться полные солнечные затмения, сделанные на основе имеющегося тогда эталона времени, явно расходились с тем, где древние греки и римляне действительно зарегистрировали эти затмения в нужное время. Луна в пространстве отбрасывает движущуюся тень. В день солнечного затмения эта тень

прочерчивает по диску вращающейся Земли темную полосу, часто длиною в тысячи километров, но шириной, как правило, много меньше ста километров. Если у нас на столе есть вращающийся глобус, и вы хотите повернуть его так, чтобы тень падала на него правильно, то для этого надо провести тщательные расчеты и ответить на два основных вопроса: 1) где по отношению к Земле были расположены Луна и Солнце в каждый момент того дня в далеком прошлом, который вас интересует, и 2) на какой угол повернулась Земля с того момента до нынешнего положения. Возьмем в качестве примера затмение 14 января 484 г. н. э. (фиг. 1.8) и предположим, что на протяжении прошедших пятнадцати столетий Земля вращалась вокруг своей оси с той же угловой скоростью, как и в 1900 г. (астрономическая точка отсчета). Расчеты приводят к неверному результату. Нужно повернуть Землю назад на 30° (или сдвинуть Луну с того места, которое получается из расчетов, или сделать и то и другое), чтобы наблюдатель в Афинах попал в пределы темной полосы. Чтобы набрались эти 30° (или меньше, если эффект частично обусловлен медленным изменением момента количества движения Луны), Земля в прошлом должна была вращаться быстрее, чем сейчас. Положив, что расхождение в 30° в основном обусловлено замедлением вращения Земли (вытекающая отсюда скорость замедления согласуется с данными, полученными с помощью современных атомных часов), и предполагая, что скорость замедления за минувший срок не изменилась (поправка к угловой скорости пропорциональна первой степени прошедшего времени; поправка к самому углу пропорциональна квадрату этого времени), можно, зная поправку

30°, или 2 часа, 1500 лет назад,

оценить поправки для более близкой эпохи:

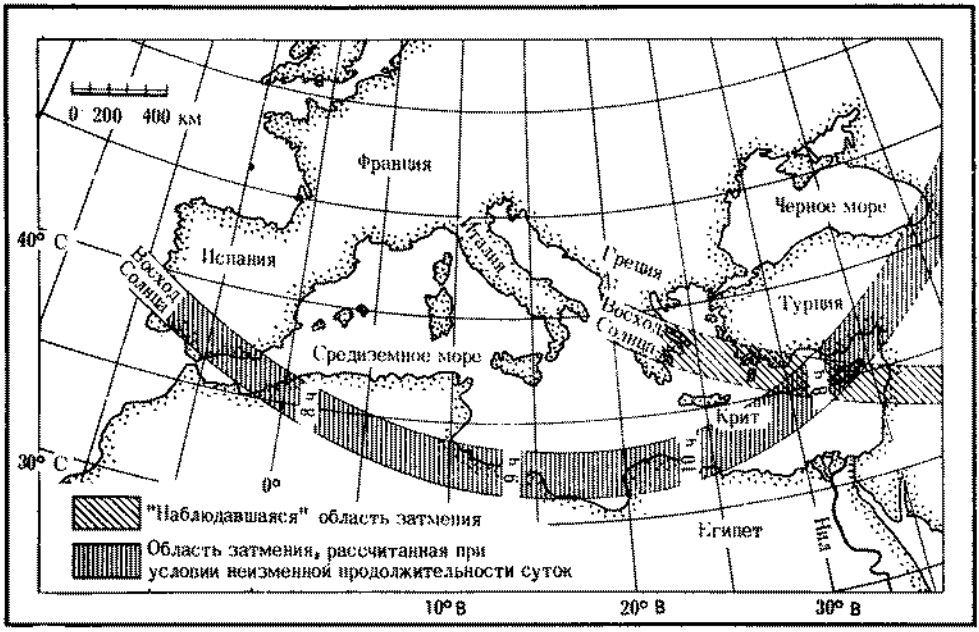
$30°/10^2$, или 1,2 мин, 150 лет назад,

$30°/10^4$, или 0,8 с, 15 лет назад.

Таким образом, мы видим, что вращение Земли не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к эталону времени, и на его место приходит орбитальное движение небесных тел, дающее лучший эталон времени, который позволяет нам сделать еще один шаг на пути к тому, чтобы «движение выглядело простым». В наши дни астрономическое время в свою очередь вытеснено атомным временем, играющим роль эталонной единицы измерения (см. дополнение 1.4 «Время сегодня»).

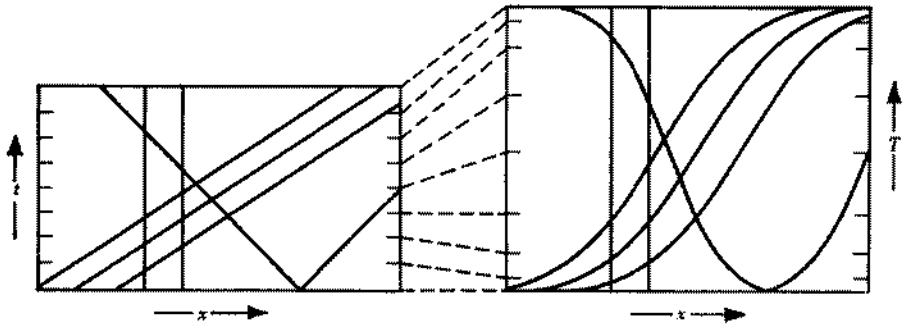
Наличие хороших часов приводит к тому, что траектории свободных частиц в пространстве-времени являются прямыми

Чтобы лучше разобраться в том, как определяется время, рассмотрим плохие часы. Пусть t — время по «хорошим» часам (временная координата в локально инерциальной системе отсчета); оно приводит к тому, что траектории свободных частиц в локальной области пространства-времени являются прямыми. Пусть $T(t)$ — показания «плохих» часов; они приводят к тому, что мировые линии свободных частиц в той же локальной области простран-



ФИГ. 1.8.
Рассчитанная область полного солнечного затмения 14 января 484 г. н. э. (слева; в расчетах не учтено замедление вращения Земли вокруг своей оси, угловая скорость вращения принята равной тому значению, которое она имела в 1900 г.) сравнивается с той же областью, смещенной настолько, чтобы Афины попали в центр затмения (при восходе Солнца) [величина смещения очень близка к 30°; при расчетах было принято, что скорость замедления составляет 32,75 угловой секунды/(столетие)^2]. Это «несомненно, наиболее достоверное из всех затмений в древности на территории Европы», согласно д-ру Стефенсону из Отделения геофизики и физики планет Университета в Ньюкасле-на-Тайне, любезно подготовившему этот рисунок специально для нашей книги. Он прислал также отрывок из первой греческой биографии Прокла из Афин (умер в Афинах в 485 г. н. э.), написанной Маринусом из Неаполя, в котором говорится: «Не обошлось и без предзнаменований в год, предшествовавший его смерти; например, наблюдалось такое сильное затмение Солнца, что казалось, будто ночь спустилась среди дня. Ибо наступила глубокая темнота и даже звезды появились на небе. Это случилось в восточной части неба, когда Солнце находилось в созвездии Козерога» (из книги [54]).

Дают ли эти 30° для данного затмения и соответствующие значения для других затмений «истинную» поправку? Слово «истинный»— трудное слово. Как правило, много лет отделяет одно полное солнечное затмение от другого в районе Средиземного моря. Жизнь в различных провинциях греческого и римского древнего мира носила далеко не мирный и установившийся характер, а о том, чтобы вести постоянные наблюдения за затмениями и регистрировать их для потомков, не могло быть и речи. К сожалению, записи прошлого крайне отрывочны; к тому же, что еще обиднее, некоторые недобросовестные «исследователи» в недалеком прошлом были готовы поспешно связать те или иные исторические события с теми или иными затмениями, полученными из расчетов. К счастью, теперь имеется обширная литература, как астрономическая, так и историческая, посвященная вековому замедлению вращения Земли и написанная в лучших традициях критического подхода в науке. Кроме книг Отто Нейгебауэра [55], Манка и Макдональда [56], работы Куротта [57] и перечисленных в библиографиях к ним, следует указать ряд других ключевых работ. (Авторы благодарны профессору Отто Нейгебауэру, который указал нам на них.) Древние заметки, а также расчеты областей затмений в далеком прошлом приведены в работах [58—60]; атлас рассчитанных областей затмения дан в книгах [61, 62]; критический анализ доказательств содержится в работах [63—65]. Данное затмение, а не какое-либо другое, было выбрано лишь потому, что историческая запись о нем наиболее достоверна.



ФИГ. 1.9.
Хорошие часы (слева) сравниваются с плохими (справа) с помощью той картины движения, которую они дают для одних и тех же свободных частиц в одной и той же области пространства-времени. Мировые линии справа производят такое впечатление, будто на частицы действуют какие-то силы. Хорошее определение времени позволяет избавиться от этих фиктивных сил. Штриховыми линиями соединены соответствующие моменты в двух временных шкалах.

ства-времени искривлены (фиг. 1.9). Старое значение ускорения, записанное на языке нового («плохого») времени, принимает вид

$$0=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\frac{dx}{dT}\right)=\frac{d^2T}{dt^2}\frac{dx}{dT}+\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\frac{d^2x}{dT^2}.$$

Для объяснения кажущегося ускорения частиц физик, пользующийся новым временем, вводит силу, которая, как мы знаем, является фиктивной:

$$F_x=m\frac{d^2x}{dT^2}=-m\frac{\left(\frac{dx}{dT}\right)\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dT}{dt}\right)^2} \tag{1.2}$$

Из этого примера с «плохим» временем становится понятным, что Ньютон думал о «хорошем» времени, когда выдвинул принцип: «Время течет равномерно» ($d^2T/dt^2=0$). Время определяется таким образом, чтобы движение выглядело простым!

Принцип равномерности сам по себе не позволяет определить шкалу временной переменной. Величина $T=at+b$ удовлетворяет всем требованиям точно так же, как и само t. На протяжении всей истории службы времени по-разному выбирались как единица измерения, так и начало отсчета. В каждом таком случае нужны были какие-то действия со стороны человека, чтобы придать силу этому выбору: от указа фараона до коммюнике заседания специальной комиссии. В этой книге за единицу времени принимается время, за которое свет проходит расстояние в один сантиметр.

Выбранная нами единица измерения времени: геометродинамический сантиметр

При этом пространственноподобные и времениподобные интервалы измеряются в одних и тех же геометрических единицах — в сантиметрах. Любое другое решение усложнило бы анализ того, что просто по своей природе. Любой другой выбор был бы неразумен в свете слов Минковского: «Отныне пространство само по себе и время само по себе неизбежно будут терять свое значение и постепенно превратятся в призраки — индивидуально существовать будет лишь некое их единство».

Время мы можем измерять теперь с большей точностью, чем расстояние. Является ли это доводом против того, чтобы принять в качестве единицы измерения сантиметр? Вовсе нет, если определить сантиметр следующим образом: *геометродинамический стандартный сантиметр — это*

$$1/(9{,}460546 \cdot 10^{17}) \tag{1.3}$$

часть интервала между двумя «эффективными точками равноденствия», ограничивающими тропический год 1900,0. Тропический год в момент 1900,0 уже получил международное признание в качестве эталонного интервала времени, поскольку он четко определен, и его длительность известна с высокой точностью. Комитеты по стандартам постановили считать *по определению*, что в этом эталонном интервале содержится 31 556 925,974 *эфемеридной секунды*. Если бы скорость света была известна с абсолютной точностью, то комитеты по стандартам тут же определили бы и число сантиметров в эталонном интервале. Но она известна лишь с точностью до шестого десятичного знака включительно. Более того, *международный сантиметр* определен в длинах волн красной линии Kr^{86} с точностью только до девятого знака (16 507,6373 длины волны), тогда как эталонная секунда известна до одиннадцатого знака. Чтобы было соответствие с эталонной секундой, мы определяем эталонный геометродинамический сантиметр так, что в эталонном тропическом году в момент 1900,0 содержится

$$9{,}4605460000 \cdot 10^{17}$$

таких сантиметров, допуская при этом некоторый произвол. Скорость света при этом равна точно

$$\frac{9{,}4605460000 \cdot 10^{17}}{31\,556\,925{,}974} \text{ геометродинамических см/с.} \tag{1.4}$$

Это значение согласуется со значением скорости света, известным в 1967 г. в единицах «международный см/с»:

$$29\,979\,300\,000 \pm 30\,000 \text{ международных см/с.}$$

Последующие измерения [30] вносят лишь незначительные поправки в предыдущие рассуждения, оформленные к 1967 г., и не приводят к принципиальным изменениям.

Дополнение 1.4. ВРЕМЯ СЕГОДНЯ

До 1956 г. секунда была определена как 1/(86 400) часть средних солнечных суток.

С 1956 г. до 1967 г. под «секундой» подразумевали эфемеридную секунду, определенную как 1/(31 556 925,9747) часть тропического года в 00 ч 00 мин 00 с 31 декабря 1899 г.

С 1967 г. в качестве эталонной секунды была принята секунда системы СИ (Международной системы единиц), которая по определению равна 9 192 631 770 периодам невозбужденного перехода в сантиметровом диапазоне между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния Cs^{133}.

Подобно той эволюции, которую претерпела единица измерения временного *интервала*, эволюция временной *координаты* также прошла через несколько стадий.

Всемирное время ВВ0 основано на подсчете дней, как они следовали друг за другом; другими словами, оно основано на реальном вращении Земли вокруг своей оси; исторически возникло на основании среднего солнечного времени (положение Солнца исправляется «уравнением времени», учитывающим более быстрое движение Земли по орбите, когда она находится ближе к Солнцу, и более медленное — когда дальше), определенного в Гринвичской обсерватории.

ВВ1 — «навигационная шкала времени» — то же самое время, но исправленное на колебания Земли относительно оси вращения ($\Delta t \sim 0{,}05$ с).

ВВ2 — то же самое, что и ВВ1, но исправленное на периодические флуктуации неизвестного происхождения с периодами в полгода и в год ($\Delta t \sim 0{,}05$ с; измеряется с точностью до 3 мс в день).

Эфемеридное время (ЭВ) (его определение дается исходя из теории гравитации с помощью астрономических наблюдений и расчетов) существенным образом опирается на орбитальное движение Земли вокруг Солнца. «Неопределенности в измерениях ограничивают точность эфемеридного времени величиной порядка 0,05 с для среднего, выведенного за девять лет».

Координированное всемирное время (ВВК) передается по радио. Оно принято в международном масштабе в феврале 1971 г. и вошло в силу с 1 января 1972 г. Ход часов контролируется атомными часами и поддерживается на возможно более

Время остановлено на секунду

30 июня в полночь время по всему миру остановится на одну секунду. Все радиосигналы точного времени вставят «поправочную секунду», чтобы привести среднее время по Гринвичу в соответствие с ежедневной потерей Землей трех тысячных долей секунды.

В полночь по Гринвичскому среднему времени (1 ч 1 июля по Английскому летнему времени) из Королевской Гринвичской обсерватории в радиостудию будут переданы шесть коротких сигналов, отмечающих секунды с 55 по 60 включительно, за которыми в следующую секунду последует более длинный, отмечающий начало новой минуты.

«ТАЙМС»
21 июня 1972 г.

равномерном уровне в течение года (атомное время измеряется с точностью до ~0,1 мкс/мин, для совокупности таких часов отклонение составляет 0,1 мкс/сутки), но изредка в него вносят изменения, добавляя или пропуская так называемую поправочную секунду, чтобы ВВК никогда не отличалось более чем на 0,7 с от навигационной шкалы времени ВВ1.

Сведения, изложенные выше, взяты из работы [31]. Материал, представленный ниже, заимствован из таблицы (неофициальной в момент получения), любезно предоставленной Отделом времени и частоты Национального бюро стандартов США в Боулдере, штат Колорадо.

Точность, с которой некоторые, хорошо известные виды часов могут отсчитывать время:

Камертонные наручные часы (1960 г.)

1 мин/месяц.

Часы с кварцевым кристаллом (1921—1930 гг.)

1 мс/сутки, 1 с/год.

Наручные часы с кварцевым кристаллом (1971 г.)

0,2 с/2 месяца, 1 с/год.

Пучок атомов цезия (атомный резонанс Cs^{133}) (1952—1955 гг.)

0,1 мкс/сутки, 0,5 мкс/месяц.

Рубидиевый газовый элемент (резонанс Rb^{87}) (1957 г.)

0,1 мкс/сутки, 1—5 мкс/месяц.

Водородный мазер (1960 г.)

0,01 мкс/2 часа, 0,1 мкс/сутки.

Лазер, стабилизированный по частоте с помощью поглощающей ячейки с метаном (1969 г.)

0,01 мкс/100 с.

§ 1.6. КРИВИЗНА

Гравитация, казалось бы, исчезла. Геометрия пространства-времени повсюду локально лоренцева. А в лоренцевой геометрии частицы движутся по прямым линиям с постоянной скоростью. Где же при этом можно обнаружить какое-либо гравитационное отклонение от прямолинейного движения? Чтобы получить ответ, обратимся снова к примеру с яблоком (фиг. 1.1). Просмотрите еще раз пути движения муравьев по геодезическим на поверхности яблока. Обратите внимание, как две близкие геодезические, первоначально выходящие из одной точки в разных направлениях, затем опять сходятся. Какой аналог этому существует в реальном физическом мире? В чем заключается аналогичная концепция, согласующаяся с утверждением Эйнштейна, что физика проста

лишь при локальном анализе? Не обращайте внимания на расстояние между космическим кораблем и Землей. Обратите внимание на расстояние между двумя соседними космическими кораблями! Или, чтобы не возник вопрос о взаимном притяжении кораблей, будем наблюдать за двумя близкими пробными частицами на орбите вокруг Земли. А чтобы нас в этой ситуации не отвлекал нелокальный объект (Земля), будем проводить исследование внутри космического корабля, также находящегося на орбите вокруг Земли. Но мы уже один раз рассматривали эту область в качестве локально инерциальной системы отсчета! Может ли в ней проявиться какая-либо гравитация? Нет. По отношению к космическому кораблю и, следовательно, по отношению друг к другу две пробные частицы движутся прямолинейно с постоянной скоростью, насколько нам позволяет судить предполагаемая точность измерений (см. дополнение 1.5 «Как проверить, является ли пространство-время плоским?»). Вот тут-то и появляется основная причина недоразумения: точность измерения. Будем увеличивать ее до тех пор, пока не станет заметным малое относительное ускорение, удаляющее пробные частицы друг от друга в случае, когда они расположены вдоль одного радиуса, проходящего через центр Земли, и сближающее их, когда они расположены вдоль линии, перпендикулярной этому радиусу. На ньютоновском языке причиной этих ускорений является приливное воздействие со стороны Земли. Однако наблюдатель в космическом корабле не видит никакой Земли. И, следуя Эйнштейну, он знает, что движение надо анализировать локально. Представим удаление произвольной пробной частицы от некоторой начальной пробной частицы в виде вектора ξ^k ($k = 1, 2, 3$; компоненты, измеренные в локально лоренцевой системе). Тогда из ньютоновской физики мы знаем, как найти ускорение какой-либо пробной частицы относительно начальной:

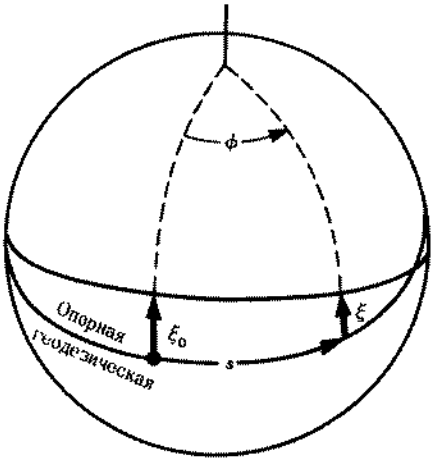
Гравитация проявляется в относительном ускорении соседних пробных частиц

$$\frac{d^2\xi^x}{dt^2} = -\frac{Gm_{\text{обычн}}}{c^2r^3}\,\xi^x,$$

$$\frac{d^2\xi^y}{dt^2} = -\frac{Gm_{\text{обычн}}}{c^2r^3}\,\xi^y, \qquad (1.5)$$

$$\frac{d^2\xi^z}{dt^2} = \frac{2Gm_{\text{обычн}}}{c^2r^3}\,\xi^z.$$

Доказательство: В теории Ньютона ускорение отдельной частицы, направленное к центру Земли, составляет $Gm_{\text{обычн}}/r^2$ (время измеряется в обычных единицах), где $G = 6{,}670 \cdot 10^{-8}$ см^3/г·с^2 — ньютоновская постоянная тяготения, а $m_{\text{обычн}}$ — масса Земли в обычных единицах — граммах. Если время измеряется в геометрических единицах (время прохождения светом 1 см), то ускорение равно $Gm_{\text{обычн}}/c^2r^2$. Когда две частицы на расстоянии ξ друг от друга находятся в плоскости, перпендикулярной r, угол между векторами их ускорений, направленных вниз, составляет ξ/r.



ФИГ. 1.10.
Кривизна, проявляющаяся в «ускорении разделения» двух близких геодезических. Две геодезические, первоначально параллельные и отстоящие друг от друга на ξ_0 («отклонение геодезических»), на некотором удалении s уже не будут параллельными. Расстояние между ними равно $\xi = \xi_0 \cos \phi = \xi_0 \cos (s/a)$, где a — радиус сферы. Это расстояние удовлетворяет простейшему уравнению гармонических колебаний $d^2\xi/ds^2 + (1/a^2)\,\xi = 0$ («уравнение отклонения геодезических»).

Направление разделяющего вектора ξ полностью определено условием ортогональности к опорной геодезической. Поэтому в уравнении отклонения геодезических не требуется и не используется никаких сведений о направлении вектора ξ: в уравнении фигурируют лишь величина ξ вектора ξ и лишь величина, а не направление, относительного ускорения.

Следовательно, относительное ускорение частиц как раз равно написанному выше значению. Если же частицы расположены вдоль одного радиуса, то относительное ускорение равно разности ньютоновских значений при r и $r + \xi$ (для нахождения которой надо ξ умножить на d/dr), что и требовалось доказать. В заключение отметим, что «локальное ускорение приливного воздействия» теории тяготения Ньютона приводит к локальному описанию гравитации, которое, согласно Эйнштейну, и требуется отыскать.

Причиной относительного ускорения является кривизна

Что общего между ускорением приливного воздействия и кривизной? (См. дополнение 1.6.) Взглянем еще раз на яблоко, или, лучше, на сферу радиуса a (фиг. 1.10). Расстояние между двумя близкими геодезическими удовлетворяет «уравнению отклонения геодезических»

$$d^2\xi/ds^2 + R\xi = 0. \tag{1.6}$$

Здесь $R = 1/a^2$ — так называемая гауссова кривизна поверхности. На поверхности яблока выполняется то же самое уравнение с той лишь разницей, что кривизна R меняется от точки к точке.

ФИГ. 1.11.
Вектор ξ, разделяющий две геодезические в кривом трехмерном многообразии. Здесь ξ может не только изменять свою длину от точки к точке, но еще и вращаться с переменной скоростью вокруг опорной геодезической. Следовательно, наряду с величиной относительное ускорение геодезических должно характеризоваться также и направлением: оно должно быть вектором $D^2\xi/ds^2$.

В пространстве, размерность которого больше двух, выполняется уравнение, имеющее в общем такую же форму, но с некоторыми отличиями. Для двух измерений *направление* ускорения одной геодезической по отношению к близлежащей другой, «опорной» геодезической задается однозначным образом требованием, чтобы вектор ξ, их разделяющий, был перпендикулярен к опорной геодезической (фиг. 1.10). Иначе обстоит дело в случае трех или более измерений. Здесь ξ может вращаться вокруг опорной геодезической, оставаясь перпендикулярным ей (фиг. 1.11). Таким образом, чтобы относительное ускорение было определено однозначно, необходимо задать не только его величину, но и направление.

Тогда относительное ускорение в случае трех или более измерений является вектором. Обозначим его $D^2\xi/ds^2$, а четыре его компоненты обозначим $D^2\xi^\alpha/ds^2$. Но почему D, а не d? Потому что мы пользуемся абсолютно произвольной системой координат (ср. § 1.2). Вследствие кручения и поворота координатных линий компоненты ξ^α вектора ξ могут меняться от точки к точке даже тогда, когда сам вектор ξ остается неизменным. Следовательно, ускорения компонент $d^2\xi^\alpha/ds^2$ в общем случае не равны компонентам $D^2\xi^\alpha/ds^2$ ускорения!

Как же тогда определять компоненты $D^2\xi^\alpha/ds^2$ относительного ускорения в искривленном пространстве-времени? Из уравнения отклонения геодезических (1.6), которое теперь имеет более сложный вид. В дифференциальной геометрии (часть III данной книги) вводится геометрический объект, называемый *тензором кривизны Римана* **R**. Тензор **R** является аналогом гауссовой кривизны R поверхности нашего яблока в случае более высокой размерности многообразия. Тензор **R** — математический объект, содержащий в себе все сведения об изгибах и деформациях пространства-времени. Посредством **R** эти изгибы и деформации (кривизна пространства-времени) проявляются в относительном ускорении геодезических.

Кривизна характеризуется тензором Римана

Тензор **R**, как и метрический тензор **g** в дополнении 1.3, можно представить себе, как совокупность «машин», по одной на каждое событие в пространстве-времени. У каждой машины имеется три

входных канала, куда «вводятся» три вектора:

вход 1 вход 2 вход 3

$$\mathbf{R}(\quad,\quad,\quad).$$

Выберем в качестве опорной геодезическую (мировую линию свободной частицы), проходящую через событие $\mathcal{Q}$, и обозначим единичный вектор, касательный к ней (4-скорость частицы), через

$$\mathbf{u} = \mathbf{dx}/d\tau; \text{ компоненты } u^\alpha = dx^\alpha/d\tau. \tag{1.7}$$

Рассмотрим еще одну геодезическую, близкую к опорной, и обозначим разделяющий их вектор, перпендикулярный к опорной геодезической, через $\boldsymbol{\xi}$. Введем $\mathbf{u}$ в первый входной канал $\mathbf{R}$, взятый в $\mathcal{Q}$, $\boldsymbol{\xi}$ — во второй и $\mathbf{u}$ — в третий. $\mathbf{R}$ начнет «работать» и через некоторое время произведет новый вектор

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}).$$

Тензор Римана в уравнении отклонения геодезических приводит к относительным ускорениям

Уравнение отклонения геодезических гласит, что этот новый вектор равен относительному ускорению двух геодезических, взятому с обратным знаком:

$$D^2\boldsymbol{\xi}/d\tau^2 + \mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}) = 0. \tag{1.8}$$

Тензор Римана, подобно метрическому тензору (дополнение 1.3) и всем другим тензорам, является линейной машиной. Вектор, который он «производит», является линейной функцией каждого из вводимых в него векторов:

$$\mathbf{R}(2\mathbf{u}, a\mathbf{w} + b\mathbf{v}, 3\mathbf{r}) = \\ = 2 \times a \times 3\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{r}) + 2 \times b \times 3\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}). \tag{1.9}$$

Следовательно, в любой системе координат компоненты вектора на выходе можно представить как «трилинейную функцию» компонент векторов на входе:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \Leftrightarrow r^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta v^\gamma w^\delta. \tag{1.10}$$

(Здесь также подразумевается суммирование по индексам β, γ, δ; ср. дополнение 1.1.) $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ чисел $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ называются «компонентами тензора Римана в данной системе координат». Выписанное в компонентах, уравнение отклонения геодезических принимает вид

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\gamma \frac{dx^\delta}{d\tau} = 0. \tag{1.8'}$$

Уравнение отклонения геодезических аналогично уравнению для силы Лоренца

В геометрической теории тяготения Эйнштейна действие геометрии на материю находит полное выражение в уравнении отклонения геодезических. Это уравнение в физике гравитации имеет такое же значение, как и уравнение для силы Лоренца

$$\frac{D^2x^\alpha}{d\tau^2} - \frac{e}{m} F^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{1.11}$$

в теории электромагнетизма. См. дополнение 1.7.

Геометрические единицы

В пространстве-времени кривизна измеряется в тех же единицах см$^{-2}$, что и на поверхности яблока. Эти единицы выступают в наиболее явном виде тогда, когда масса выражается в «геометрических единицах»:

$$m\ (\text{см}) = (G/c^2)\ m_{\text{обычн}}(\text{г}) = (0{,}742 \cdot 10^{-28}\ \text{см/г})\, m_{\text{обычн}}(\text{г}). \quad (1.12)$$

Такое обращение граммов в сантиметры с помощью соотношения

$$G/c^2 = 0{,}742 \cdot 10^{-28}\ \text{см/г}$$

полностью эквивалентно обращению секунд в сантиметры с помощью соотношения

$$c = \frac{9{,}4605460000 \cdot 10^{17}\ \text{см}}{31\,556\,925{,}974\ \text{с}}$$

(см. конец § 1.5). Масса Солнца, в обычных единицах равная $m_{\text{обычн}} = 1{,}989 \cdot 10^{33}$ г, в геометрических единицах составляет $m = 1{,}477$ км. Более подробно см. в дополнении 1.8.

Оценка компонент тензора Римана по относительным ускорениям медленно движущихся частиц

Используя геометрические единицы и ньютоновскую теорию тяготения, легко оценить в окрестности Земли и Солнца девять компонент риманова тензора кривизны, которые представляют наибольший интерес. Делается это аналогично тому, как напряженность электрического поля определяется путем измерения ускорения пробной частицы, движущейся с малой скоростью. Рассмотрим расстояние между геодезическими двух близких пробных частиц, движущихся с малой скоростью ($v \ll c$) на расстоянии r от Земли или Солнца. В общепринятой почти инерциальной системе координат небесной механики всеми компонентами 4-скорости начальной пробной частицы за исключением $dx^0/d\tau = 1$ можно пренебречь. Пространственные компоненты уравнения отклонения геодезических имеют вид

$$d^2\xi^k/d\tau^2 + R^k{}_{0j0}\xi^j = 0. \quad (1.13)$$

Сравнивая с выводами ньютоновской теории, сформулированными в виде уравнений (1.5), получаем следующую информацию о кривизне пространства-времени вблизи центра масс:

$$\begin{Vmatrix} R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m/r^3 & 0 & 0 \\ 0 & m/r^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2m/r^3 \end{Vmatrix} \quad (1.14)$$

(в единицах см$^{-2}$). Здесь и ниже $\hat{x}$, $\hat{y}$ и т. д.— компоненты вектора или тензора в локально лоренцевой системе отсчета («физические компоненты» в отличие от компонент в общей системе координат). Значения других компонент кривизны определяются из теории Эйнштейна (например, $R^{\hat{x}}{}_{\hat{z}\hat{x}\hat{z}} = -m/r^3$); однако для многих приложений теории гравитации принципиальное значение имеют

лишь девять членов, выписанных выше. Они аналогичны компонентам электрического поля в лоренцевом уравнении движения. Многие из членов, которые мы не оценили, аналогичны компонентам магнитного поля: в обычных ситуациях они малы, если только источник не движется с большой скоростью.

На этом заканчивается обзор того, как геометрия действует на материю («действие кривизны яблока, приводящее к пересечению геодезических»— особенно сильное около углубления в верхней части яблока, точно так же, как кривизна пространства-времени особенно велика вблизи центра гравитационного притяжения). Теперь обратимся к воздействию материи на геометрию («действие яблочного черенка, приводящее к появлению углубления»)!

Дополнение 1.5. КАК ПРОВЕРИТЬ, ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ПЛОСКИМ?

1. Укажите протяженность в пространстве L (в сантиметрах или метрах) и протяженность во времени T (в сантиметрах или метрах, которые за это время проходит свет) исследуемой области.

2. Укажите точность $\delta\xi$, с которой вы можете измерять расстояние между пробными частицами в этой области.

3. Проследите за движением в этой области пространства-времени пробных частиц, мировые линии которых вначале были параллельны.

4. Если мировые линии остаются параллельными с точностью $\delta\xi$ для всех направлений движения, то говорят, что «в ограниченной таким образом области с указанной степенью точности пространство-время является плоским».

ПРИМЕР. Рассмотрим область пространства у поверхности Земли размером 100 м × 100 м × 100 м (протяженность в пространстве) в промежутке времени, за которое свет проходит 10^9 м ($T_{\text{обычн}} \approx 3$ с). Масса Земли $m_{\text{обычн}} = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ г, $m = (0{,}742 \cdot 10^{-28}$ см/г$) \cdot (5{,}98 \cdot 10^{27}$ г$) = 0{,}444$ см [см. выражение (1.12)]. Ускорение приливного воздействия $R^z{}_{0z0}$ (относительное ускорение в направлении оси z двух пробных частиц, первоначально покоившихся на расстоянии 1 см по вертикали друг от друга) составляет

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{m}{r^2}\right) = -\frac{2m}{r^3} = -0{,}888 \text{ см}/(6{,}37 \cdot 10^8 \text{ см}^3) = -3{,}44 \cdot 10^{-27} \text{ см}^{-2}$$

(см относительного смещения за время, за которое свет пройдет 1 см, на время, за которое свет пройдет 1 см, на см расстояния по вертикали). Две пробные частицы на расстоянии $\xi^z = 10^4$ см друг от друга по вертикали за время $t = 10^{11}$ см (разницей между временем и собственным временем для столь медленных пробных частиц можно пренебречь) смещаются друг относительно друга на

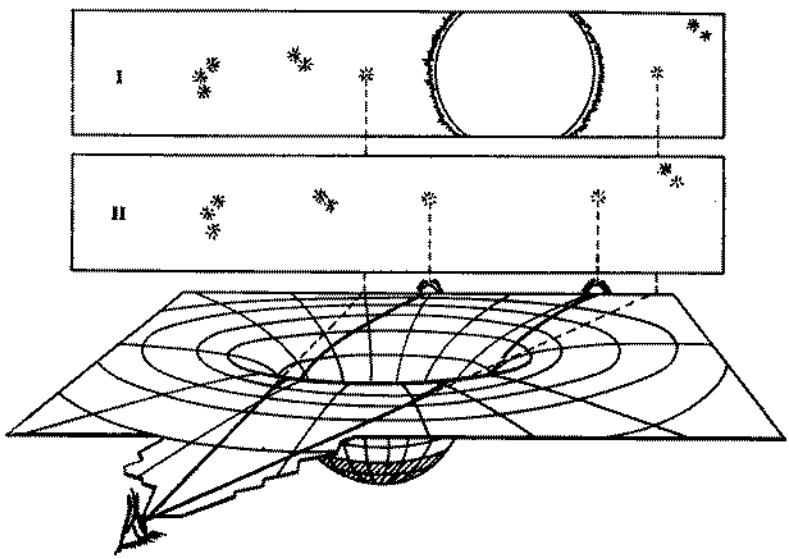
$$\delta\xi^z = -\frac{1}{2} R^z{}_{0z0} t^2 \xi^z = 1{,}72 \cdot 10^{-27} \text{ см}^{-2} \, (10^{11} \text{ см})^2 \, 10^4 \text{ см} = 1{,}72 \text{ мм}.$$

(Для других направлений движения изменение относительного расстояния меньше.) Если минимальная неопределенность в расстоянии $\delta\xi$, которой можно достичь при измерениях на 100 м в пространстве, «хуже», чем приведенное зна-

чение (превышает 1,72 мм), то на данном уровне точности рассматриваемую область пространства-времени можно считать плоской. Если же неопределенность при измерениях «лучше» (меньше), чем 1,72 мм, то, чтобы прийти к области пространства-времени, которую на данном уровне точности можно считать плоской, необходимо ограничить рассмотрение меньшей областью в пространстве или более коротким промежутком времени, или и тем и другим.

Дополнение 1.6. КРИВИЗНА ЧЕГО?

На первый взгляд идея о том, что гравитация есть проявление кривизны пространства (А), кажется удивительно привлекательной, но уже на второй взгляд она

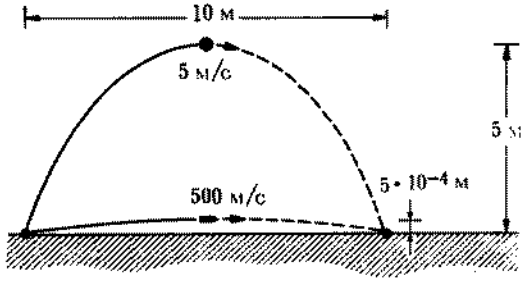


А. Искривление Солнцем световых лучей изображено как следствие кривизны пространства вблизи него. Луч света следует по геодезической, но там, где он распространяется, геометрия искривлена (в действительности свет распространяется в пространстве-времени, а не в пространстве; правильное отклонение в два раза превышает значение, получающееся из элементарной картины, которая здесь представлена). Отклонение обратно пропорционально угловому расстоянию между звездой и центром Солнца. О реальных отклонениях, наблюдаемых во время затмения, см. дополнение 40.1.

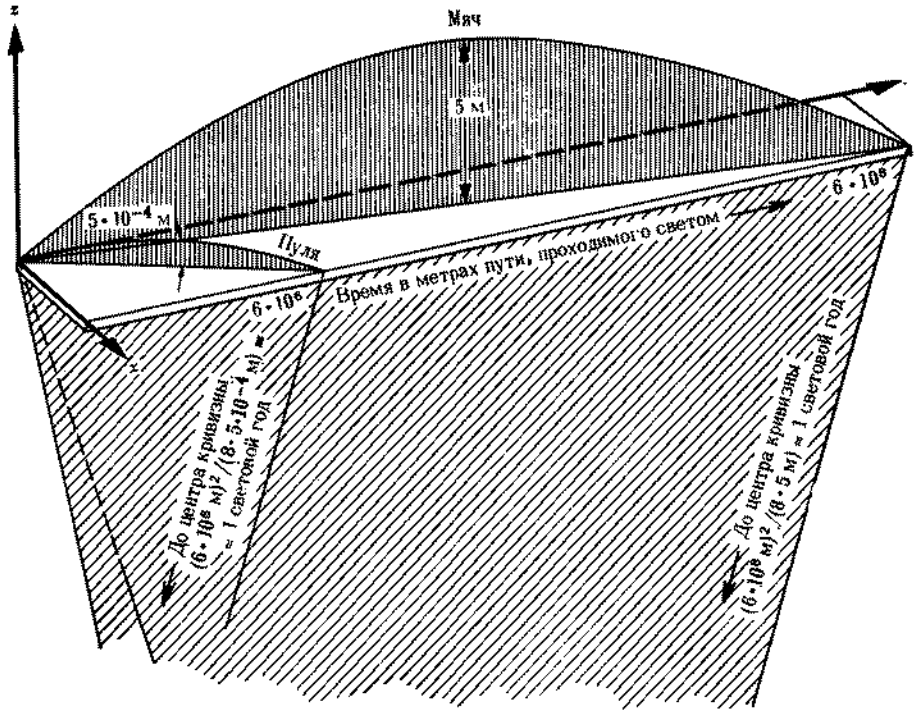
I. Фотография расположения звезд, когда Солнце (покрытое лунным диском во время затмения) занимает указанное положение.

II. Фотография расположения звезд, когда Солнце находится в другом месте.

кажется удивительно смешной (Б). Как может кривизна траекторий мяча и пули так сильно различаться, если она является следствием геометрии пространства? Не удивительно, что великий Риман не подарил человечеству геометрической теории тяготения. Да, в возрасте 28 лет (10 июня 1854 г.) он создал математический аппарат, с помощью которого можно дать определение кривизны и вычислить



Б. Траектории мяча и пули в пространстве при наблюдении в лаборатории имеют совершенно различные кривизны.



В. Траектории мяча и пули в пространстве-времени, измеренные в лаборатории, имеют кривизны одного порядка. Оценка кривизны траектории производится по формуле, справедливой для малых окружностей: (радиус) = = (горизонтальное расстояние)²/8(высота подъема).

ее (метрика и геометрия Римана). Да, он действительно провел последние дни перед смертью (в возрасте 40 лет) в работе над поисками единого подхода в теории электричества и тяготения. Но среди причин, помешавших ему найти решение и открыть ту связь, которая существует между тяготением и кривизной, главной была, безусловно, та, что он думал о пространстве и кривизне пространства, а не о пространстве-времени и кривизне пространства-времени. Чтобы сделать этот шаг вперед, потребовалось сорок лет, прошедших до создания специальной теории относительности (1905 г.— время и пространство равноправны), а затем еще десять лет (1915 г.— создание общей теории относительности). Нарисованные в пространстве-времени (B) траектории мяча и пули имеют сравнимую кривизну. В действительности, однако, ни одна из этих траекторий не имеет никакой кривизны. На рисунке B обе они выглядят искривленными лишь постольку, поскольку мы забываем о том, что пространство-время, в котором они лежат, само по себе искривлено — и искривлено ровно настолько, чтобы эти траектории были самыми прямыми линиями, какие вообще могут существовать («геодезическими»).

И если мы сначала чувствуем удовлетворение от того, что кривизна, причем кривизна пространства-времени, таким непосредственным образом выступает на передний план, то некоторое непродолжительное размышление на этот счет снова вселяет в нас тревогу. Кривизна по отношению к чему? Не по отношению же к лаборатории. Лаборатория, связанная с поверхностью Земли, отнюдь не является простейшей системой отсчета при серьезном рассмотрении проблемы. Во-первых, она не является лоренцевой системой. Во-вторых, уже само упоминание о Земле заставляет рассуждать в рамках теории тяготения, основанной на действии на расстоянии (расстояние от центра Земли до мяча или пули). Напротив, суть взглядов Эйнштейна состоит в том, что физика проста лишь при локальном анализе. А локальный взгляд на физику означает, что нужно сравнивать геодезическую одной пробной частицы с геодезическими других пробных частиц, движущихся 1) на близком расстоянии, 2) почти в том же направлении и 3) с близкими значениями скоростей. Тогда можно проследить за расстояниями между этими близкими пробными частицами и по изменению этих расстояний во втором порядке по времени, используя «уравнение отклонения геодезических» (1.8), судить о кривизне пространства-времени.

Дополнение 1.7. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ И УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ: СХОДСТВА И РАЗЛИЧИЯ

	Электромагнетизм [сила Лоренца, уравнение (1.11)]	Гравитация [уравнение отклонения геодезических (1.8′)]
Определено ли ускорение для одной частицы?	Да	Нет
Как определено ускорение?	Действительная мировая линия сравнивается с мировой линией незаряженной «начальной» пробной частицы, пролетающей через ту же точку с той же 4-скоростью	Уже незаряженная пробная частица, которая не может ускоряться по отношению к самой себе! Ускорение измеряется по отношению к близлежащей пробной частице, выбранной в качестве основы для сравнения

	Электромагнетизм [сила Лоренца, уравнение (1.11)]	Гравитация [уравнение отклонения геодезических (1.8′)]
Зависит ли ускорение от всех четырех компонент 4-скорости частицы?	Да	Да
Совпадает ли ускорение для всех пробных частиц, находящихся в одном и том же месте и имеющих одну и ту же 4-скорость?	Нет, оно пропорционально e/m	Да
Поле, генерирующее ускорение	Электромагнитное поле	Риманов тензор кривизны
Кажущееся число различных компонент генерирующего поля	$4 \times 4 = 16$	$4^4 = 256$
Действительное число компонент при учете симметрии тензора	6	**20**
Название наиболее известных из этих компонент	3 электрических 3 магнитных	6 компонент локального ньютонова ускорения приливного воздействия

Дополнение 1.8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ

На протяжении всей книги используются «геометрические единицы», в которых скорость света c, ньютонова гравитационная постоянная G и постоянная Больцмана k равны единице. Большое значение имеют следующие способы представления единицы:

$$1{,}0 = c = 2{,}997930\ldots \cdot 10^{10}\ \text{см/с},$$
$$1{,}0 = G/c^2 = 0{,}7425 \cdot 10^{-28}\ \text{см/г},$$
$$1{,}0 = G/c^4 = 0{,}826 \cdot 10^{-49}\ \text{см/эрг},$$
$$1{,}0 = Gk/c^4 = 1{,}140 \cdot 10^{-65}\ \text{см/К},$$
$$1{,}0 = c^2/G^{1/2} = 3{,}48 \cdot 10^{24}\ \text{см/Гс}^{-1}.$$

На единичный множитель, выраженный любым из этих способов, можно умножать любой член в любом уравнении, не нарушая при этом его справедливости. Таким образом, можно превращать единицы измерения из граммов в сантиметры, в секунды, в эрги.

Например:

$$\text{Масса Солнца} = M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{33}\ \text{г} = (1{,}989 \cdot 10^{33}\ \text{г}) \cdot (G/c^2) = 1{,}477 \cdot 10^{5}\ \text{см} = (1{,}989 \cdot 10^{33}) \cdot (c^2) = 1{,}788 \cdot 10^{54}\ \text{эрг}.$$

В данной книге в качестве стандартной единицы, в которой выражены все величины, используется сантиметр. Однако изредка употребляются обычные единицы; в таких случаях иногда (но не всегда) измеряемая величина снабжается индексом «обычн»:

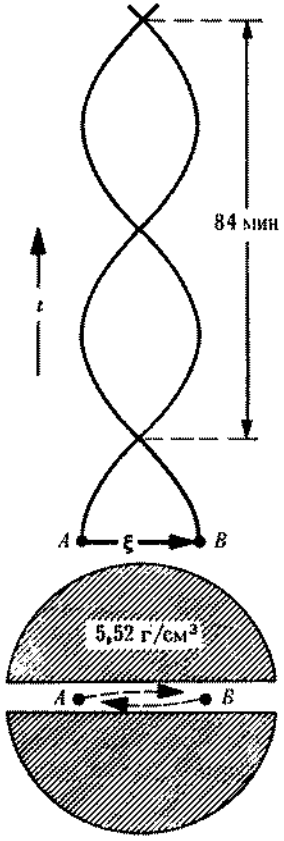
$$M_{\odot\text{обычн}} = 1{,}989 \cdot 10^{33}\ \text{г}.$$

§ 1.7. ВОЗДЕЙСТВИЕ МАТЕРИИ НА ГЕОМЕТРИЮ

Всякое тяжелое тело с известным весом,
находящееся на определенном расстоянии от центра мира,
изменяет свой вес в соответствии с изменением расстояния
от центра, так что при удалении от центра
оно становится тяжелее,
а при приближении к нему — легче.
По этой причине силы тяготения находятся в таком же
отношении друг к другу, как расстояния от центра.

АЛЬ ХАЗИНИ (1115 г.н.э.)

На фиг. 1.12 показан шар, плотность вещества в котором $\rho = 5{,}52$ г/см^3 совпадает со средней плотностью Земли. В шаре просверлено отверстие. В этом отверстии две пробные частицы A и B совершают простые гармонические колебания с периодом 84 мин. Вектор ξ, разделяющий геодезические этих частиц, оче-



ФИГ. 1.12.
Частицы A и B движутся туда и обратно в отверстии, просверленном в Земле, которая предполагается состоящей из вещества с однородной плотностью. На радиусе r ньютоновское ускорение частицы составляет

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2_{\text{обычн}}} = -\frac{G}{c^2}\frac{(\text{масса внутри радиуса } r)}{r^2} =$$

$$= -\left(\frac{G}{r^2c^2}\right)\left(\frac{4\pi}{3}\rho_{\text{обычн}}r^3\right) = -\omega^2 r.$$

Отсюда видно, что каждая частица совершает простые гармонические колебания с той же угловой частотой, с которой спутник движется по круговой орбите, касающейся поверхности данной модели Земли:

$$\omega^2\ (\text{см}^{-2}) = \frac{4\pi}{3}\rho\ (\text{см}^{-2}),$$

$$\omega^2_{\text{обычн}}\ (\text{с}^{-2}) = \frac{4\pi G}{3}\rho_{\text{обычн}}\ (\text{г/см}^3).$$

видно, тоже совершает простые периодические колебания с тем же периодом 84 мин независимо от того, куда он направлен:

$$d^2\xi^j/d\tau^2 = -\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\xi^j, \quad j = x, y, z. \tag{1.15}$$

Тензор Римана внутри Земли

Сравнивая это движение с уравнением отклонения геодезических (1.13) для медленных частиц в почти инерциальной системе отсчета, мы можем выписать некоторые из компонент кривизны для внутренних областей данной модели Земли:

$$\begin{Vmatrix} R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} \end{Vmatrix} = (4\pi\rho/3) \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.16}$$

Этот пример иллюстрирует ту связь, которая существует между кривизной пространства-времени и распределением материи.

Влияние гравитационной волны на тензор Римана

Предположим, что через Землю проходит гравитационная волна от вспышки сверхновой. Пусть Земля состоит из идеального несжимаемого материала, плотность которого практически не изменяется. В волне кривизна пространства-времени покрывается «рябью», распространяющейся со скоростью света. Рябь проявится в компонентах $R^j{}_{0k0}$ тензора Римана и в относительном ускорении двух пробных частиц. Левая часть уравнения (1.16) «покроется рябью», а правая часть не изменится. Равенство (1.16) нарушится. Риманова кривизна не будет более прямым следствием лишь того, что в данном месте присутствует вещество Земли.

Тем не менее, согласно теории Эйнштейна, часть уравнения (1.16), а именно его след

$$R_{\hat{0}\hat{0}} \equiv R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} + R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} + R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} = 4\pi\rho, \tag{1.17}$$

не изменяется при наличии гравитационной волны. Это справедливо и в вакууме вне Земли; там обе части уравнения равны нулю [ср. (1.14)].

Введение тензора Эйнштейна

В общем случае некоторая часть тензора Римана, называемая *тензором Эйнштейна* и обозначаемая **G**, всегда генерируется непосредственно локальным распределением материи. Тензор Эйнштейна является геометрическим объектом, обобщающим $R_{\hat{0}\hat{0}}$ в левой части уравнения (1.17). Как и $R_{\hat{0}\hat{0}}$, тензор Эйнштейна **G** получается из тензора Римана **R** при некотором усреднении по всем направлениям. Геометрическим объектом, генерирующим **G** и обобщающим правую часть уравнения (1.16), является так называемый *тензор энергии-импульса* материи. Его обозначают **T**. Для определения тензоров **G** и **T** не нужны координаты; подобно тензору Римана **R** и метрическому тензору **g** они существуют и тогда, когда нет никаких координат. Более того, эти тензоры

Введение тензора энергии-импульса

всегда равны друг другу с точностью до множителя 8π:

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}. \tag{1.18}$$

Уравнение поля Эйнштейна: как материя искривляет пространство-время

Это *уравнение поля Эйнштейна*; переписанное в компонентах в произвольной системе координат, оно имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}. \tag{1.19}$$

Уравнение поля Эйнштейна изящно и очень богато по содержанию. Ни одно уравнение физики не имеет более простой записи. И ни одно из них не имеет столько приложений и следствий.

Следствия из эйнштейновского уравнения поля

Уравнение поля показывает, как энергия-импульс материи приводит к появлению вокруг себя средней кривизны ($\mathbf{G}$). В то же время уравнение поля является уравнением распространения для остальной, анизотропной части кривизны: оно описывает кривизну внешней части пространства-времени для статического источника (Земля), оно описывает излучение гравитационных волн (рябь в кривизне пространства-времени) энергией-импульсом движущейся материи и распространение этих волн во Вселенной. Уравнение поля содержит в себе уравнение движения («сила = масса × ускорение») материи, тензор энергии-импульса которой создает кривизну.

Таковы следствия уравнения $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$. Обратимся теперь к некоторым приложениям.

Приложения эйнштейновского уравнения поля

Уравнение поля описывает движение планет в Солнечной системе, отклонение Солнцем световых лучей, коллапс звезды, приводящий к образованию черной дыры; оно однозначно определяет геометрию внешнего пространства-времени черной дыры («у черной дыры нет волос»); оно описывает эволюцию сингулярностей пространства-времени, возникших в результате коллапса, расширение и последующее сжатие Вселенной. И больше того, намного больше.

Чтобы понять, как простое уравнение $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ может быть таким всемогущим, желательно вернуться назад и посвятить несколько глав тому, чтобы заново построить всю картину пространства-времени, его кривизны, выявить действующие в нем законы — на этот раз уже более тщательно, подробно и на более высоком математическом уровне.

На этом мы заканчиваем обзор воздействия геометрии на материю и обратного влияния материи на геометрию и ставим точку в притче о яблоке.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Кривизна цилиндра

Покажите, что гауссова кривизна R поверхности цилиндра равна нулю, доказав сначала, что геодезические на этой поверхности (разверните цилиндр!) не расходятся. Приведите независимое доказательство этого заключения, использовав формулу

$R = 1/\rho_1\rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны в рассматриваемой точке по отношению к трехмерному эвклидовому пространству, содержащему эту поверхность.

1.2. Приливы в дни сизигий и в дни квадратур [1])

Вычислите 1) в обычных единицах и 2) в геометрических единицах величину ньютоновского ускорения приливного воздействия R^m_{0n0} ($m, n = 1, 2, 3$) на Земле, возникающего из-за притяжения 1) Луны ($m_{\text{обычн}} = 7{,}35 \cdot 10^{25}$ г, $r = 3{,}84 \cdot 10^{10}$ см) и 2) Солнца ($m_{\text{обычн}} = 1{,}989 \cdot 10^{33}$ г, $r = 1{,}496 \cdot 10^{13}$ см). Во сколько раз наибольший прилив в дни сизигий сильнее наименьшего в дни квадратур?

1.3. Коротко о Кеплере

Частота вращения маленького спутника по круговой орбите радиуса r вокруг центрального тела массы m (см) равна ω (см$^{-1}$). Исходя из известного значения ω, покажите, что определить r и m по отдельности невозможно. Вычислить можно лишь эффективную «кеплерову плотность» тела — значение, усредненное по сфере того же радиуса, что и радиус орбиты. Приведите формулу для ω^2, выраженной через эту кеплерову плотность.

Переписка Кеплера и Галилея (дополнение 1.9) напоминает о преемственности в науке. Об этом свидетельствует также и то, что в год, когда умер Галилей, родился Ньютон (дополнение 1.10). Следующим после Ньютона, кто коренным образом изменил формулировку законов тяготения, был Эйнштейн (дополнение 1.11).

[1]) Дни сизигий — дни полнолуния и новолуния, дни квадратур — дни первой и последней лунной четверти.— *Прим. перев.*

Дополнение 1.9. ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ
Пиза, 15 февраля 1564 г.— Арцетри, Флоренция, 8 января 1642 г.

«В вопросах науки авторитет тысячи не стоит самых простейших доводов одного.»
Галилео Галилей [68].

«Если тело, выйдя из состояния покоя, падает равномерно-ускоренно, то расстояния, проходимые им за определенные промежутки времени, относятся между собой, как квадраты этих промежутков времени.»
Галилео Галилей [69]

«Все, что говорили и представляли себе до сих пор [по поводу приливов], кажется мне совершенно несостоятельным. И среди великих людей, рассуждавших об этом

удивительном явлении природы, более всех других удивляет меня Кеплер, который, будучи наделен умом свободным и острым и будучи хорошо знакомым с движениями, приписываемыми Земле, допускал особую власть Луны над водой, сокровенные свойства и тому подобные ребячества.»

Галилео Галилей [68]

«В высшей степени прекрасно и приятно для зрения тело Луны [в новый телескоп]... поверхность Луны никак не является гладкой и отполированной, но неровной и шероховатой ... на ней существуют громадные возвышения, глубокие впадины и пропасти ... мириады звезд, которых никто ранее не видел, превосходящие по числу старые, известные издавна, более чем в десять раз. Мы открыли (и доводим это до всеобщего сведения) четыре планеты, никем еще не виданные от начала мира до наших дней ... Кроме того, уничтожился предмет спора о Галактике, или Млечном пути, и существо его раскрылось не только для разума, но и для чувств ... Галактика является не чем иным, как собранием многочисленных звезд, расположенных группами ... Множество же более мелких звезд не поддается исследованию ... звезды, которые до сих пор некоторыми астрономами назывались туманными, представляют собой собрания звездочек, столпившихся удивительным образом вместе.»

Галилео Галилей [70]

«Настоящим сочинением мы лишь открываем двери к этим двум новым наукам, изобилующим приложениями, которые в будущем будут неизмеримо больше приумножены пытливыми умами ... одна из наук касается предмета вечного, имеющего первенствующее значение в природе.»

Галилео Галилей [69]

Дополнение 1.10. ИСААК НЬЮТОН
Вулсторп, Линколншир, Англия, 25 декабря 1642 г.— Кенсингтон, Лондон, 20 марта 1726 г.

«Само проведение прямых линий и кругов, служащее основанием геометрии, в сущности относится к механике. Геометрия не учит тому, *как* проводить эти линии, но предполагает (постулирует) выполнимость этих построений.»

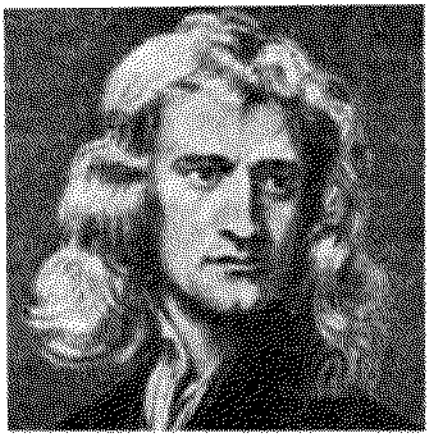
(Из предисловия Ньютона к первому изданию «Начал» [71])

«*Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.»

«*Абсолютное, истинное математическое время* само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно.»

(Из «Начал» [71])

«Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Все же, что не выводится из явлений, должно называться *гипотезою*, гипотезам же ... не место в экспериментальной философии ... Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам, и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря».



(Из добавления в конце третьей книги «Начал», сделанного во втором издании 1713 г.; этот отрывок особенно знаменит из-за фразы, часто цитируемой из оригинального латинского текста: «Hypotheses non fingo».)

«И в том же году [1665 или 1666] я начал думать о тяготении, простирающемся до орбиты Луны ... Все это было в 1665 и 1666 гг.— в годы чумы, ибо я в те дни был на заре своей поры изобретений, и математика и философия волновали меня более, чем когда-либо после.»

(Из записки Ньютона об открытиях в области дифференцирования, биноминальной теоремы, оптики, динамики и тяготения, написанной около 1714 г. и найденной Адамсом около 1887 г. в «Портсмутской коллекции» работ Ньютона.)

«Ибо гипотезы должны... объяснять свойства вещей, а не пытаться предопределять их, за исключением тех случаев, когда они могут помочь в экспериментах.»

(Из письма Ньютона Пардису, 1672 г.; цитируется согласно тексту заметок Каджори к изданию [71].)

«То, что одно тело может действовать на другое на расстоянии через вакуум, без посредства какой-либо еще субстанции, с помощью и через которую действие или сила могли бы передаваться от одного к другому, представляется мне таким величайшим абсурдом, что, я полагаю, ни один человек, сколько-нибудь искушенный в философских вопросах, не способен впасть в него.»

(Отрывок из письма Ньютона Ричарду Бентли 1692—1693 г., часто приводившийся Майклом Фарадеем; цитируется согласно тексту заметок к изданию [71].)

«Притяжения тяготения, магнетизма и электричества простираются на весьма заметные расстояния и поэтому наблюдались ..., но могут существовать и другие

притяжения, простирающиеся на столь малые расстояния, что до сих пор они ускользали от наблюдения ... Я бы скорее заключил из сцепления частиц о том, что они притягивают одна другую некоторой силой, которая очень велика при непосредственном соприкосновении и на малых расстояниях производит вышеупомянутые химические действия, но не простирается с значительным действием на большие расстояния от частиц.»

(Из вопроса 31 в «Оптике» Ньютона [72].)

«Что находится в местах, почти лишенных материи, и почему Солнце и планеты тяготеют друг к другу, хотя между ними нет плотной материи? Почему природа не делает ничего понапрасну, и откуда проистекают весь порядок и красота, которые мы видим в мире? Для какой цели существуют кометы, и почему все планеты движутся в одном и том же направлении по концентрическим орбитам, в то время как кометы движутся по всевозможным направлениям по очень эксцентрическим орбитам, и что мешает падению неподвижных звезд одной на другую?»

(Из вопроса 28.)

«Он не есть вечность или бесконечность, но он вечен и бесконечен; он не есть продолжительность или пространство, но продолжает быть и всюду пребывает. Он продолжает быть всегда и присутствует всюду; всегда и везде существуя, он устанавливает пространство и продолжительность ... Вот, что можно сказать о боге, рассуждение о котором, на основании совершающихся явлений, конечно, относится к предмету натуральной философии.»

(Из добавления в конце «Начал» [71].)

Дополнение 1.11. АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН
Ульм, Германия, 14 марта 1879 г. — Принстон, Нью-Джерси, 18 апреля 1955 г.

«Что меня действительно интересует, так это был ли у бога какой-нибудь выбор при сотворении мира.»

Эйнштейн — ассистенту; цитируется согласно Холтону [73]

«Что годы настойчивых поисков в темноте, с их напряженной страстью, с перемежающимися уверенностью и отчаянием, и, наконец, прозрение — только тот, кто прошел сквозь это, может понять.»

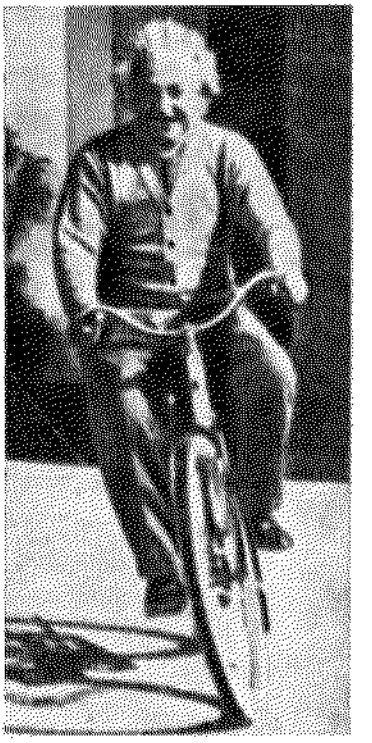
Эйнштейн; цитируется согласно Клейну [74]

«Из всех обществ, доступных нам, не существует такого, которому я бы хотел посвятить себя, за исключением общества истинных исследователей, число живых членов которого всегда мало ...»

Эйнштейн; письмо Борну, цитируется Борном [75]

«Я изучаю Ваши великие работы и — когда я где-нибудь застреваю — имею теперь удовольствие видеть перед собой Ваше дружелюбное молодое лицо, улыбающееся и объясняющее.»

Эйнштейн, письмо от 2 мая 1920 г., после встречи с Нильсом Бором

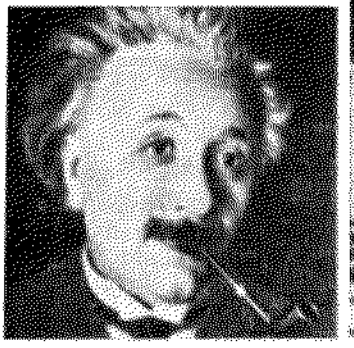


«Если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока они не ссылаются на действительность.»

Эйнштейн [76]

«Самая непостижимая вещь в мире — это то, что мир все-таки постижим.»

Эйнштейн [77]



Я небеса измерял;
Ныне тени Земли измеряю.
Дух мой жил на небе;
Здесь же тень тела лежит.

Иоганн Кеплер (эпитафия написана им самим на латыни)

Ubi materia, ibi geometria [1]).

Иоганн Кеплер

[1]) Где материя, там геометрия.

ЧАСТЬ II

ФИЗИКА В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В которой читатель встречается со старым другом — специальной теорией относительности, облаченной в новый, современный наряд, и ближе знакомится с ее прелестями

2. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В геометрических и физических приложениях всегда оказывается, что величина характеризуется не только порядком своего тензора, но также и симметрией

ГЕРМАН ВЕЙЛЬ [83]

Наиболее поразительным в развитии геометрии за последние 2000 лет, несомненно, является непрерывное расширение понятия «геометрический объект». Вначале это понятие охватывало лишь несколько кривых и поверхностей в синтетической геометрии греков; во времена Ренессанса оно расширилось, охватив всю совокупность объектов, определяемых в аналитической геометрии; совсем недавно оно распространилось еще дальше, охватив безграничную Вселенную, которая рассматривается в теории точечных множеств

КАРЛ МЕНГЕР [77]

§ 2.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Кривизна геометрии проявляет себя в виде гравитации. Под действием гравитации изменяется расстояние между мировыми линиями близких частиц. В свою очередь частицы и другие источники энергии-массы являются причиной искривления геометрии. Как же разорвать этот замкнутый круг воздействия геометрии на материю и обратного действия материи на геометрию? Наилучший способ — начать с анализа движения частиц и динамики полей в столь ограниченной области пространства-времени, что ее можно считать плоской. (См. дополнение 1.5 «Как проверить, является ли пространство-время плоским?»)

Теории плоского пространства-времени (специальной теории относительности) посвящены гл. 2—6. Подразумевается, что читатель уже несколько знаком со специальной теорией относительности [1]), включая: общее понятие 4-вектора; 4-вектор энергии-импульса; простые преобразования Лоренца; формулу Лоренца для силы, действующей на заряженную частицу; хотя бы беглое знакомство с одним уравнением из какой-нибудь книги, в котором встречается тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$; качественный вид чертежей в пространстве-времени, куда входят 1) световой конус будущего и прошлого, 2) соотношения причинности («в прошлом по отношению к», «в будущем по отношению к»,

Предполагаемый уровень подготовки читателя

[1]) См., например, [78—80] или [81], где физика трактуется с геометрической точки зрения.

«нейтрально», или «в пространственноподобном отношении к»), 3) лоренцево сокращение, 4) замедление времени, 5) отсутствие абсолютного понятия одновременности и 6) тот факт, что оси $\bar{t}$ и $\bar{z}$ в дополнении 2.4 ортогональны друг другу, хотя таковыми не кажутся. То новое, что читатель обнаружит в этих главах, сводится к следующему: 1) новый подход к специальной теории относительности, акцентирующий внимание на понятиях, для которых не требуется вводить координаты, и обозначениях, легко обобщаемых на случай искривленного пространства-времени («геометрические объекты», тензоры, представляемые в виде машин — гл. 2—4); либо 2) незнакомые разделы специальной теории относительности, которые важны для последующего изложения теории тяготения («тензор энергии-импульса и законы сохранения», гл. 5; «ускоренные наблюдатели», гл. 6).

§ 2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

Любая физическая величина может быть описана геометрическим объектом

Всему, что происходит в пространстве-времени, можно дать геометрическое описание, и почти любое такое описание допускает непосредственное обобщение из плоского пространства-времени в искривленное. Важнейшим различием между теми или иными геометрическими объектами является их область определения: сравните отдельный объект (вектор) для импульса некоторой частицы на определенной фазе ее истории и протяженный геометрический объект, описывающий электромагнитное поле, который определен во всем пространстве и на протяжении всего времени («поле антисимметричного тензора второго ранга», или, более кратко, «поле 2-формы»). Истоки идеи, что любую физическую величину можно описать с помощью геометрического объекта, а все законы физики можно выразить в виде геометрических соотношений между этими геометрическими объектами, восходят еще к Эрлангенской программе Феликса Клейна 1872 г. [82]. Приблизившись к физике в эйнштейновском «принципе общей ковариантности» и в работах Германа Вейля [83], эта идея, по-видимому, впервые была четко сформулирована Вебленом и Уайтхедом [84], и сегодня она пронизывает всю теорию относительности, как специальную, так и общую.

Все законы физики можно представить в геометрическом виде

Математическая теория геометрических объектов была развита Ньенхисом [85] и Черном [86—88]. Но чтобы понять геометродинамику и внести в нее свой вклад, не обязательно в совершенстве владеть этой изящной и красивой теорией. Нужно лишь четко представлять себе, что геометрические объекты в пространстве-времени существуют независимо от координатных систем и систем отсчета. Точка в пространстве-времени (*«событие»*) является геометрическим объектом. Стрелка, соединяющая два соседних события (*«вектор»*), является геометрическим объектом в плоском

пространстве-времени, а его обобщение — «*касательный вектор*» является геометрическим объектом и в искривленном пространстве-времени. «*Метрика*» (машина, производящая квадрат длины любого вектора, см. дополнение 1.3) — тоже геометрический объект. Чтобы дать определение этим понятиям, не требуется никаких координат.

В последующих параграфах вводится несколько различных геометрических объектов и демонстрируется роль, которую они играют в качестве представителей физических величин в плоском пространстве-времени.

§ 2.3. ВЕКТОРЫ

Способы определения вектора:

Стрелка

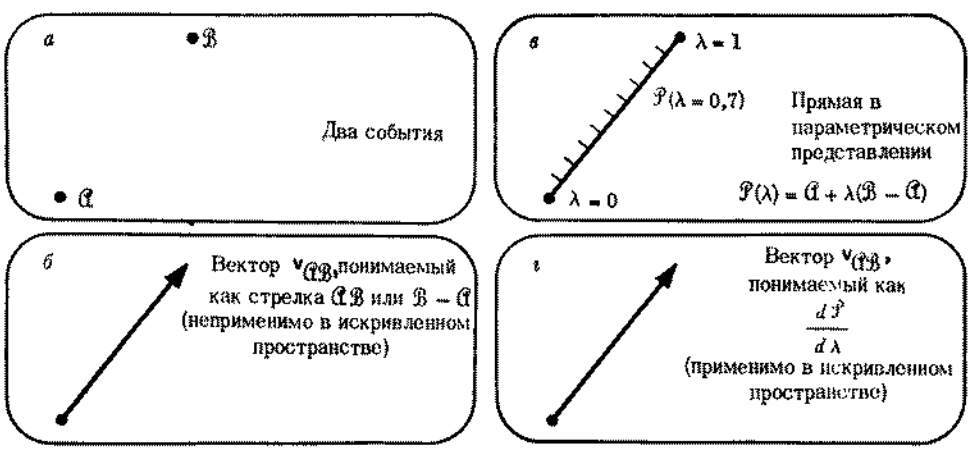
Начнем с понятия вектора в простейшей трактовке (фиг. 2.1,*б*) — стрелки, направленной от одного события в пространстве-времени $\mathcal{A}$ («основание») к другому $\mathcal{B}$ («острие»). Запишем этот вектор в виде

$$\mathbf{v}_{\mathcal{AB}} = \mathcal{B} - \mathcal{A} \text{ (или } \mathcal{A}\mathcal{B}).$$

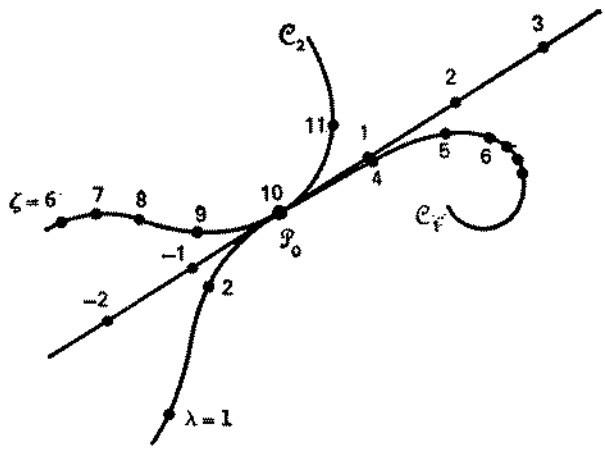
Прямая линия в параметрическом представлении

Для многих целей (в том числе и для последующего обобщения на случай искривленного пространства-времени) удобнее ввести другие, совершенно эквивалентные способы представления этого вектора. Представим стрелку в виде параметризованной прямой линии $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{A} + \lambda(\mathcal{B} - \mathcal{A})$, где $\lambda = 0$ соответствует основанию стрелки, а $\lambda = 1$ — ее острию. Возьмем производную от этого простого выражения для $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$(d/d\lambda)[\mathcal{A} + \lambda(\mathcal{B} - \mathcal{A})] = \mathcal{B} - \mathcal{A} = \mathcal{P}(1) - \mathcal{P}(0) \equiv$$
$$\equiv (\text{острие}) - (\text{основание}) \equiv \mathbf{v}_{\mathcal{AB}}.$$



ФИГ. 2.1.
От вектора, соединяющего две точки, к вектору, являющемуся производной («касательный вектор»; вместо билокального понятия — локальное).



ФИГ. 2.2.
Один и тот же касательный вектор для двух, совершенно различных кривых. Проведена также параметризованная прямая, которая ближе всего приближается к этим кривым в точке $\mathscr{P}_0$. Касательный вектор лежит между точками 0 и 1 на этой прямой.

Этот результат позволяет рассматривать вектор не как объект, связанный с двумя точками («билокальный»), а как объект, связанный лишь с одной точкой («касательный вектор», локальный объект):

Производная точки вдоль кривой

$$\mathbf{v}_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = (d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=0}. \tag{2.1}$$

Пример. Если $\mathscr{P}(\tau)$ — прямая мировая линия свободной частицы, параметром которой служит собственное время, то перемещение за интервал собственного времени в одну секунду дает стрелку $\mathbf{u} = \mathscr{P}(1) - \mathscr{P}(0)$. Эту стрелку легко нарисовать на пространственно-временном чертеже. Она будет в точности равна 4-скорости частицы. Однако выражение $\mathbf{u} = d\mathscr{P}/d\tau$ для того же самого перемещения, записанное через производную, 1) ближе соответствует понятию скорости и 2) применимо в случае ускоренного движения. Таким образом, если мировая линия $\mathscr{P}(\tau)$ искривлена, как на фиг. 2.2, то необходимо сначала вычислить $d\mathscr{P}/d\tau$ и лишь потом нарисовать прямую $\mathscr{P}(0) + \lambda\,(d\mathscr{P}/d\tau)_0$ для стрелки $\mathbf{u} = d\mathscr{P}/d\tau$, изображающей 4-скорость $\mathbf{u}$.

Для читателя такая точка зрения может оказаться непривычной. Более знакомыми могут быть компоненты 4-скорости в некоторой лоренцевой системе отсчета

Компоненты вектора

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\quad u^j = \frac{dx^j}{d\tau} = \frac{v^j}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.2}$$

где

$$v^j = dx^j/dt \text{ — компоненты «обычной скорости»},$$
$$v^2 = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2.$$

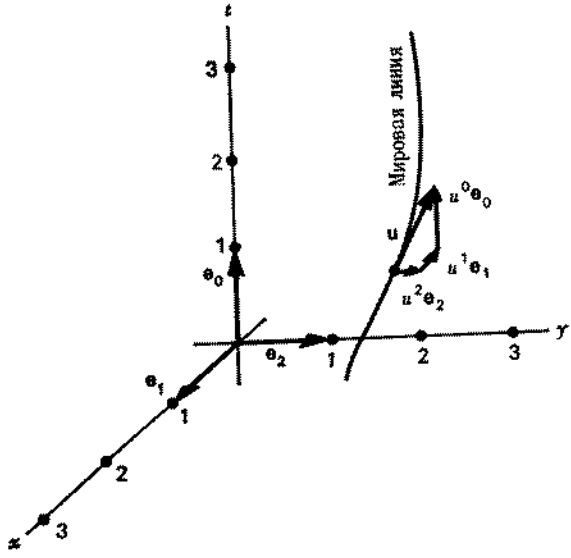
Но даже компоненты 4-скорости (2.2) могут показаться слегка непривычными, если читатель привык к тому, что четвертая компонента вектора умножается на $i = \sqrt{-1}$. Если это так, то необходимо освоиться с новыми обозначениями. (См. дополнение 2.1 «Прощай *ict*».)

Сам вектор — более фундаментальное понятие, чем его компоненты. Это геометрический объект, смысл которого не зависит от координат. У частицы есть мировая линия $\mathcal{P}(\tau)$ и 4-скорость $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\tau$, которые не связаны ни с какими координатами. Координаты появляются тогда, когда возникает необходимость в счетной машине (которая не признает векторов и воспринимает лишь числа). С этой целью в лоренцевой системе отсчета вводятся ортонормированные базисные векторы (фиг. 2.3) $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. По отношению к началу $\mathcal{O}$ такой системы отсчета мировая линия может быть описана на координатном языке:

Базисные векторы

$$\mathcal{P}(\tau) - \mathcal{O} = x^0(\tau)\,\mathbf{e}_0 + x^1(\tau)\,\mathbf{e}_1 + x^2(\tau)\,\mathbf{e}_2 + x^3(\tau)\,\mathbf{e}_3 = x^\mu(\tau)\,\mathbf{e}_\mu.$$

4-скорость частицы, выраженная относительно той же лоренцевой



ФИГ. 2.3.
4-скорость частицы в плоском пространстве-времени. 4-скорость $\mathbf{u}$ представляет собой единичный вектор (стрелка), касательный к мировой линии частицы; каждому событию на мировой линии соответствует один касательный вектор. В некоторой конкретной лоренцевой системе координат изображены базисные векторы единичной длины, направленные вдоль четырех координатных осей: $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. 4-скорость, как и любой другой вектор, можно представить в виде суммы компонент, направленных вдоль базисных векторов: $\mathbf{u} = u^0\mathbf{e}_0 + u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 = u^\alpha\mathbf{e}_\alpha$.

системы, принимает вид

$$\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\tau = (dx^\mu/d\tau)\,\mathbf{e}_\mu = u^0\mathbf{e}_0 + u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3. \qquad (2.3)$$

Разложение вектора по базису

Компоненты w^α любого другого вектора $\mathbf{w}$ в этой системе определяются аналогичным образом как коэффициенты в разложении

$$\mathbf{w} = w^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \qquad (2.4)$$

Обратите внимание: индекс α у $\mathbf{e}_\alpha$ обозначает номер вектора, а не номер компоненты!

Дополнение 2.1. ПРОЩАЙ *ict*!

От одного математического понятия, некогда присутствовавшего в специальной теории относительности, необходимо избавиться. Это мнимая координата $x^4 = ict$. Она была введена для того, чтобы геометрия пространства-времени формально как можно меньше отличалась от геометрии эвклидова пространства, чтобы преобразования Лоренца по виду были похожи на вращения и чтобы не было различия, которое в противном случае необходимо проводить между величинами с верхними индексами (такими, как компоненты p^μ вектора энергии-импульса) и величинами с нижними индексами (такими, как компоненты p_μ 1-формы энергии-импульса). Однако, избавившись от этого различия, мы только проиграем. Без него невозможно узнать, имеется ли в виду вектор (§ 2.3) или совсем иной геометрический объект, являющийся 1-формой (§ 2.5). Более того, имеется существенное различие между углом, от которого все зависит периодически (вращение), и параметром, увеличение которого всегда приводит к возрастанию разницы в импульсе («параметр скорости» преобразований Лоренца, дополнение 2.4). При введении мнимой временно́й координаты от нас не только ускользают характерные черты геометрического объекта, с которым мы имеем дело, и природа параметра в преобразовании координат, но происходит нечто еще более существенное: ускользает совершенно различная структура метрики (§ 2.4) в геометрии $+\,+\,+\,+$ и в геометрии $-\,+\,+\,+$. Если в эвклидовой геометрии расстояние между двумя точками равно нулю, то эти две точки являются одной и той же точкой. Если же в геометрии Лоренца — Минковского интервал между двумя событиями равен нулю, то одно событие может происходить на Земле, а другое — на сверхновой в галактике М 31, хотя они соединены нулевым лучом (лежащим на световом конусе). В световом конусе, направленном из данного события в прошлое, содержатся все события, которые могли повлиять на данное событие. В световом конусе, направленном в будущее, содержатся все события, на которые оно само может повлиять. Множество двойных световых конусов, выходящих из каждого события в пространстве-времени, образует зацепляющуюся причинную структуру. Благодаря этой структуре физические закономерности в мире таковы, какие они есть (более подробно об этой структуре см. [89—91]). И если в области пространства-времени, являющейся плоской, можно замаскировать эту структуру, написав

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 + (\Delta x^4)^2,$$

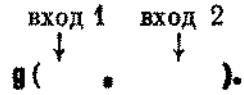
где $x^4 = ict$, то еще никто не нашел способа, как ввести мнимую координату в общем случае искривленного пространственно-временного многообразия. А если

$x^4 = ict$ нельзя ввести там, то мы не будем использовать ее и здесь. В этой главе и ниже, как и во всей литературе по общей теории относительности, используется вещественная временна́я координата $x^0 = t = ct_{\text{обычн}}$ (индекс 0, а не 4, чтобы избежать всякой возможности спутать с мнимой временно́й координатой).

§ 2.4. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

Метрика определяется как машина для вычисления скалярного произведения векторов

Метрический тензор, как уже говорилось в дополнении 1.3, IV,— это своего рода машина для вычисления квадрата длины одного вектора и скалярного произведения двух различных векторов. Точнее, метрический тензор $\mathbf{g}$ представляет собой машину с двумя каналами для ввода векторов:



(2.5)

После ввода векторов машина выдает вещественное число:

$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$ скалярное произведение $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$, обозначаемое также $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$,

(2.6)

$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) =$ квадрат длины $\mathbf{u}$, обозначаемый также $\mathbf{u}^2$.

Это число не зависит от порядка, в котором вводятся векторы («метрический тензор симметричен»),

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \tag{2.7}$$

и линейно зависит от самих векторов:

$$\mathbf{g}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{w}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \tag{2.8}$$

Так как метрическая «машина» линейна, ее «продукцию» можно вычислить для любых входных данных, зная лишь результат ее воздействия на базисные векторы $\mathbf{e}_\alpha$ лоренцевой системы. Это делается следующим образом:

1) Определим символы («метрические коэффициенты») $\eta_{\alpha\beta}$:

Метрические коэффициенты

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \tag{2.9}$$

2) Вычислим их численные значения, используя известное выражение для квадрата длины вектора $\xi = \Delta x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, разделяющего два события:

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \mathbf{g}(\Delta x^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \Delta x^\beta \mathbf{e}_\beta) =$$

$$= \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \eta_{\alpha\beta} \text{ при любом выборе } \Delta x^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \eta_{\alpha\beta} \| \equiv \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ в любой лоренцевой системе отсчета.} \tag{2.10}$$

Вычисление скалярного произведения по компонентам векторов

3) Вычислим скалярное произведение двух произвольных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(u^\alpha \mathbf{e}_\alpha, v^\beta \mathbf{e}_\beta) = u^\alpha v^\beta \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta),$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u^\alpha v^\beta \eta_{\alpha\beta} = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3. \qquad (2.11)$$

Тот факт, что направления и векторы в пространстве-времени можно разбить на «*времениподобные*» (с отрицательным квадратом длины), «*пространственноподобные*» (с положительным квадратом длины) и «*нулевые*», или «светоподобные» (с нулевым квадратом длины), обусловлен отрицательным знаком метрического коэффициента η_{00}.

Дополнение 2.2 посвящено приложению изложенных выше идей и системы обозначений к двум простейшим проблемам специальной теории относительности.

§ 2.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Векторы и метрический тензор представляют собой геометрические объекты, уже знакомые читателю из гл. 1 и из элементарных курсов специальной теории относительности. Менее известен, но не менее важен третий геометрический объект—«*дифференциальная форма*», или «*1-форма*».

Рассмотрим 4-импульс $\mathbf{p}$ какой-либо частицы, например электрона. К понятию импульса можно подойти, введя сначала 4-скорость этого электрона $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\tau$ («перемещение в пространстве-времени за единицу собственного времени вдоль прямой, аппроксимирующей мировую линию»). Это вектор единичной длины. Умножая его на массу частицы m, получаем *вектор импульса*

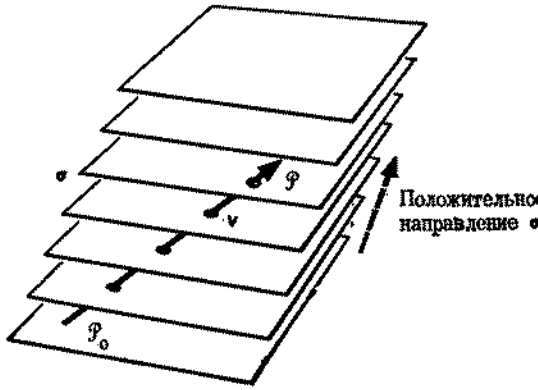
$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}.$$

Представление 1-формы с помощью волн де Бройля

Но в физике известен и другой подход к понятию импульса, при котором каждой частице приписывается волна де Бройля. Более того, эта волна имеет самый непосредственный физический смысл. Пусть эта волна испытывает дифракцию на кристаллической решетке. Картина дифракции позволяет определить не только длину волн де Бройля, но и ту конфигурацию в пространстве, которую образуют поверхности равных целочисленных значений фазы $\phi = 7$, $\phi = 8$, $\phi = 9$, ... Эта конфигурация поверхностей, которую мы обозначим $\tilde{\mathbf{k}}$, дает простейшую иллюстрацию, которую удается найти для 1-формы.

Для чего же может пригодиться конфигурация поверхностей в пространстве-времени, создаваемая такой 1-формой? Возьмем две близкие точки в пространстве-времени $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_0$. Проведем стрелку $\mathbf{v} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$ из $\mathcal{P}_0$ в $\mathcal{P}$. Она пересечет определенное число поверхностей целой фазы волны де Бройля. Пусть каждый

Вектор пересекает 1-форму



ФИГ. 2.4.
Вектор $\mathbf{v} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$, разделяющий два соседних события $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}$; 1-форма σ; вектор $\mathbf{v}$, пересекаясь с поверхностями σ, дает число

$$\langle \sigma, \mathbf{v} \rangle = (\text{число пересекаемых поверхностей}) = 4{,}4$$

(4,4 «удара колокола»). Если σ составлена из поверхностей постоянных значений фазы $\phi = 17$, $\phi = 18$, $\phi = 19$, ... дебройлевской волны электрона, то $\langle \sigma, \mathbf{v} \rangle$ равно разности фаз между событиями $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}$. Отметим, что с помощью одних поверхностей не удается полностью охарактеризовать σ; необходимо еще указать ориентацию. Какое направление от поверхности к поверхности является «положительным», т. е. в каком направлении увеличивается ϕ?

раз, когда стрелка прокалывает очередную поверхность, звучит удар воображаемого колокола. Число проколотых поверхностей (число «ударов колокола») обозначается

$$\langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{v} \rangle.$$

пересекаемая 1-форма — пересекающий вектор

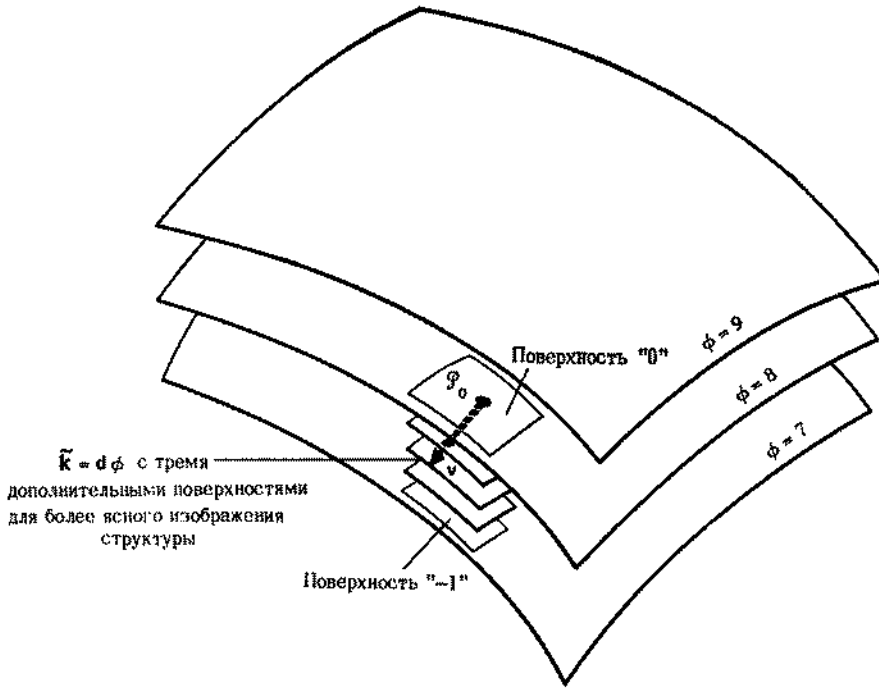
В рассматриваемом примере оно равно разности фаз между острием ($\mathcal{P}$) и основанием ($\mathcal{P}_0$) вектора $\mathbf{v}$ (фиг. 2.4):

$$\langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{v} \rangle = \phi(\mathcal{P}) - \phi(\mathcal{P}_0).$$

Как правило, ни $\mathcal{P}_0$, ни $\mathcal{P}$ не лежат в точках целочисленной фазы. Поэтому необходимо представить себе, что между поверхностями целой фазы равномерно распределено бесконечное число поверхностей со всеми промежуточными значениями фазы. С их помощью можно определить точное значение $\langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{v} \rangle = \phi(\mathcal{P}) - \phi(\mathcal{P}_0)$.

1-форма, рассматриваемая как совокупность плоских поверхностей, расположенных через равные промежутки

Чтобы упростить математическую картину, будем трактовать $\tilde{\mathbf{k}}$ не как глобальную конфигурацию поверхностей волны де Бройля, а как локальную конфигурацию вблизи некоторой точки в пространстве-времени. Подобно тому, как вектор $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\tau$ характеризует локальное поведение мировой линии частицы (линейная аппроксимация кривой в общем случае), так и 1-форма $\tilde{\mathbf{k}}$ характе-

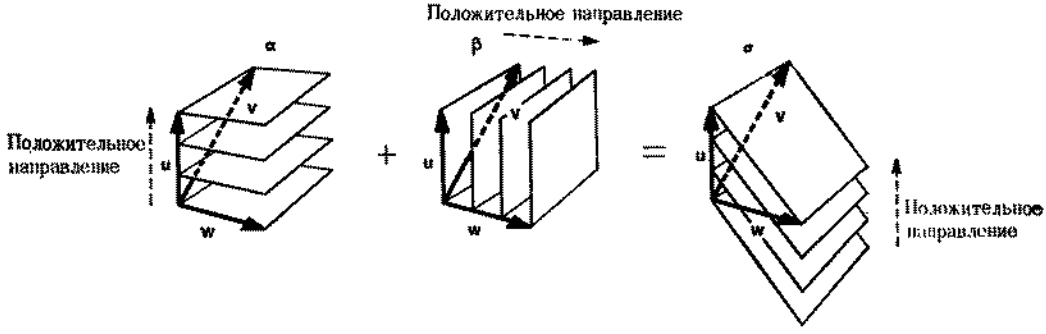


ФИГ. 2.5.
Эта фигура служит двоякой цели. а) Она является иллюстрацией для 1-формы $\tilde{\mathbf{k}}$ дебройлевской волны в событии $\mathscr{P}_0$ (семейство плоских поверхностей, расположенных через равные промежутки, или «гиперплоскостей», аппроксимирующих поверхности постоянных значений фазы). б) Она является иллюстрацией для градиента $\mathbf{d}\phi$ функции ϕ (понятия, определенного в § 2.6), который представляет собой то же ориентированное семейство плоских поверхностей $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{d}\phi$. Различным событиям соответствуют различные $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{d}\phi$ — семейства по-разному ориентированных и расположенных через разные промежутки плоскостей. Изменение ϕ между основанием и острием очень короткого вектора $\mathbf{v}$ равно числу поверхностей $\mathbf{d}\phi$, пересекаемых этим вектором, $\langle \mathbf{d}\phi, \mathbf{v} \rangle$; на этой фигуре оно составляет $-0{,}5$.

ризует локальную форму поверхностей волны де Бройля (в линейном приближении; поверхности являются плоскими и расположены через равные промежутки, фиг. 2.5).

1-форму можно трактовать и как машину, в которую вводятся векторы, а в результате получаются числа. Вводя $\mathbf{v}$, на выходе получаем $\langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{v} \rangle$. Поскольку поверхности $\tilde{\mathbf{k}}$ являются плоскими и расположены через равные промежутки, результат на выходе зависит от входных данных линейно:

$$\langle \tilde{\mathbf{k}}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \rangle = a \langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{u} \rangle + b \langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{v} \rangle. \qquad (2.12a)$$



ФИГ. 2.6.
Сложение двух 1-форм α и β, в результате которого получается 1-форма σ. Требуется, исходя из изображения α и β в виде семейств плоскостей (например, $\langle \alpha, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle = \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots$), построить такое же изображение для $\sigma = \alpha + \beta$. Это построение, основанное на линейности (2.12б) операции сложения, выполняется следующим образом: 1. Выберем несколько векторов u, v, . . ., параллельных поверхностям β (пересечения отсутствуют!) и пересекающих ровно 3 поверхности α; каждый из них тогда должен пересечь ровно 3 поверхности σ. 2. Выберем еще несколько векторов w, . . ., параллельных поверхностям α, но пересекающих ровно 3 поверхности β; они тоже должны пересечь ровно 3 поверхности σ. 3. Теперь строим то единственное семейство поверхностей, расположенных через равные промежутки, на первой из которых лежат основания всех векторов u, v, . . ., w, . . ., а на четвертой — их острия.

В действительности именно это и есть математическое определение 1-формы: *1-форма является линейной, вещественной функцией векторов*, т. е. линейной машиной, в которую вводятся векторы, а на выходе получаются числа. Задание машины $\tilde{\mathbf{k}}$ позволяет легко нарисовать соответствующие поверхности в пространстве-времени. Берем точку $\mathcal{P}_0$, в которой расположена эта машина. Проходящей через $\mathcal{P}_0$ поверхности $\tilde{\mathbf{k}}$ принадлежат точки $\mathcal{P}$, для которых $\langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle = 0$ (ни одного удара колокола). Другим поверхностям принадлежат точки, для которых $\langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

1-форма, рассматриваемая как линейная функция векторов

Иногда 1-формы обозначают жирными латинскими буквами с тильдой наверху, например $\tilde{\mathbf{k}}$, но чаще — полужирными буквами греческого алфавита, например α, β, σ. Результат действия 1-формы σ на вектор u называют «*значением* σ *на* u» или «*сверткой* σ *с* u».

Сложение 1-форм

1-формы, как и любые функции другого вида, можно складывать. 1-форма $a\alpha + b\beta$ представляет собой машину (совокупность поверхностей), результатом действия которой на вектор u является число

$$\langle a\alpha + b\beta, \mathbf{u} \rangle = a \langle \alpha, \mathbf{u} \rangle + b \langle \beta, \mathbf{u} \rangle. \qquad (2.12б)$$

На фиг. 2.6 это сложение изображено с помощью поверхностей.

Нетрудно убедиться в том, что совокупность всех 1-форм в данном событии образует «векторное пространство» в абстрактном, алгебраическом смысле этого понятия.

Вернемся к частице и ее дебройлевской волне. Точно так же, как стрелка $\mathbf{p} = m d\mathcal{P}/d\tau$ представляет наилучшую *линейную* аппроксимацию мировой линии частицы вблизи $\mathcal{P}_0$, плоские поверхности 1-формы $\tilde{\mathbf{k}}$ дают наилучшую линейную аппроксимацию кривых поверхностей дебройлевской волны частицы, а сама $\tilde{\mathbf{k}}$ является *линейной функцией*, которая наилучшим образом аппроксимирует дебройлевскую фазу ϕ вблизи $\mathcal{P}_0$:

$$\phi(\mathcal{P}) = \phi(\mathcal{P}_0) + \langle \tilde{\mathbf{k}}, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle + \text{члены более высокого порядка по } (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0). \tag{2.13}$$

Физическое соответствие между 1-формами и векторами

На самом деле дебройлевская 1-форма $\tilde{\mathbf{k}}$ и вектор импульса $\mathbf{p}$ несут одну и ту же информацию, как с математической, так и с физической точки зрения (в квантовой механике). Для выявления соотношения между ними обозначим поверхности $\tilde{\mathbf{k}}$ посредством $\hbar \times$ фаза и получим при этом *«1-форму импульса»* $\tilde{\mathbf{p}}$. Пересечение этой 1-формы произвольным вектором $\mathbf{v}$ приводит к результату (упражнение 2.1)

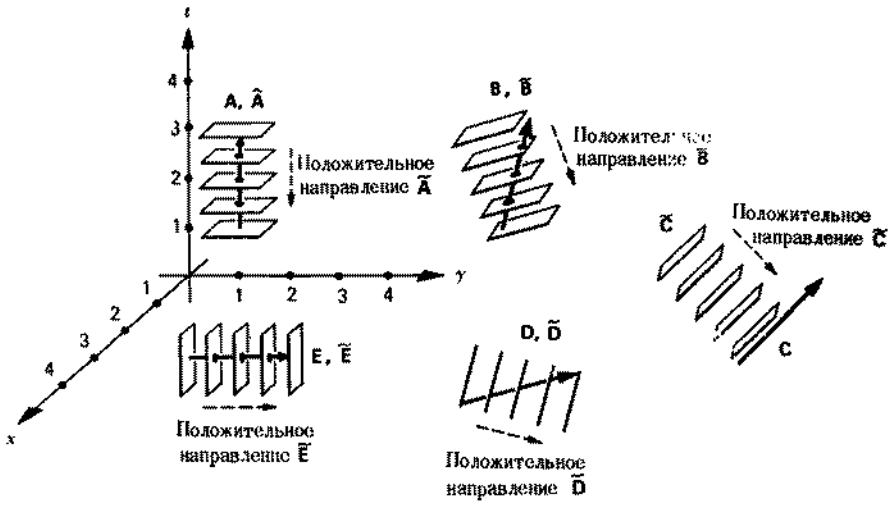
$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \langle \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{v} \rangle. \tag{2.14}$$

Словами это можно сказать так: проекция вектора $\mathbf{v}$ на вектор 4-импульса $\mathbf{p}$ совпадает с числом поверхностей, которые $\mathbf{v}$ пересекает у 1-формы импульса $\tilde{\mathbf{p}}$. *Примеры.* Векторы $\mathbf{v}$, лежащие на поверхностях $\tilde{\mathbf{p}}$ (не пересекающие их), перпендикулярны $\mathbf{p}$ (проекция отсутствует); сам вектор $\mathbf{p}$ пересекает поверхности $\tilde{\mathbf{p}}$ $\mathbf{p}^2 = -m^2$ раз.

Математическое соответствие между 1-формами и векторами

Для любого вектора $\mathbf{p}$ существует единственная соответствующая ему 1-форма (линейная функция векторов) $\tilde{\mathbf{p}}$, определяемая уравнением (2.14). Для любой 1-формы $\tilde{\mathbf{p}}$ существует единственный соответствующий ему вектор $\mathbf{p}$, определяемый по проекциям на всевозможные другие векторы, которые находятся из уравнения (2.14). На фиг. 2.7 показано несколько векторов и соответствующих им 1-форм.

Отдельная физическая величина одинаково хорошо описывается как вектором $\mathbf{p}$, так и соответствующей ему 1-формой $\tilde{\mathbf{p}}$. Иногда более простым и естественным является векторное описание, а иногда больше привлекает описание с помощью 1-форм. *Пример.* Рассмотрим 1-форму, характеризующую изменение лоренцевой временной координаты в сторону будущего — поверхности $x^0 = \ldots, 7, 8, 9, \ldots$. Соответствующий вектор направлен в прошлое [фиг. 2.7 или уравнение (2.14)]; описание с его помощью нормального течения времени не так уж привлекательно!



ФИГ. 2.7.

Несколько векторов **A**, **B**, **C**, **D**, **E** и соответствующие им 1-формы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{E}}$. Нарисовать $\tilde{\mathbf{U}}$, которая ставится в соответствие вектору **U**, довольно легко. 1. Расположите поверхности $\tilde{\mathbf{U}}$ ортогонально вектору **U**. [Почему? Потому что любой вектор **V**, перпендикулярный **U**, не должен пересекать поверхностей **U** ($0 = \mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = \langle\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{V}\rangle$), а значит, должен принадлежать поверхности $\tilde{\mathbf{U}}$.] 2. Разместите поверхности $\tilde{\mathbf{U}}$ таким образом, чтобы количество поверхностей, пересекаемых некоторым произвольным вектором **Y** (например, **Y** = **U**) было равно **Y**·**U**.

Следует отметить, что поверхности $\tilde{\mathbf{B}}$ на самом деле ортогональны **B**, поверхности $\tilde{\mathbf{C}}$ на самом деле ортогональны **C** и т. д. Если они таковыми не кажутся, то только потому, что читатель приписывает пространственно-временному изображению эвклидову геометрию, а не лоренцеву. Он должен помнить, например, что так как **C** — нулевой вектор, то он ортогонален самому себе (**C**·**C** = 0), а поэтому сам должен лежать в плоскости 1-формы $\tilde{\mathbf{C}}$. Те, кому трудно ориентироваться в пространственно-временных чертежах, могут ознакомиться с ними по элементарным руководствам, например [81].

Тильда над 1-формой $\tilde{\mathbf{p}}$, соответствующей вектору **p**, часто опускается, и для обозначения обоих используется один и тот же символ **p**. Такое упрощение оправдано тем, что между **p** и $\tilde{\mathbf{p}}$ существует взаимно однозначное соответствие (как математическое, так и физическое).

2.1. **УПРАЖНЕНИЕ**

Покажите, что уравнение (2.14) согласуется с квантовомеханическими свойствами волны де Бройля

$$\psi = e^{i\Phi} = \exp\left[i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t\right)\right].$$

Дополнение 2.2. УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ, В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ МЕТРИКА

Упражнение. Покажите, что квадрат длины 4-скорости пробной частицы равен -1.

Решение. В произвольной лоренцевой системе, используя компоненты (2.2), легко находим

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = -\frac{1}{1-v^2} + \frac{v^2}{1-v^2} = -1.$$

Упражнение. Покажите, что масса покоя частицы, ее импульс и энергия связаны знаменитым соотношением

$$(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2,$$

или, что то же самое (в геометрических единицах!),

$$m^2 = E^2 - p^2.$$

Первое решение. 4-импульс определен как $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ есть 4-скорость, а m — масса покоя. Следовательно, квадрат его длины

$$\mathbf{p}^2 = m^2\mathbf{u}^2 = -m^2 = -(mu^0)^2 + m^2\boldsymbol{u}^2 = \underbrace{-\frac{m^2}{1-v^2}}_{\uparrow E^2} + \underbrace{\frac{m^2v^2}{1-v^2}}_{\uparrow p^2}.$$

Второе решение. В системе наблюдателя, где измеряются E и $\boldsymbol{p}$, 4-импульс распадается на временну́ю и пространственную составляющие

$$p^0 = E, \quad p^1\mathbf{e}_1 + p^2\mathbf{e}_2 + p^3\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{p},$$

а, значит, квадрат его длины

$$\mathbf{p}^2 = -E^2 + \boldsymbol{p}^2.$$

Но в системе, где частица покоится, $\mathbf{p}$ распадается на составляющие

$$p^0 = m, \quad p^1 = p^2 = p^3 = 0;$$

следовательно, квадрат его длины равен $\mathbf{p}^2 = -m^2$. Однако квадрат длины является геометрическим объектом, определенным вне зависимости от каких-либо систем координат, поэтому различные методы его вычисления должны приводить к одному и тому же результату:

$$-\mathbf{p}^2 = m^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2.$$

§ 2.6. ГРАДИЕНТЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ

Градиент функции как 1-форма

Простейшей 1-формой является *градиент* $\mathbf{d}f$ функции f. Градиент — 1-форма? Как это может быть? Ведь всегда считалось, что градиент — это вектор. Да, но только потому, что нам не было знакомо более подходящее понятие 1-формы. Градиент, который нам более знаком, — это всего лишь вектор, поставленный в соответствие с помощью уравнения (2.14) 1-форме градиента. Гиперплоскости, характеризующие $\mathbf{d}f$ в точке $\mathcal{P}_0$ представляют собой поверх-

ности уровня самой функции f с точностью до процедуры приближения их плоскостями и размещения через равные промежутки (см. фиг. 2.5, на которой ϕ следует отождествить с f). Точнее, они являются поверхностями уровня для линейной функции, аппроксимирующей f в бесконечно малой окрестности точки $\mathcal{P}_0$.

Почему возникло название «градиент» [1])? Потому что $\mathbf{d}f$ в первом порядке описывает изменение функции f в окрестности $\mathcal{P}_0$:

$$f(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}_0) + \langle \mathbf{d}f, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle + \text{нелинейные члены}. \quad (2.15)$$

(В качестве сравнения полезно вспомнить, что фундаментальное понятие «производная» чего-либо означает «наилучшая линейная аппроксимация этого чего-либо в точке»,— трактовка, применимая даже в случае функций, аргументами и значениями которых являются бесконечномерные векторы! См., например, [92].)

Возьмем некоторый вектор $\mathbf{v}$, построим кривую $\mathcal{P}(\lambda)$, определяемую равенством $\mathcal{P}(\lambda) - \mathcal{P}_0 = \lambda\mathbf{v}$, и продифференцируем функцию f вдоль этой кривой:

$$\partial_{\mathbf{v}} f = (d/d\lambda)_{\lambda=0} f[\mathcal{P}(\lambda)] = (df/d\lambda)_{\mathcal{P}_0}. \quad (2.16a)$$

«Дифференциальный оператор»

$$\partial_{\mathbf{v}} = (d/d\lambda)_{\text{при}\lambda=0, \text{вдоль кривой } \mathcal{P}(\lambda) - \mathcal{P}_0 = \lambda\mathbf{v}}, \quad (2.16б)$$

который производит это дифференцирование, называется *«оператором производной по направлению вектора* $\mathbf{v}$*»*. Производная по направлению $\partial_{\mathbf{v}} f$ и градиент $\mathbf{d}f$ тесно связаны. Это сразу видно, если применить $\partial_{\mathbf{v}}$ к уравнению (2.15) и вычислить результат в точке $\mathcal{P}_0$, что дает

$$\partial_{\mathbf{v}} f = \langle \mathbf{d}f, d\mathcal{P}/d\lambda \rangle = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle. \quad (2.17)$$

Определение оператора производной по направлению

Выраженный словами, этот результат гласит: $\mathbf{d}f$ — линейная машина для вычисления скорости изменения f вдоль произвольного вектора $\mathbf{v}$. Введя $\mathbf{v}$ в $\mathbf{d}f$, на выходе получаем $\partial_{\mathbf{v}} f$ («число пересекаемых плоскостей, число ударов колокола») — число, которое при достаточно малом $\mathbf{v}$ равно просто приращению f между основанием и острием вектора $\mathbf{v}$.

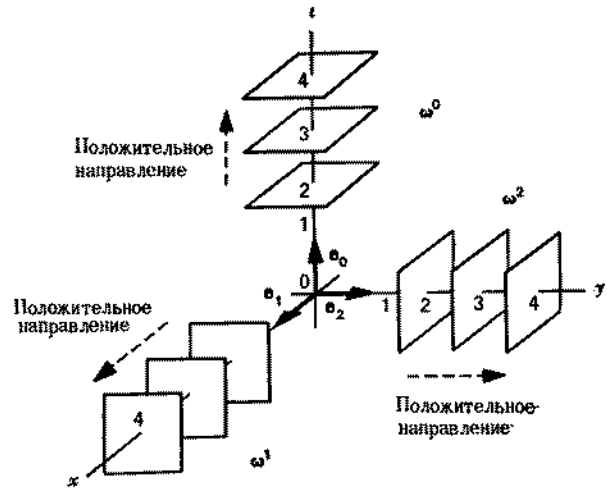
§ 2.7. КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В плоском пространстве-времени особое внимание уделяется лоренцевым системам отсчета. Координаты в лоренцевой системе $x^0(\mathcal{P})$, $x^1(\mathcal{P})$, $x^2(\mathcal{P})$, $x^3(\mathcal{P})$ являются функциями, и мы можем вычислить их градиенты. В качестве гиперплоскостей каждой из получающихся в результате «базисных 1-форм»

$$\omega^\alpha = \mathbf{d}x^\alpha \quad (2.18)$$

Базисные 1-формы

[1]) Английское слово «gradient» имеет значение «скат, уклон».— *Прим. перев.*



ФИГ. 2.8.
Базисные векторы и 1-формы некоторой конкретной лоренцевой системы координат. Базисные 1-формы расположены так, что $\langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$.

выступают координатные поверхности $x^\alpha = \text{const}$ (фиг. 2.8). Следовательно, базисный вектор $\mathbf{e}_\alpha$ пересекает ровно одну поверхность базисной 1-формы $\boldsymbol{\omega}^\alpha$, тогда как остальные три вектора параллельны поверхностям $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ и не пересекают ни одной из них:

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta. \tag{2.19}$$

(Говорят, что совокупности базисных 1-форм $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ и базисных векторов $\{\mathbf{e}_\beta\}$, обладающие этим свойством, «*дуальны*» друг другу.)

Разложение 1-формы по базису

Точно так же, как произвольный вектор можно разложить по базису $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, произвольную 1-форму можно разложить по $\boldsymbol{\omega}^\beta$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta. \tag{2.20}$$

Коэффициенты разложения σ_β называются «компонентами $\boldsymbol{\sigma}$ в базисе $\boldsymbol{\omega}^\beta$».

Вычисление компонент вектора и 1-формы и обращение с ними

Эти определения приводят к изящному вычислительному формализму: вычислим с помощью уравнений (2.19) и (2.20), сколько поверхностей $\boldsymbol{\sigma}$ пересекает базисный вектор $\mathbf{e}_\alpha$:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \langle \sigma_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \sigma_\beta \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \sigma_\beta \delta^\beta{}_\alpha,$$

т. е.

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \sigma_\alpha. \tag{2.21а}$$

Аналогичная процедура для произвольного вектора $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\beta v^\beta$ позволяет найти $\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{v} \rangle$:

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{v} \rangle = v^\alpha. \tag{2.21б}$$

Умножая уравнение (2.21а) на v^α и суммируя либо умножая (2.21б) на σ_α и суммируя, получаем в обоих случаях один и тот же результат

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \sigma_\alpha v^\alpha. \tag{2.22}$$

Это выражение позволяет, используя компоненты, вычислить $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle$, не зависящее от системы координат.

В каждой лоренцевой системе любой геометрический объект или соотношение имеет свое представление, зависящее от системы координат: вектор $\mathbf{v}$ представлен своими компонентами v^α, 1-форма $\boldsymbol{\sigma}$ — своими компонентами σ_α, точка $\mathcal{P}$ — своими координатами x^α, соотношение $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = 17{,}3$ представлено в виде $\sigma_\alpha v^\alpha = 17{,}3$.

Чтобы найти координатное представление оператора производной по направлению $\partial_{\mathbf{v}}$, перепишем уравнение (2.16б) и произведем элементарные выкладки

$$\partial_{\mathbf{v}} = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\mathcal{P}_0} = \underbrace{\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)_{\text{в } \mathcal{P}_0 \text{ вдоль } \mathcal{P}(\lambda) - \mathcal{P}_0 = \lambda \mathbf{v}}}_{v^\alpha, \text{ см. уравнение (2.3)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right),$$

в результате получаем

Производная по направлению, выраженная через координаты

$$\partial_{\mathbf{v}} = v^\alpha \partial/\partial x^\alpha. \tag{2.23}$$

В частности, производная вдоль базисного вектора $\mathbf{e}_\alpha$ (компоненты $[\mathbf{e}_\alpha]^\beta = \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta{}_\alpha$) имеет вид

$$\partial_\alpha \equiv \partial_{\mathbf{e}_\alpha} = \partial/\partial x^\alpha. \tag{2.24}$$

Это должно быть ясно также из фиг. 2.8.

Компоненты градиента

Компоненты 1-формы градиента $\mathbf{d}f$, обозначаемые $f_{,\alpha}$,

$$\mathbf{d}f = f_{,\alpha} \boldsymbol{\omega}^\alpha \tag{2.25а}$$

легко вычислить, используя приведенные выше формулы:

$$f_{,\alpha} = \begin{cases} \langle \mathbf{d}f, \mathbf{e}_\alpha \rangle & \text{[обычный способ вычисления компонент, уравнение (2.21а)],} \\ \partial_\alpha f & \text{[из соотношения (2.17) между градиентом и производной по направлению],} \\ \partial f/\partial x^\alpha & \text{[из уравнения (2.24)].} \end{cases}$$

Таким образом, компонентами $\mathbf{d}f$ являются частные производные вдоль координатных осей:

$$f_{,\alpha} = \partial f/\partial x^\alpha, \text{ т. е. } \mathbf{d}f = (\partial f/\partial x^\alpha)\, \mathbf{d}x^\alpha, \tag{2.25б}$$

что вполне согласуется с простейшей трактовкой градиента в дифференциальном исчислении. (Напомним, что $\boldsymbol{\omega}^\alpha = \mathbf{d}x^\alpha$.) Из формулы $\mathbf{d}f = (\partial f/\partial x^\alpha)\mathbf{d}x^\alpha$ напрашивается правильный вывод, что $\mathbf{d}f$ являет-

ся строгой формой «дифференциала», используемого в обычном анализе; см. дополнение 2.3.

Другие важные координатные представления геометрических соотношений исследуются в приведенных ниже упражнениях.

УПРАЖНЕНИЯ Выведите следующие формулы, полезные при вычислениях.

2.2. Опускание индекса, в результате которого получается 1-форма, соответствующая данному вектору

Компоненты u_α 1-формы $\tilde{\mathbf{u}}$, которая соответствует вектору $\mathbf{u}$, могут быть получены «опусканием индекса» с помощью метрических коэффициентов $\eta_{\alpha\beta}$:

$$u_\alpha = \eta_{\alpha\beta}u^\beta, \text{ т. е. } u_0 = -u^0, \quad u_k = u^k. \tag{2.26а}$$

2.3. Поднятие индекса, в результате которого восстанавливается вектор

Можно снова получить компоненты вектора $\mathbf{u}$, поднимая индексы

$$u^\alpha = \eta^{\alpha\beta}u_\beta; \tag{2.26б}$$

матрица $\| \eta^{\alpha\beta} \|$ по определению обратна матрице $\| \eta_{\alpha\beta} \|$ и в данном случае совпадает с ней:

$$\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} \equiv \delta^\alpha{}_\gamma, \quad \eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \text{ для всех } \alpha, \beta. \tag{2.27}$$

2.4. Различные способы вычисления скалярного произведения

Скалярное произведение $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ можно вычислить любым из следующих способов:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^\alpha v^\beta \eta_{\alpha\beta} = u^\alpha v_\alpha = u_\alpha v_\beta \eta^{\alpha\beta}. \tag{2.28}$$

Дополнение 2.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

«Внешняя производная», или «градиент» $\mathbf{d}f$ функции f является более строгой формой простейшего понятия «дифференциал».

В элементарных учебниках дифференциал df вводится таким образом, что он характеризует «бесконечно малое изменение функции $f(\mathcal{P})$», соответствующее некоторому бесконечно малому смещению точки $\mathcal{P}$; но мы легко припоминаем, что на смещение $\mathcal{P}$ не накладывается никаких ограничений, кроме бесконечной малости. Таким образом, df характеризует изменение f в некотором неопределенном направлении.

Но это как раз то, что характеризует внешняя производная $\mathbf{d}f$. Выберем какое-нибудь конкретное бесконечно малое смещение $\mathbf{v}$ точки $\mathcal{P}$. Результатом пересечения $\mathbf{d}f$ вектором смещения $\mathbf{v}$ является число $\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle = \partial_{\mathbf{v}} f$. Это число равно

изменению f при переходе от основания вектора $\mathbf{v}$ к его острию. Значит, $\mathbf{d}f$ перед тем, как его пересекает $\mathbf{v}$ (в результате чего получается число), характеризует изменение f в направлении, которое не задано. Пересечение $\mathbf{d}f$ вектором $\mathbf{v}$ является действием, конкретизирующим направление, в котором требуется найти изменение. Единственный недостаток определения из учебника состоит в том, что под $\mathbf{d}f$ подразумевается скаляр, или число; ясно осознав, что для того, чтобы свести $\mathbf{d}f$ к числу $\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle$, необходимо задать направление $\mathbf{v}$, мы приходим к выводу, что в действительности $\mathbf{d}f$ является 1-формой, градиентом f.

§ 2.8. ЦЕНТРИФУГА И ФОТОН

Векторы, метрика, 1-формы, функции, градиенты, производные по направлениям— все эти геометрические объекты и многие другие используются в плоском пространстве-времени для представления физических величин; все законы физики должны выражаться с помощью таких геометрических объектов.

Геометрические объекты в действии: пример с центрифугой и фотоном

В качестве примера рассмотрим эксперимент, в котором с высокой точностью измеряется красное смещение с использованием эффекта Мёссбауэра (фиг. 2.9). Излучатель и приемник фотонов установлены на ободе центрифуги в точках, отстоящих друг от друга на угол α, измеренный в инерциальной лаборатории. Излучатель и приемник по лабораторным измерениям находятся на радиусе r, а центрифуга вращается с угловой скоростью ω. *Задача*: Как по данным ω, r и α найти красное смещение

$$z = (\lambda_{\text{принимаемое}} - \lambda_{\text{излученное}})/\lambda_{\text{излученное}},$$

которое получится из измерений?

ФИГ. 2.9
Центрифуга и фотон.

Решение: Пусть $\mathbf{u}_e$—4-скорость излучателя в момент излучения данного фотона, $\mathbf{u}_a$—4-скорость приемника в момент поглощения этого фотона, $\mathbf{p}$ — 4-импульс фотона. Все три величины являются векторами, определенными без обращения к координатам. Никакого отношения к координатам не имеют и энергии фотона E_e и E_a, измеренные излучателем и приемником. Для описания того факта, что данный излучатель, излучая данный фотон, сообщает ему энергию E_e, координаты также не нужны, как не нужны они и для того, чтобы написать геометрическое сооотношение для E_e:

$$E_e = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_e. \tag{2.29}$$

[В том, что эта формула верна, можно убедиться, вспомнив, что в системе покоя излучателя $u_e^0 = 1$, а $u_e^j = 0$; тогда

$$E_e = -p_\alpha u_e^\alpha = -p_0 = +p^0$$

в соответствии с отождествлением (временная компонента 4-импульса) = (энергия).] Аналогично (2.29) чисто геометрическим является и выражение

$$E_a = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_a$$

для поглощаемой энергии.

Отношение принимаемой длины волны к излучаемой длине волны обратно отношению энергий (так как $E = h\nu = hc/\lambda$):

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{E_e}{E_a} = \frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_e}{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_a}.$$

Это отношение легче всего вычислить в инерциальной лабораторной системе отсчета

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{p^0u_e^0 - p^ju_e^j}{p^0u_a^0 - p^ju_a^j} = \frac{p^0u_e^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_e}{p^0u_a^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_a}. \tag{2.30}$$

(Здесь и ниже для трехмерных векторов в данной лоренцевой системе используются полужирные латинские буквы, а при выкладках с ними употребляются обычные обозначения и формализм векторного анализа в трехмерном эвклидовом пространстве.) Поскольку величина обычной скорости обода центрифуги $v = \omega r$ не изменяется во времени, u_e^0 и u_a^0 равны друг другу, и величины (но не направления) $\boldsymbol{u}_e$ и $\boldsymbol{u}_a$ совпадают:

$$u_e^0 = u_a^0 = (1-v^2)^{-1/2}, \quad |\boldsymbol{u}_e| = |\boldsymbol{u}_a| = v/(1-v^2)^{1/2}.$$

Из геометрии эксперимента (фиг. 2.9) видно, что $\boldsymbol{u}_e$ составляет с $\boldsymbol{p}$ тот же угол, что и $\boldsymbol{u}_a$. Следовательно, $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_a$, и $\lambda_{\text{принимаемое}}/\lambda_{\text{излученное}} = 1$. *Красное смещение отсутствует!*

Отметим, что при решении совершенно не использовались преобразования Лоренца — о них еще и речи не было в этой книге! Достоинства геометрической точки зрения, не использующей координат, налицо!

УПРАЖНЕНИЯ

Чтобы пользоваться геометрической точкой зрения, необходимы многочисленные точки соприкосновения с экспериментом на языке, свободном от координат. Одной из таких точек соприкосновения является выражение $E = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ для энергии фотона с 4-импульсом $\mathbf{p}$, измеренной наблюдателем с 4-скоростью $\mathbf{u}$. Убедитесь в наличии и других точек соприкосновения, указанных ниже.

2.5. Энергия и скорость как функции 4-импульса

Наблюдатель, имеющий 4-скорость $\mathbf{u}$, изучает частицу с4-импульсом $\mathbf{p}$ и массой покоя m. Покажите, что наряду с

а) измеренным им значением энергии

$$E = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}, \tag{2.31}$$

б) он приписывает частице массу покоя

$$m^2 = -\mathbf{p}^2, \tag{2.32}$$

в) импульс, который он измеряет, равен

$$|p| = [(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2 + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})]^{1/2}, \tag{2.33}$$

г) обычная скорость, которую он измеряет, имеет величину

$$|v| = \frac{|p|}{E} \tag{2.34}$$

($|p|$ и E определяются из формул, приведенных выше), а

д) 4-вектор $\mathbf{v}$, компоненты которого в лоренцевой системе наблюдателя имеют вид

$$v^0 = 0, \quad v^j = (dx^j/dt)_{\text{для частицы}} = \text{обычная скорость},$$

задается выражением

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u}}{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}}. \tag{2.35}$$

2.6. Градиент температуры

Каждому событию $\mathcal{Q}$ внутри Солнца приписывается температура $T(\mathcal{Q})$ — температура горячего газа, измеренная покоящимся относительно него термометром. $T(\mathcal{Q})$ является функцией; чтобы ее определить и ввести в рассмотрение, координаты не нужны. Космический луч из внешнего пространства пролетает сквозь Солнце с 4-скоростью $\mathbf{u}$. Покажите, что производная от температуры по времени, измеренному по часам этого луча, в его окрестности дается выражением

$$dT/d\tau = \partial_{\mathbf{u}} T = \langle \mathbf{d}T, \mathbf{u}\rangle. \tag{2.36}$$

В локально лоренцевой системе внутри Солнца это выражение можно записать в виде

$$\frac{dT}{d\tau} = u^\alpha \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v^j}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\partial T}{\partial x^j}. \tag{2.37}$$

В чем смысл этого результата?

§ 2.9. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Чтобы упростить вычисления, часто оперируют с компонентами векторов и 1-форм, а не на языке, свободном от координат. В такого рода выкладках иногда возникает необходимость в преобразованиях от одной лоренцевой системы отсчета к другой. Читатель уже знаком с такими преобразованиями Лоренца, но краткая сводка в дополнении 2.4 поможет ему освежить их в памяти и познакомит его с обозначениями, используемыми в этой книге.

Преобразования Лоренца: а) координат

Ключевыми объектами в преобразовании Лоренца являются матрицы $\|\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\|$ и $\|\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\|$; первая из них преобразует координаты нештрихованной системы в координаты штрихованной, а вторая — наоборот:

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} x^{\beta}, \quad x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} x^{\alpha'}. \tag{2.38}$$

Поскольку они совершают одно и то же преобразование, но в разных направлениях, они должны быть обратны одна другой:

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'}, \quad \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\Lambda^{\alpha'}{}_{\gamma} = \delta^{\beta}{}_{\gamma}. \tag{2.39}$$

Исходя из того, что 4-скорость $\mathbf{u} = (dx^{\alpha}/d\tau)\mathbf{e}_{\alpha}$ по своей природе не зависит от координат, легко получаем выражения

б) базисных векторов

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}, \quad \mathbf{e}_{\beta} = \mathbf{e}_{\alpha'}\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} \tag{2.40}$$

для базисных векторов одной системы через базисные векторы другой; из других геометрических соотношений, таких, как

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_{\alpha} v^{\alpha} = \mathbf{e}_{\beta'} v^{\beta'}, \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \sigma_{\alpha} v^{\alpha} = \sigma_{\beta'} v^{\beta'}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\alpha}\boldsymbol{\omega}^{\alpha} = \sigma_{\beta'}\boldsymbol{\omega}^{\beta'},$$

получаем следующие законы преобразования:

в) базисных 1-форм

$$\boldsymbol{\omega}^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\boldsymbol{\omega}^{\beta}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\boldsymbol{\omega}^{\alpha'}; \tag{2.41}$$

г) компонент

$$v^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} v^{\beta}, \quad v^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} v^{\alpha'}; \tag{2.42}$$

$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}, \quad \sigma_{\beta} = \sigma_{\alpha'}\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}. \tag{2.43}$$

В этих законах преобразования не нужно запоминать расположение индексов. Необходимо лишь расположить их так, чтобы 1) свободные индексы по обе стороны знака равенства занимали одинаковые позиции, а 2) индексы, по которым производится суммирование, встречались один раз вверху и один раз внизу. Тогда все будет правильно! (Примечание: индексы у Λ всегда расположены «с северо-запада на юго-восток».)

2.7. Буст в произвольном направлении

УПРАЖНЕНИЕ

Матричные компоненты наиболее употребительного из преобразований Лоренца имеют вид

$$\Lambda^{0'}{}_0 = \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \Lambda^{0'}{}_j = \Lambda^{j'}{}_0 = -\beta\gamma n^j,$$
$$\Lambda^{j'}{}_k = \Lambda^{k'}{}_j = (\gamma - 1)\, n^j n^k + \delta^{jk}, \tag{2.44}$$

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} =$ (компоненты $\Lambda^{\nu'}{}_{\mu}$, у которых β заменено на $-\beta$),

где β, n^1, n^2, n^3 — параметры, причем $n^2 \equiv (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$. Покажите, что а) эти матрицы удовлетворяют условию $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, накладываемому на преобразование Лоренца (см. дополнение 2.4); б) для наблюдателя из нештрихованной системы штрихованная система движется с обычной скоростью $\beta\boldsymbol{n}$; в) для наблюдателя из штрихованной системы нештрихованная движется с обычной скоростью $-\beta\boldsymbol{n}$ (т. е. $v^{1'} = -\beta n^1$, $v^{2'} = -\beta n^2$, $v^{3'} = -\beta n^3$); г) при движении в направлении оси z матрицы преобразования приобретают знакомый вид

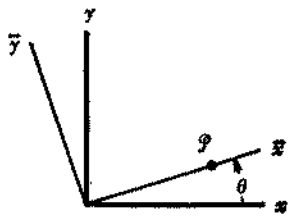
$$\| \Lambda^{\nu'}{}_{\mu} \| = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix}, \quad \| \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \| = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix}. \tag{2.45}$$

Дополнение 2.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Поворот системы отсчета на угол θ в плоскости $x - y$ [1])

Наклон $s = \operatorname{tg}\theta$, $\sin\theta = \dfrac{s}{(1+s^2)^{1/2}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{(1+s^2)^{1/2}}$

$$t = \bar{t},$$
$$x = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta,$$
$$y = \underbrace{\bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta}_{\bar{z}},$$
$$z = \bar{z}.$$



$$\bar{t} = t,$$
$$\bar{x} = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$\bar{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta,$$
$$\bar{z} = z.$$

Все знаки вытекают из знака этого члена. Он положителен, как легко установить из положения точки $\mathcal{P}$.

[1]) В литературе иногда различают понятия системы координат и системы отсчета [см., например, Зельманов А. Л., ДАН СССР, 107, 815 (1956)]. Под системой отсчета понимают совокупность всех координат, неподвижных друг относительно друга. С этой точки зрения «поворот декартовой системы координат в плоскости $x - y$» не есть переход к другой системе отсчета или реальный поворот системы отсчета со временем в пространстве. Действительно, система остается неизменной с течением времени, на ней «рисуются» две системы координат: x, y, z и $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. В данной книге авторы не делают различия между понятиями системы отсчета и системы координат.— *Прим. ред.*

Два последовательных поворота

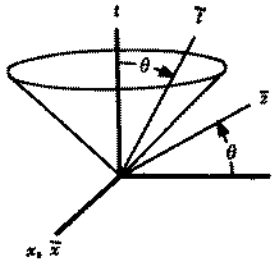
$$s = \frac{s_1 + s_2}{1 - s_1 s_2}, \quad \text{или} \quad 0 = \theta_1 + \theta_2.$$

Запуск движущейся системы отсчета («буст») [1] **с параметром скорости α в плоскости $z - t$**

Скорость $\beta = \operatorname{th}\alpha$, $\operatorname{sh}\alpha = \dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}$, $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \gamma$,

$\operatorname{tg}\theta =$ скорость $\beta = \operatorname{th}\alpha$.

$$t = \bar{t}\operatorname{ch}\alpha + \bar{z}\operatorname{sh}\alpha,$$
$$x = \bar{x},$$
$$y = \bar{y},$$
$$z = \underbrace{\bar{t}\operatorname{sh}\alpha}_{\uparrow} + \bar{z}\operatorname{ch}\alpha.$$



$$\bar{t} = t\operatorname{ch}\alpha - z\operatorname{sh}\alpha,$$
$$\bar{x} = x$$
$$\bar{y} = y,$$
$$\bar{z} = -t\operatorname{sh}\alpha + z\operatorname{ch}\alpha.$$

Все знаки вытекают из знака этого члена. Он положителен, так как объект, покоящийся при $\bar{z} = 0$ в системе, связанной с ракетой, в лабораторной системе движется в направлении увеличения z.

Матричные обозначения: $x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}}$, $x^{\bar{\nu}} = \Lambda^{\bar{\nu}}{}_\mu x^\mu$,

$$\| \Lambda^\mu{}_{\bar{\nu}} \| = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 & \operatorname{sh}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 & \operatorname{ch}\alpha \end{Vmatrix}, \quad \| \Lambda^{\bar{\nu}}{}_\mu \| = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 & -\operatorname{sh}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 & \operatorname{ch}\alpha \end{Vmatrix}.$$

4-вектор энергии-импульса

$$E = \bar{E}\operatorname{ch}\alpha + p^{\bar{z}}\operatorname{sh}\alpha,$$
$$p^x = p^{\bar{x}},$$
$$p^y = p^{\bar{y}},$$
$$p^z = \bar{E}\operatorname{sh}\alpha + p^{\bar{z}}\operatorname{ch}\alpha.$$

4-вектор плотности заряда-тока

$$\rho = \bar{\rho}\operatorname{ch}\alpha + j^{\bar{z}}\operatorname{sh}\alpha,$$
$$j^x = j^{\bar{x}},$$
$$j^y = j^{\bar{y}},$$
$$j^z = \bar{\rho}\operatorname{sh}\alpha + j^{\bar{z}}\operatorname{ch}\alpha.$$

Аберрация света, фотон приходит к наблюдателю:

$$\sin\theta = \frac{-p_\perp}{E} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}\sin\bar{\theta}}{1-\beta\cos\bar{\theta}}, \qquad \sin\bar{\theta} = \frac{-\bar{p}_\perp}{\bar{E}} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}\sin\theta}{1+\beta\cos\theta},$$

$$\cos\theta = \frac{-p^z}{E} = \frac{\cos\bar{\theta}-\beta}{1-\beta\cos\bar{\theta}}, \qquad \cos\bar{\theta} = \frac{-\bar{p}^{\bar{z}}}{\bar{E}} = \frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta},$$

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = e^\alpha \operatorname{tg}(\bar{\theta}/2). \qquad \operatorname{tg}(\bar{\theta}/2) = e^{-\alpha}\operatorname{tg}(\theta/2).$$

---

[1] Бустом называется преобразование системы отсчета, соответствующее конечному значению скорости.— *Прим. перев.*

Два последовательных буста в одном направлении

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}, \quad \text{или} \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Произвольная последовательность бустов и поворотов

Спинорный формализм, гл. 41.

Преобразование Пуанкаре

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} x^{\alpha'} + a^\mu.$$

Условие, накладываемое на лоренцеву часть этого преобразования:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha'\beta'}\, dx^{\alpha'}\, dx^{\beta'} = ds^2 = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_{\alpha'}\Lambda^\nu{}_{\beta'}\, dx^{\alpha'}\, dx^{\beta'},$$

или $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ (матричное уравнение, где T означает «транспонирование», или перестановку строк и столбцов).

Действие преобразования на другие величины:

$$u^\mu = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} u^{\alpha'} \quad \text{(4-скорость)} \qquad u_{\alpha'} = u_\mu \Lambda^\mu{}_{\alpha'},$$

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} p^{\alpha'} \quad \text{(4-импульс)} \qquad p_{\alpha'} = p_\mu \Lambda^\mu{}_{\alpha'},$$

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'}\Lambda^\nu{}_{\beta'} F^{\alpha'\beta'} \quad \text{(электромагнитное поле)} \qquad F_{\alpha'\beta'} = F_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_{\alpha'}\Lambda^\nu{}_{\beta'},$$

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}_\mu \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \quad \text{(базисные векторы)},$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\mu \boldsymbol{\omega}^\mu \quad \text{(базисные 1-формы)},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\alpha'} u^{\alpha'} = \mathbf{e}_\mu u^\mu = \mathbf{u} \quad (\textit{вектор}\ \text{4-скорости}).$$

§ 2.10. СТОЛКНОВЕНИЯ

Какой бы физический объект ни рассматривался — будь то отдельная движущаяся масса, поток жидкости, поле сил, геометрия самого пространства,— в классической общей теории относительности он описывается своим геометрическим объектом определенного типа. Построение каждого такого объекта либо непосредственно основано на понятии идентифицируемой точки, либо происходит путем абстрагирования от него; но в любом случае этот объект не нуждается в координатах для своего представления. Мы видели, как такое описание, не использующее координат, можно перевести на язык координат и компонент и наоборот; и как с помощью преобразований Лоренца преобразуются компоненты в локально лоренцевых системах отсчета. Перейдем теперь к двум простейшим приложениям этого математического аппарата, касающимся движущейся массы. Одно из них имеет дело с короткодействующими силами (столкновения, данный параграф), другое — с электромагнитными силами, действующими на значительном протяжении (формула для силы Лоренца, следующая глава).

Рассеяние частиц

При столкновении все изменение импульса происходит за промежуток времени, малый по сравнению со временем наблюдения. Более того, мишень, как правило, настолько мала и настолько сильно проявляются квантовомеханические эффекты, что правильным является лишь вероятностное описание. Величина

$$d\sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta d\Omega \tag{2.46}$$

представляет собой сечение (см^2) рассеяния в элемент телесного угла $d\Omega$ при угле отклонения θ; более сложное выражение представляет вероятность того, что исходная частица влетает в элемент телесного угла $d\Omega$ с данным полярным углом θ и азимутом ϕ с энергией между E и $E + dE$ и одновременно продукты реакции вылетают тоже в определенных интервалах энергии и в определенные телесные углы. Хотя это один из увлекательных разделов атомной физики, было бы неуместно заниматься здесь вычислением таких сечений. Достаточно отметить, что сечение — это площадка, ориентированная перпендикулярно траектории падающей частицы. Поэтому оно не изменяется при переходе в систему координат, движущуюся вдоль траектории, при условии, конечно, что соответствующим образом преобразуются энергии и углы разлета частиц («одни и те же события в разных системах отсчета»).

Однако, как следует из локального динамического рассмотрения, наряду с любым подробным описанием соударения такого рода, всегда выполняется закон сохранения энергии-импульса:

Сохранение энергии-импульса при столкновении

$$\sum_{\substack{\text{начальные}\\ \text{частицы, } J}} \mathbf{p}_J = \sum_{\substack{\text{конечные}\\ \text{частицы, } K}} \mathbf{p}_K. \tag{2.47}$$

Уже из одного этого соотношения, не прибегая к более подробному анализу, можно получить следующие простые результаты: 1) фотон, распространяющийся в виде плоской волны в пустом пространстве, не может расщепиться (это несправедливо в случае фокусированного фотона!); 2) если электрон с большой энергией упруго сталкивается с покоящимся электроном, и после этого они разлетаются с одинаковыми энергиями, то угол между их направлениями разлета меньше ньютоновского значения 90°, и разность между ними служит простой мерой энергии первичного электрона; 3) выражение для доли кинетической энергии, которую электрон передает протону при центральном упругом соударении, имеет различный вид в трех предельных случаях, соответствующих нерелятивистской, релятивистской и ультрарелятивистской энергиям электрона; 4) порог рождения пары (e^+, e^-) фотоном в поле сил массивного ядра равен $2m_e$; 5) порог рождения пары (e^+, e^-) фотоном при соударении с покоящимся электроном равен $4m_e$ (или $4m_e - \varepsilon$, если учесть энергию связи очень легкой «молекулы», которую могут образовать $e^+e^-e^-$). Все эти результаты (темы для отдельных упражнений!) и целый ряд других можно получить из закона сохранения энергии-импульса. Подробнее об этом см. [57, 58], а также гл. 4 и последнюю часть гл. 5 в книге [59]

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В наш век электричества вращающийся якорь
каждого генератора и каждого электромотора
неустанно провозглашает справедливость
теории относительности — нужно лишь уметь слушать.

Л. ПЭЙДЖ

§ 3.1. СИЛА ЛОРЕНЦА И ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь случай плавного изменения импульса заряженной частицы под действием электрических и магнитных сил, противоположный обсуждавшемуся в конце гл. 2 процессу передачи импульса при соударениях.

Пусть на совокупность заряженных частиц действуют электрическое и магнитное поля. Ускорения частиц позволяют судить о силе электрического и магнитного полей. Другими словами, можно считать, что выражение для силы Лоренца в совокупности с измеренными компонентами ускорения пробных частиц позволяет определить компоненты электрического и магнитного полей. После того как по ускорениям каких-либо пробных частиц определены компоненты поля, их можно использовать для определения ускорений других пробных частиц (дополнение 3.1). Таким образом, выражение для силы Лоренца играет двоякую роль: 1) дает определение поля и 2) позволяет предсказать движение заряженных частиц.

Сила Лоренца позволяет как дать определение поля, так и предсказать движение

Как неоднократно подчеркивал Анри Пуанкаре, в этой и других областях науки уже устарел принцип, утверждающий: «Прежде, чем излагать, дай определение используемым понятиям». Все физические законы и теории, в том числе и закон Лоренца, обладают тем глубоким и трудноуловимым свойством, что в них как дается определение используемых понятий (здесь $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{E}$*), так и делаются утверждения о них. Напротив, отсутствие какой-то основной теории, закона или принципа лишает возможности дать исчерпывающее определение понятиям и даже их использовать.*

В некотором смысле любой шаг вперед в человеческом познании является поистине созиданием: теория, концепция, закон и способ измерения — всегда неразделимые — появляются в неразрывном единстве.

Трехмерная форма записи формулы Лоренца

Формула Лоренца, записанная в привычном трехмерном виде, где $\boldsymbol{E}$ — электрическое поле, $\boldsymbol{B}$ — магнитное поле, $\boldsymbol{v}$ — обычная скорость частицы, $\boldsymbol{p}$ — импульс частицы, а e — ее заряд, имеет вид

$$(d\boldsymbol{p}/dt) = e\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{3.1}$$

Хотя такая форма записи и может оказаться исключительно полезной, тем не менее она далека от геометрической формы в духе Эйнштейна. Чисто геометрическое уравнение должно содержать 4-вектор энергии-импульса пробной частицы $\mathbf{p}$, а не одну только пространственную его часть $\boldsymbol{p}$, измеренную в некоторой лоренцевой системе: из него должна определяться скорость изменения импульса, измеренная не каким-то конкретным лоренцевым наблюдателем (d/dt), а измеренная по единственным часам, которые присутствуют в задаче априори, — по собственным часам пробной частицы $(d/d\tau)$. Таким образом, левая часть чисто геометрического уравнения должна иметь вид

$$d\mathbf{p}/d\tau.$$

Правая часть — 4-сила Лоренца — также должна представлять собой объект, не зависящий от системы отсчета. Она должна быть линейной относительно 4-скорости частицы $\mathbf{u}$, так как зависящее от системы отсчета выражение

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = e\,(u^0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{3.2a}$$

Определение тензора электромагнитного поля

линейно относительно компонент $\mathbf{u}$. Следовательно, должна существовать линейная машина $\mathbf{F}$ — «тензор электромагнитного поля» — с одним входным каналом для ввода 4-скорости пробной частицы. Произведение того, что получается на выходе этой машины, на заряд частицы должно представлять собой электромагнитную 4-силу, действующую на эту частицу:

Геометрическая форма выражения для силы Лоренца

$$d\mathbf{p}/d\tau = e\mathbf{F}\,(\mathbf{u}). \tag{3.3}$$

Сравнивая это геометрическое уравнение с первоначальным выражением для силы Лоренца (3.2а) и с соответствующим ему законом изменения энергии

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathbf{s}} \tag{3.2б}$$

можно найти компоненты $\mathbf{F}$ в некоторой определенной лоренцевой системе. Компонентами $d\mathbf{p}/d\tau$ являются $dp^\alpha/d\tau$, а компоненты $e\mathbf{F}\,(\mathbf{u})$ можно записать в виде $eF^\alpha{}_\beta u^\beta$ (определение $F^\alpha{}_\beta$!). Следовательно, выражение

$$dp^\alpha/d\tau = eF^\alpha{}_\beta u^\beta \tag{3.4}$$

должно сводиться к выражениям (3.2а, б). И это действительно имеет место, если отождествить

$$\| F^{\alpha}{}_{\beta} \| = \begin{array}{c} \\ \alpha=0 \\ \alpha=1 \\ \alpha=2 \\ \alpha=3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta=0 & \beta=1 & \beta=2 & \beta=3 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{Vmatrix} \end{array}. \tag{3.5}$$

Компоненты тензора электромагнитного поля

В литературе чаще встречаются «ковариантные компоненты», получающиеся в результате опускания индекса с помощью компонент метрики:

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} F^{\gamma}{}_{\beta}; \tag{3.6}$$

при этом

$$\| F_{\alpha\beta} \| = \begin{Vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.7}$$

Это матричное уравнение демонстрирует единство электрического и магнитного полей. Ни одно из них само по себе — ни $\boldsymbol{E}$, ни $\boldsymbol{B}$ — не является геометрическим объектом, не зависящим от системы отсчета. Но слитые воедино в объекте $\mathbf{F}$, они обретают смысл и значение, выходящие за рамки координат и систем отсчета.

3.1. УПРАЖНЕНИЕ

Выведите уравнения (3.5) и (3.7) для компонент $\mathbf{F}$, сравнив (3.4) с (3.2а, б) и использовав определение (3.6).

Дополнение 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ И ПРЕДСКАЗАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ФОРМУЛЕ ЛОРЕНЦА

Процедура определения компонент электромагнитного поля по измеренным ускорениям в принципе совпадает с аналогичной процедурой для гравитационного поля. Сравним уравнения для двух случаев:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = \frac{e}{m} F^{\alpha}{}_{\beta} u^{\beta} \quad \text{в лоренцевой системе} \tag{1}$$

и

$$\frac{D^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} = -R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \xi^{\gamma} u^{\delta} \quad \text{в произвольной системе координат.} \tag{2}$$

Разобрав более простую процедуру для электромагнитного поля, мы тем самым укажем в общих чертах, как в теории тяготения подобным же образом определяются

все компоненты $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$. Начнем с вопроса о том, сколько нужно пробных частиц, чтобы определить в изучаемой окрестности три компоненты $\boldsymbol{B}$ и три компоненты $\boldsymbol{E}$. Можно измерить три компоненты ускорения для одной частицы, и еще три — для другой. Достаточно ли этого? Нет! Информация, полученная от первой частицы, частично дублируется в информации, полученной от второй. Вот доказательство. Как бы ни двигалась первая частица, выбираем лоренцеву систему, движущуюся точно так же. Покоящаяся в этой системе частица не реагирует на присутствие магнитного поля. На нее действует только электрическое поле. Три компоненты ускорения этой частицы сразу же дают три компоненты E_x, E_y, E_z электрического поля. Если мы хотим получить дополнительную информацию от второй пробной частицы, то она не должна покоиться. Направим ось x системы отсчета параллельно направлению движения второй частицы. Теперь на нее действуют компоненты магнитного поля B_y и B_z, и мы можем их определить. Но мы не можем определить B_x! Измерив ускорение вдоль оси x, мы еще раз определим уже известное E_x. Для определения B_x необходима третья пробная частица, но при этом мы лишний раз получим уже известную информацию о других компонентах поля. Каков же выход? Используем одновременно на равных правах все N частиц как для определения шести компонент $F_{\alpha\beta}$, так и для проверки формулы Лоренца, применив метод наименьших квадратов. Для этого запишем разность между предсказываемым и наблюдаемым ускорениями K-й частицы в виде

$$\dot{u}_{\alpha}{}^{K} - \frac{e}{m} F_{\alpha\beta} u^{\beta,\,K} = \delta a_{\alpha}{}^{K}. \tag{3}$$

Возведем эту разность в квадрат и просуммируем по всем частицам:

$$S = \sum_{K} \eta^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha}{}^{K} \delta a^{K}{}_{\beta}. \tag{4}$$

В этом выражении мы считаем известным все, кроме шести компонент $F_{\alpha\beta}$. Минимизируя его по отношению к этим шести неизвестным, получаем шесть уравнений для компонент $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$. Разрешив эти уравнения, возвращаемся к уравнению (3) и проверяем формулу Лоренца.

Если имеются только две пробные частицы, то детерминант 6×6 матрицы коэффициентов в уравнениях для $F_{\alpha\beta}$ тождественно обращается в нуль. Аналогичные рассуждения позволяют определить минимальное число пробных частиц, необходимое для определения всех компонент риманова тензора кривизны.

§ 3.2. ТЕНЗОРЫ В САМОМ ОБЩЕМ ВИДЕ

Примеры тензоров

Здесь необходимо сделать небольшое отступление. В ходе изложения мы ввели несколько различных тензоров: метрический тензор $\mathbf{g}$ (§ 2.4), тензор кривизны Римана $\mathbf{R}$ (§ 1.6), тензор электромагнитного поля $\mathbf{F}$ (§ 3.1). Каждый из них был определен как линейная машина с входными каналами для векторов и выходными данными либо в виде вещественных чисел, например $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, либо в виде векторов, например $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{u})$.

Нужно ли делать различие между теми тензорами, на выходе которых получаются скаляры, и теми, на выходе которых получаются векторы? Нет! Тензор с вектором на выходе можно легко представить в виде тензора, на выходе которого получается скаляр. Возьмем, например, **F**. Добавим к нему новый входной канал для ввода произвольной 1-формы σ таким образом, чтобы на выходе получалось

$$\mathbf{F}(\sigma, \mathbf{u}) = \langle \sigma, \mathbf{F}(\mathbf{u}) \rangle = \text{вещественное число}. \tag{3.8}$$

Теперь можно выбирать: ввести ли вектор и получить на выходе другой вектор $\mathbf{F}(\ldots, \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ или ввести 1-форму и вектор и получить на выходе число $\mathbf{F}(\sigma, \mathbf{u})$. Одна и та же машина справится с обеими операциями. Более того, обе операции выполняются совсем просто, если их расписать через компоненты в данной лоренцевой системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\ldots, \mathbf{u}) &= \text{вектор с компонентами } F^{\alpha}{}_{\beta} u^{\beta}, \\ \mathbf{F}(\sigma, \mathbf{u}) &= \text{число } \langle \sigma, \mathbf{F}(\ldots, \mathbf{u}) \rangle = \sigma_{\alpha} F^{\alpha}{}_{\beta} u^{\beta}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

По аналогии можно дать определение тензора в самом общем виде: тензором **H** ранга $\binom{n}{m}$ называется линейная машина с n входными каналами для n 1-форм и с m входными каналами для m векторов, после ввода которых на выходе получается вещественное число, обозначаемое

Определение тензора как линейной машины, превращающей векторы и 1-формы в числа

$$\mathbf{H}(\underbrace{\sigma, \lambda, \ldots, \beta}_{n \text{ 1-форм}}\ \underbrace{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w}}_{m \text{ векторов}}). \tag{3.10}$$

Для большинства тензоров перестановка векторов на входе приводит к изменению числа на выходе:

$$\mathbf{R}(\sigma, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq \mathbf{R}(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \tag{3.11}$$

То же самое относится и к перестановкам 1-форм на входе.

Рассмотрим некоторый тензор **S** и положим для определенности, что его ранг равен $\binom{2}{1}$. Введем в него базисные векторы и базисные 1-формы определенной лоренцевой системы координат. Тогда на выходе получаются «компоненты **S** в этой системе»:

Компоненты тензора

$$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \equiv \mathbf{S}(\omega^{\alpha}, \omega^{\beta}, \mathbf{e}_{\gamma}). \tag{3.12}$$

Это тождество является определением компонент. Зная компоненты в определенной системе координат, легко вычислить число на выходе для любых входных 1-форм и векторов:

Действие тензорной машины, расписанное через компоненты

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\sigma, \rho, \mathbf{v}) &= \mathbf{S}(\sigma_{\alpha}\omega^{\alpha}, \rho_{\beta}\omega^{\beta}, v^{\gamma}\mathbf{e}_{\gamma}) = \\ &= \sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma}\mathbf{S}(\omega^{\alpha}, \omega^{\beta}, \mathbf{e}_{\gamma}) = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

А зная компоненты **S** в одной лоренцевой системе (нештрихованной), можно, используя матрицы преобразования Лоренца

$\| \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} \|$ и $\| \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} \|$, которые связывают эту систему с другой (штрихованной), вычислить компоненты $\mathbf{S}$ в другой (штрихованной) системе. Как показано в упражнении 3.2, для этого нужно лишь применить матрицу к каждому индексу $\mathbf{S}$, расположив матричные индексы в соответствии с правилами

Преобразование Лоренца для компонент

$$S^{\mu'\nu'}{}_{\lambda'} = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'} \tag{3.14}$$

Небольшое изменение внутреннего строения тензора позволяет вводить векторы во входные каналы, предназначенные для 1-форм. Для этого нужен лишь механизм, превращающий вводимый вектор $\mathbf{n}$ в соответствующую ему 1-форму $\tilde{\mathbf{n}}$, которая затем вводится в соответствующий канал начального тензора. Таким образом, обозначив модифицированный тензор тем же символом $\mathbf{S}$, который использовался для начального тензора, потребуем, чтобы

Модификация тензора, в результате которой в каждый входной канал можно вводить как векторы, так и 1-формы

$$\mathbf{S}(\sigma, \mathbf{n}, \mathbf{v}) = \mathbf{S}(\sigma, \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{v}), \tag{3.15}$$

или в компонентных обозначениях

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \sigma_{\alpha} n^{\beta} v^{\gamma} = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \sigma_{\alpha} n_{\beta} v^{\gamma} \tag{3.15'}$$

Последнее легко достигается поднятием и опусканием индексов тензора $\mathbf{S}$ с помощью компонент метрики:

Поднятие и опускание индексов

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \eta_{\beta\mu} S^{\alpha\mu}{}_{\gamma}, \quad S^{\alpha\mu}{}_{\gamma} = \eta^{\mu\beta} S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{3.16}$$

(см. ниже упражнение 3.3). Используя один и тот же символ $\mathbf{S}$ как для начального, так и для модифицированного тензора, мы допускаем, что в каждый входной канал может вводиться как 1-форма, так и вектор. Поэтому мы не можем уже по виду символа $\mathbf{S}$ сказать, имеет ли тензор ранг $\binom{2}{1}$, $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{0}$ или $\binom{0}{3}$; мы можем указать лишь общий его ранг 3. *Терминология*: «верхние индексы» называются «контравариантными», а «нижние» — «ковариантными». Таким образом, у $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ α — контравариантный индекс, тогда как β и γ — ковариантные индексы.

Поскольку тензоры представляют собой не что иное, как функции, их можно складывать (если у них один и тот же ранг!) и умножать на число обычным образом: после ввода векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ на выходе тензора третьего ранга $a\mathbf{S} + b\mathbf{Q}$ получается

$$(a\mathbf{S} + b\mathbf{Q})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv a\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \tag{3.17}$$

Ряд других важных операций над тензорами вводится в приведенных ниже упражнениях. Эти операции и другие результаты упражнений будут использоваться при дальнейшем изложении.

УПРАЖНЕНИЯ

3.2. Закон преобразования компонент тензора

Используя законы преобразования компонент векторов и 1-форм, выведите закон преобразования (3.14).

3.3. Поднятие и опускание индексов

Выведите уравнения (3.16) из соотношения (3.15′), воспользовавшись выражением $n_\alpha = \eta_{\alpha\beta} n^\beta$ для компонент 1-формы $\tilde{\mathbf{n}}$ через компоненты соответствующего ей вектора $\mathbf{n}$.

3.4. Тензорное произведение

Если заданы два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то тензор второго ранга $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ («тензорное произведение $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$») определяется как машина с двумя входными каналами, на выходе которой после введения 1-форм σ и λ получается число

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\sigma, \lambda) = \langle \sigma, \mathbf{u} \rangle \langle \lambda, \mathbf{v} \rangle. \tag{3.18}$$

Покажите, что компонентами $\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ являются произведения компонент $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$T^{\alpha\beta} = u^\alpha v^\beta, \quad T_\alpha{}^\beta = u_\alpha v^\beta, \quad T_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta. \tag{3.19}$$

Распространите определение на случай нескольких векторов и форм

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{w})(\sigma, \lambda, \mathbf{n}, \zeta) = \langle \sigma, \mathbf{u} \rangle \langle \lambda, \mathbf{v} \rangle \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{n} \rangle \langle \zeta, \mathbf{w} \rangle \tag{3.20}$$

и покажите, что и в этом случае выполняется правило произведения для компонент:

$$\begin{gathered} \mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{w} \text{ имеет компоненты} \\ S^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\zeta = u^\mu v^\nu \beta_\lambda w^\zeta. \end{gathered} \tag{3.21}$$

3.5. Базисные тензоры

Покажите, что тензор $\mathbf{M}$ с компонентами $M^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta$ в данной лоренцевой системе можно восстановить по его компонентам и базисным 1-формам и векторам этой системы следующим образом:

$$\mathbf{M} = M^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \otimes \mathbf{e}_\delta. \tag{3.22}$$

(Частный случай этого представления обсуждается в дополнении 3.2.)

3.6. Тензор F в действии

Наблюдатель с 4-скоростью $\mathbf{u}$ выбирает три направления в пространстве-времени, которые при наблюдении из его системы являются ортогональными и чисто пространственными (не содержат временной части). Пусть $\mathbf{e}_{\hat{1}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}$, $\mathbf{e}_{\hat{3}}$ — правовинтовая тройка

УПРАЖНЕНИЯ

единичных векторов вдоль этих направлений ($\mathbf{e}_{\hat{1}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{2}} \times \mathbf{e}_{\hat{3}} = +1$ на трехмерном языке). Почему выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{e}_{\hat{j}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{e}_{\hat{j}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{k}} = \delta_{jk}?$$

Какие векторы нужно ввести в два входных канала тензора электромагнитного поля $\mathbf{F}$, чтобы получить измеренное этим наблюдателем значение электрического поля вдоль $\mathbf{e}_{\hat{j}}$? Какие векторы нужно ввести, чтобы получить измеренное им значение магнитного поля в направлении $\mathbf{e}_{\hat{j}}$?

Дополнение 3.2. МЕТРИКА НА РАЗНЫХ ЯЗЫКАХ

А. Геометрический язык

Тензор $\mathbf{g}$ — это линейная симметричная машина с двумя входными каналами для ввода векторов. Введя векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, на выходе $\mathbf{g}$ мы получаем их скалярное произведение:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Б. Язык компонент

Компонентами метрики являются $\eta_{\mu\nu}$. Они используются для вычисления скалярного произведения двух векторов по их компонентам в некоторой лоренцевой системе:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu.$$

В. Геометрический язык, основанный на координатах

Метрику $\mathbf{g}$ можно записать через базисные 1-формы некоторой лоренцевой системы:

$$\mathbf{g} = \eta_{\mu\nu} \boldsymbol{\omega}^\mu \otimes \boldsymbol{\omega}^\nu = \eta_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$$

[см. уравнения (2.18) и (3.22)].

Г. Связь с простейшим понятием линейного элемента

В дополнении 2.3 продемонстрировано соответствие, существующее между градиентом функции $\mathbf{d}f$ и простейшим понятием df дифференциального изменения f в некотором неуказанном направлении. Подобное же соответствие существует между метрикой, записанной в виде $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$ и простейшим понятием «линейного элемента», записанного в виде $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Этот простейший линейный элемент, как объясняется во многих пособиях по специальной теории относительности, представляет собой квадрат длины смещения dx^μ в направлении, которое не конкретизируется. Но тот же смысл имеет и метрика $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$. Возьмем

определенный вектор бесконечно малого смещения ξ и введем его в $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$. На выходе мы получим $\xi^2 = \eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$, т. е. квадрат длины смещения. До введения ξ метрика $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$ обладает потенциальной способностью давать квадрат длины любого вектора; после введения ξ эта потенциальная способность превращается в действительность — численное значение ξ^2.

Поскольку метрика $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$ и линейный элемент $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ выполняют одну и ту же функцию, характеризуя квадрат длины бесконечно малого смещения в неконкретизированном направлении, с точки зрения общих представлений они полностью равнозначны. Для обозначения метрики иногда используют символы $\mathbf{ds}^2$; в целях экономии места часто пишут $\mathbf{ds}^2 = \eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu\mathbf{d}x^\nu$, опуская знак $\otimes$; иногда даже не пользуются жирным шрифтом, так что обозначения для метрики и линейного элемента полностью совпадают:

$$\mathbf{g} = \mathbf{ds}^2 = ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu.$$

§ 3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ В СРАВНЕНИИ С ТОЧКОЙ ЗРЕНИЯ 3 + 1

Огромные возможности геометрического подхода в физике

Геометрический подход в физике, развитый Эйнштейном, обладает огромными возможностями как с вычислительной точки зрения, так и с точки зрения трактовки основных понятий. Те идеи, которые кажутся сложными, если к ним подойти с повседневной точки зрения «пространство плюс время» (или «3 + 1»), оказываются простыми и изящными, если к ним подойти как к соотношениям между геометрическими объектами в четырехмерном пространстве-времени. Результаты, которые трудно получить на языке 3 + 1, гораздо легче выводятся на геометрическом языке.

Пример из теории электромагнетизма

Хорошим примером является электромагнитное поле. На геометрическом языке оно описывается антисимметричным тензором второго ранга («2-формой») $\mathbf{F}$, для определения которого не нужны координаты. Этот тензор позволяет найти значение 4-силы, действующей на каждую заряженную частицу,

$$d\mathbf{p}/d\tau = e\mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

Все так просто!

Теперь сравним это с точкой зрения 3 + 1. В данной лоренцевой системе имеются электрическое поле $\boldsymbol{E}$ и магнитное поле $\boldsymbol{B}$. Их воздействие на частицу описывается выражением

$$d\boldsymbol{p}/dt = e\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).$$

Закон преобразования электрических и магнитных полей

Но значения $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ изменяются при переходе из данной лоренцевой системы в другую систему. Например, электрические и магнитные поля для наблюдателя, находящегося в ракете (система «с чертой»), выражаются через те же поля для лабора-

торного наблюдателя (система «без черты») следующим образом:

$$\bar{E}_{\parallel}=E_{\parallel},\quad \bar{E}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_{\perp}+\beta\times B_{\perp}),$$
$$\bar{B}_{\parallel}=B_{\parallel},\quad \bar{B}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_{\perp}-\beta\times E_{\perp}). \tag{3.23}$$

(Здесь индексом $\parallel$ помечены компоненты вдоль направления движения ракеты, а индексом $\perp$ — компоненты, перпендикулярные этому направлению; $\beta^j=dx^j_{\text{ракеты}}/dt$ — обычная скорость ракеты.) Если к этому добавить еще аналогичные законы преобразования для импульса частицы p, ее обычной скорости v и временной координаты t, то лишь после этого выражение для силы Лоренца (как будто каким-то чудом, как кажется с точки зрения $3+1$) окажется справедливым во всех системах отсчета.

Геометрический подход не только намного проще, чем подход с точки зрения $3+1$, но с его помощью и уравнения в виде $3+1$ выводятся гораздо легче, чем в рамках самой точки зрения $3+1$. Рассмотрим, например, закон преобразования (3.23) для электрического и магнитного полей. При использовании геометрического подхода он выводится следующим образом: 1) Направим оси двух систем отсчета так, чтобы они двигались друг относительно друга в направлении z. 2) Применим к компонентам тензора электромагнитного поля простое преобразование Лоренца (2.45):

$$\bar{E}_{\parallel}=\bar{E}_z=F_{\bar{3}\bar{0}}=\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{3}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{0}}F_{\alpha\beta}=\gamma^2F_{30}+\beta^2\gamma^2F_{03}=(1-\beta^2)\gamma^2F_{30}=$$
$$=F_{30}=E_z=E_{\parallel}, \tag{3.24}$$
$$\bar{E}_x=F_{\bar{1}\bar{0}}=\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{1}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{0}}F_{\alpha\beta}=\gamma F_{10}+\beta\gamma F_{13}=\gamma(E_x-\beta B_y)\text{ и т. д.}$$

Подход $3+1$, напротив, гораздо более трудоемок. Стандартная процедура основана на выражениях для силы Лоренца и скорости изменения энергии (3.2а, б), записанных в несколько модифицированном виде

$$m\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2}=e\left(\vec{E}_x\frac{d\vec{t}}{d\tau}+0\,\frac{d\vec{x}}{d\tau}+\vec{B}_z\frac{d\vec{y}}{d\tau}-\vec{B}_y\frac{d\vec{z}}{d\tau}\right), \tag{3.25}$$
$$\ldots\text{(три дополнительных уравнения)}\ldots.$$

Она заключается в следующем (подробности опускаются по причине их громоздкости!):

1. Подставим вместо $d^2\bar{x}/d\tau^2$ и т. д. их значения, выраженные через $d^2x/d\tau^2$, ... (преобразование Лоренца).
2. Подставим вместо $d^2x/d\tau^2$, ... выражения для этих ускорений через лабораторные значения E и B (выражение для силы Лоренца).
3. В этих выражениях все компоненты 4-скорости $dx/d\tau$

в лабораторной системе выразим через компоненты 4-скорости в системе ракеты (обратное преобразование Лоренца).

4. В преобразованных таким образом уравнениях (3.25) потребуем выполнения равенства правых и левых частей для всех значений $d\bar{x}/d\tau$ и т. д. (справедливость для любой пробной частицы).
5. Получим отсюда значения $\bar{\boldsymbol{E}}$ и $\bar{\boldsymbol{B}}$, выраженные через $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ [выражения (3.23)].

Разница в трудоемкости очевидна!

§ 3.4. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Отвлечемся пока от воздействия поля на заряд и перейдем к рассмотрению действия заряда на поле, или, в более общем виде, к рассмотрению динамики электромагнитного поля как в случае, когда есть заряды, так и в случае, когда их нет. Начнем с простейшего из уравнений Максвелла в определенной лоренцевой системе — с уравнения, из которого следует, что отсутствуют свободные магнитные полюса:

Магнитодинамика как следствие магнитостатики

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{3.26}$$

Это уравнение должно выполняться во всех лоренцевых системах, а значит, и в системе, связанной с ракетой:

$$\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{3.27}$$

В случае бесконечно малого преобразования Лоренца в направлении x (нерелятивистская скорость β) имеем [см. дополнение 2.4 и уравнения (3.23)]

$$\bar{B}_x = B_x, \quad \bar{B}_y = B_y + \beta E_z, \quad \bar{B}_z = B_z - \beta E_y; \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.29}$$

Подставим эти выражения в условие равенства нулю дивергенции в системе ракеты. При этом мы снова получим условие нулевой дивергенции в лабораторной системе плюс следующую дополнительную информацию (из требования равенства нулю коэффициента перед сколь угодно малой скоростью β):

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \tag{3.30}$$

Если скорость, которая входит в преобразование, направить вдоль осей y и z, то можно получить аналогичные уравнения для $\partial B_y/\partial t$ и $\partial B_z/\partial t$. С помощью трехмерных векторов эти три урав-

нения сводятся к одному

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \tag{3.31}$$

Магнитодинамика и магнитостатика, сведенные в единый геометрический закон

Как это красиво — 1) принцип ковариантности (законы физики одинаковы во всех лоренцевых системах отсчета, что эквивалентно геометрическому подходу в физике) вместе с тем фактом, что 2) магнитные силовые трубки нигде не оканчиваются, приводит к 3) динамическому закону Максвелла для скорости изменения магнитного поля! Это наталкивает на мысль, что уравнение магнитостатики $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ и уравнение магнитодинамики $\partial \boldsymbol{B}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ можно свести в один геометрический закон, не зависящий от системы отсчета. Записанный через компоненты тензора поля $\mathbf{F}$, этот закон должен иметь вид

$$F_{\alpha\beta,\,\gamma} + F_{\beta\gamma,\,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\,\beta} = 0, \tag{3.32}$$

так как при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ он сводится к $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, а если каждый из индексов по очереди положить равным нулю, то он сведется к $\partial \boldsymbol{B}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ (см. ниже упражнение 3.7). На геометрическом языке, не зависящем от системы отсчета, этот закон записывается в виде (см. § 3.5, упр. 3.14, и обозначения в гл. 4)

$$\mathbf{dF} = 0, \text{ или, что эквивалентно, } \nabla \cdot {}^*\mathbf{F} = 0; \tag{3.33}$$

это можно сформулировать следующим образом: «Возьмем 2-форму электромагнитного поля $\mathbf{F}$ (геометрический объект, определенный и тогда, когда координаты отсутствуют); построим по ней новый геометрический объект $\mathbf{dF}$ («внешняя производная $\mathbf{F}$»); $\mathbf{dF}$ должно быть равно нулю». Подробности этой процедуры, не использующей координат, см. в упр. 3.15 и в § 4.5 (курс 2).

Остаются еще два уравнения Максвелла: уравнение электростатики

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{3.34}$$

и уравнение электродинамики

$$\partial \boldsymbol{E}/\partial t - \nabla \times \boldsymbol{B} = -4\pi \boldsymbol{J}. \tag{3.35}$$

Электродинамика и электростатика, сведенные в единый геометрический закон

Подобно уравнениям магнитостатики и магнитодинамики, они представляют собой две различные части одного геометрического закона. Записанный через компоненты поля, этот закон имеет вид

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta} = 4\pi J^{\alpha}, \tag{3.36}$$

где компонентами вектора «4-тока» $\mathbf{J}$ являются

$$\begin{aligned} &J^0 = \rho \text{ плотность заряда,} \\ &(J^1,\ J^2,\ J^3) \text{ компоненты вектора плотности тока.} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Записанный на геометрическом языке, свободном от координат, этот закон электродинамики имеет вид

$$\mathbf{d}{}^*\mathbf{F} = 4\pi {}^*\mathbf{J}, \text{ или, что эквивалентно, } \nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi \mathbf{J}. \tag{3.38}$$

(Подробно см. в упр. 3.15 и в § 4.5, относящемся к курсу 2.)

3.7. Уравнения Максвелла

УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, расписав в явном виде через компоненты, что геометрические законы

$$F_{\alpha\beta,\,\gamma}+F_{\beta\gamma,\,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\,\beta}=0,\quad F^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta}=4\pi J^{\alpha}$$

действительно сводятся к уравнениям Максвелла (3.26), (3.31), (3.34), (3.35), как утверждалось выше.

§ 3.5. ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ

Способы образования новых тензоров из старых:

Необходимо сделать еще одно математическое отступление. По произвольному заданному полю тензора $\mathbf{S}$, ранг которого тоже произволен (для конкретности положим его равным 3), можно с помощью различных операций построить поля новых тензоров.

Градиент

Одной из таких операций является *градиент* ∇. (Символ $\mathbf{d}$ используется для обозначения градиента скаляров, тогда $\nabla f \equiv \mathbf{d}f$, и «внешних производных дифференциальных форм»— понятие, определяемое в курсе 2, см. § 4.5.) Подобно $\mathbf{S}$, $\nabla\mathbf{S}$ является машиной. У нее четыре входных канала (если у $\mathbf{S}$ три). Она описывает изменение $\mathbf{S}$ от точки к точке. Точнее, если нужно узнать, как при смещении $\boldsymbol{\xi}$ изменяется число $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, когда $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *фиксированы*, то достаточно ввести $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\xi}$ в четыре входных канала $\nabla\mathbf{S}$:

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \partial_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ при фиксированных } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \approx \\ \approx + [\text{значение } \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ на острие } \boldsymbol{\xi}] - \\ - [\text{значение } \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ на основании } \boldsymbol{\xi}]. \qquad (3.39)\end{aligned}$$

Записанное через компоненты в лоренцевой системе это соотношение принимает вид

$$\nabla\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \partial_{\boldsymbol{\xi}}\left(S_{\alpha\beta\gamma}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}\right) = \left(\frac{\partial S_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}\xi^{\delta}\right)u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma} =$$

$$= S_{\alpha\beta\gamma,\,\delta}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}\xi^{\delta}.$$

Таким образом, компоненты $\nabla\mathbf{S}$ в лоренцевой системе представляют собой не что иное, как частные производные компонент $\mathbf{S}$. Отметим, что градиент повышает ранг тензора на единицу (с 3 до 4 в случае $\mathbf{S}$).

Свертка

Другой операцией, в результате которой из старого тензора образуется новый, является *свертка*. Она сводится к блокировке («свертке») двух входных каналов старого тензора, при которой его ранг понижается на две единицы. Точнее, если $\mathbf{R}$ — тензор четвертого ранга, а $\mathbf{M}$ является сверткой $\mathbf{R}$ по первому и третьему

входным каналам, то на выходе **M** получается (по определению!) число

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=0}^{3} \mathbf{R}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{u}, \omega^\alpha, \mathbf{v}). \tag{3.40}$$

Здесь $\mathbf{e}_\alpha$ и ω^α — базисные векторы и 1-формы некоторой произвольной лоренцевой системы координат. Не имеет никакого значения, какая выбрана система; результат всегда будет одним и тем же (упражнение 3.8 ниже). Записанное в компонентах в произвольной лоренцевой системе, выражение (3.40) принимает вид (упражнение 3.8)

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = M_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} u^\mu v^\nu,$$

так что

$$M_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}. \tag{3.41}$$

Таким образом, на языке компонент свертка равносильна размещению одного индекса вверху, а другого внизу с последующим суммированием по ним.

Дивергенция

Дивергенция — третья операция образования новых тензоров из старых. Она выполняется следующим образом: сначала вычисляется градиент, затем входной канал градиента свертывается с одним из начальных входных каналов:

$$(\text{дивергенция } \mathbf{S} \text{ по первому каналу}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{S}$$

это такая машина, что

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{S}(\omega^\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_\alpha) = S^\alpha{}_{\beta\gamma,\,\alpha} u^\beta v^\gamma, \tag{3.42}$$

т. е. компонентами $\nabla \cdot \mathbf{S}$ являются $S^\alpha{}_{\beta\gamma,\,\alpha}$

Транспозиция

Транспозиция — четвертая, довольно простая процедура для получения новых тензоров. Она сводится просто к перестановке двух каналов:

N получается транспозицией второго и третьего каналов **S** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}). \tag{3.43}$$

Симметризация и антисимметризация

Симметризация и *антисимметризация* представляют собой пятую и шестую операции, в результате которых образуются новые тензоры. Тензор совершенно симметричен, если его значение на выходе не зависит от перестановки двух векторов или 1-форм на входе:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \ldots . \tag{3.44а}$$

Тензор совершенно антисимметричен, если он меняет знак при каждой перестановке входных данных:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = +\mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \ldots . \tag{3.44б}$$

Любой тензор можно симметризовать или антисимметризовать, построив соответствующую линейную комбинацию из него самого и его транспозиций (см. упражнение 3.12).

Косое произведение — седьмая операция образования новых тензоров из старых. Оно представляет собой всего лишь антисимметризованное тензорное произведение: если даны два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то их косое произведение — «*бивектор*» $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ — определяется выражением

Косое произведение

Бивектор

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\equiv\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}; \tag{3.45а}$$

подобным же образом из двух 1-форм образуется «2-форма»

2-форма

$$\alpha\wedge\beta\equiv\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha. \tag{3.45б}$$

Из трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ можно построить «*тривектор*»:

Тривектор

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\equiv(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}\equiv\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=$$

$$=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}+(\text{члены, обеспечивающие совершенную антисимметрию})=$$

$$=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}+\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-$$

$$-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}. \tag{3.45в}$$

Из 1-форм α, β, γ подобным же образом можно построить «3-форму» $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$. Косое произведение позволяет очень просто проверять компланарность (линейную зависимость) векторов: если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны, т. е. $\mathbf{u}=a\mathbf{v}$, то

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=a\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}=0 \text{ (вследствие антисимметричности } \wedge).$$

Если $\mathbf{w}$ компланарен $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{w}=a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$ («сплющенная коробка»), то

$$\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=a\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+b\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=0.$$

Символ $\wedge$ называется «знаком внешнего произведения». Его свойства исследуются в гл. 4.

Образование дуального тензора — восьмая операция построения новых тензоров. Она имеет фундаментальное значение в курсе 2 этой книги, но так как она не нужна в курсе 1, то ее определение и свойства рассматриваются лишь в упражнениях (3.14 и 3.15).

Дуальный тензор

Поскольку геометрические обозначения, не зависящие от системы координат, до некоторой степени неоднозначны (по каким каналам происходит свертка? по какому каналу вычисляется дивергенция? по каким каналам происходит транспозиция?), то при формулировке не зависящих от координат геометрических соотношений между геометрическими объектами часто используются компонентные обозначения, Например,

$$J_{\beta\gamma}=S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\,\alpha}$$

означает: «$\mathbf{J}$ — тензор, представляющий собой дивергенцию по первому каналу тензора $\mathbf{S}$». Также

$$v^{\gamma}=(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^{;\,\gamma}\equiv(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})_{,\,\beta}\,\eta^{\beta\gamma}$$

означает: «$\mathbf{v}$ представляет собой вектор, полученный в результате 1) образования тензорного произведения $\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}$ тензора $\mathbf{F}$ на себя самого, 2) свертывания $\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}$ по первому и третьему, а также по второму и четвертому каналам, 3) вычисления градиента полученной в результате скалярной функции, 4) превращения этого градиента, который является 1-формой, в соответствующий вектор».

Жонглирование индексами

«Жонглирование индексами»— техника оперирования в компонентных обозначениях и расположения индексов в соответствии с правилами, которая позволяет выяснить содержание геометрических соотношений и которой необходимо овладеть, если читатель намеревается в дальнейшем производить сложные вычисления в теории относительности как специальной, так и общей. В дополнении 3.3 приведены некоторые элементы «жонглирования индексами», а упражнения 3.8—3.18 могут служить практикой при овладении этой техникой.

УПРАЖНЕНИЯ

3.8. Свертка не зависит от системы координат

Покажите, что свертка, определяемая выражением (3.40), не зависит от того, в какой лоренцевой системе мы берем $\mathbf{e}_\alpha$ и $\boldsymbol{\omega}^\alpha$. Покажите также, что из уравнения (3.40) следует

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} u^\mu v^\nu.$$

3.9. Дифференцирование

а. Рассмотрев конкретный случай $\mu = 0$, $\nu = 1$, убедитесь, что верна следующая формула:

$$d(u_\mu v^\nu)/d\tau = (du_\mu/d\tau)\, v^\nu + u_\mu (dv^\nu/d\tau).$$

б. Объясните, почему

$$(T^{\alpha\beta} v_\beta)_{,\,\mu} = T^{\alpha\beta}{}_{,\,\mu} v_\beta + T^{\alpha\beta} v_{\beta,\,\mu}.$$

3.10. Снова дифференцирование

а. Расписав в явном виде сумму $u_\mu u^\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$, убедитесь, что верна следующая формула:

$$d(u^\mu u_\mu)/d\tau = 2u_\mu (du^\mu/d\tau).$$

б. Пусть δ означает вариацию, или малое изменение. Убедитесь в справедливости следующего выражения:

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = 2F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta}.$$

в. Вычислите $(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})_{,\,\mu}$.

3.11. Симметрии

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть $A_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор, т. е. $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$; пусть также $S^{\mu\nu}$ — симметричный тензор, т. е. $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$.

а. Убедитесь в справедливости равенства $A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$ двумя способами: сначала распишите сумму в явном виде (все шестнадцать слагаемых) и покажите, что все члены в ней попарно уничтожаются; затем обоснуйте каждый знак равенства в следующей цепочке:

$$A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\nu\mu} = -A_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} = -A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0.$$

б. Установите два следующих тождества для произвольного тензора $V_{\mu\nu}$:

$$V^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu})\,A_{\mu\nu}, \quad V^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu})\,S_{\mu\nu}.$$

3.12. Симметризация и антисимметризация

Чтобы «симметризовать» тензор, его нужно усреднить по всем транспозициям. Индексы у компонент нового, симметризованного тензора заключаются в круглые скобки:

$$\begin{aligned} V_{(\mu\nu)} &\equiv \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} + V_{\nu\mu}), \\ V_{(\mu\nu\lambda)} &\equiv \frac{1}{3!}(V_{\mu\nu\lambda} + V_{\nu\lambda\mu} + V_{\lambda\mu\nu} + V_{\nu\mu\lambda} + V_{\mu\lambda\nu} + V_{\lambda\nu\mu}). \end{aligned} \tag{3.46}$$

«Антисимметризация» тензора производится аналогичным образом (индексы в квадратных скобках):

$$\begin{aligned} V_{[\mu\nu]} &\equiv \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} - V_{\nu\mu}), \\ V_{[\mu\nu\lambda]} &\equiv \frac{1}{3!}(V_{\mu\nu\lambda} + V_{\nu\lambda\mu} + V_{\lambda\mu\nu} - V_{\nu\mu\lambda} - V_{\mu\lambda\nu} - V_{\lambda\nu\mu}). \end{aligned} \tag{3.47}$$

а. Покажите, что симметризованные и антисимметризованные таким образом тензоры действительно симметричны и антисимметричны по отношению к перестановке векторов, вводимых в их каналы:

$$\begin{aligned} V_{(\alpha\beta\gamma)}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma} &= +V_{(\alpha\beta\gamma)}v^{\alpha}u^{\beta}w^{\gamma} = \ldots, \\ V_{[\alpha\beta\gamma]}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma} &= -V_{[\alpha\beta\gamma]}v^{\alpha}u^{\beta}w^{\gamma} = \ldots\ . \end{aligned}$$

б. Покажите, что тензор второго ранга можно восстановить по его симметричной и антисимметричной частям:

$$V_{\mu\nu} = V_{(\mu\nu)} + V_{[\mu\nu]}, \tag{3.48}$$

тогда как для тензора третьего ранга этого сделать нельзя; $V_{(\alpha\beta\gamma)}$ и $V_{[\alpha\beta\gamma]}$ в совокупности содержат «меньше информации», чем $V_{\alpha\beta\gamma}$. Другие, более сложные симметрии, которые содержат недостающую информацию, описываются «диаграммами Юнга» (см., например, [60]).

УПРАЖНЕНИЯ

в. Покажите, что тензор электромагнитного поля удовлетворяет соотношениям

$$F_{(\alpha\beta)}=0, \quad F_{\alpha\beta}=F_{[\alpha\beta]}. \tag{3.49а}$$

г. Покажите, что «магнитное» уравнение Максвелла

$$F_{\alpha\beta,\,\gamma}+F_{\beta\gamma,\,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\,\beta}=0$$

можно переписать в виде

$$F_{[\alpha\beta,\,\gamma]}=0. \tag{3.49б}$$

3.13. Тензор Леви-Чивиты

«Тензор Леви-Чивиты» $\boldsymbol{\varepsilon}$ в пространстве-времени представляет собой совершенно антисимметричный тензор четвертого ранга:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{n},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}) \text{ изменяет знак при перестановке любых двух векторов.} \tag{3.50а}$$

Рассмотрим определенную, произвольным образом выбранную лоренцеву систему, вектор $\mathbf{e}_0$ которой направлен в будущее, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — правая тройка пространственных базисных векторов. Ковариантные компоненты $\boldsymbol{\varepsilon}$ в этой системе задаются выражением

$$\varepsilon_{0\,1\,2\,3}=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)=+1. \tag{3.50б}$$

(Отметим, что в n-мерном пространстве $\boldsymbol{\varepsilon}$ аналогично является совершенно антисимметричным тензором ранга n. Его компоненты задаются выражением

$$\varepsilon_{1\,2\,\ldots\,n}=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n)=+1 \tag{3.50в}$$

в «положительно ориентированном» ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.)

а. Воспользовавшись антисимметричностью, покажите, что

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$, если среди α, β, γ, δ есть два одинаковых индекса, (3.50г)

$$\varepsilon_{\pi_0\pi_1\pi_2\pi_3}=\begin{cases}+1 \text{ для четных перестановок } 0,\ 1,\ 2,\ 3,\\ -1 \text{ для нечетных перестановок.}\end{cases} \tag{3.50д}$$

б. Покажите, что

$$\varepsilon^{\pi_0\pi_1\pi_2\pi_3}=-\varepsilon_{\pi_0\pi_1\pi_2\pi_3}. \tag{3.50е}$$

в. С помощью преобразования Лоренца покажите, что $\varepsilon^{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma\bar\delta}$ и $\varepsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma\bar\delta}$ имеют те же значения в любой другой лоренцевой системе, в которой $\mathbf{e}_{\bar 0}$ направлен в будущее, а $\mathbf{e}_{\bar 1}$, $\mathbf{e}_{\bar 2}$, $\mathbf{e}_{\bar 3}$ — правая тройка. *Указание*: Покажите, что

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^{\bar 0}{}_{\alpha}\Lambda^{\bar 1}{}_{\beta}\Lambda^{\bar 2}{}_{\gamma}\Lambda^{\bar 3}{}_{\delta}=\det\|\Lambda^{\bar\mu}{}_{\nu}\|; \tag{3.50ж}$$

УПРАЖНЕНИЯ

использовав $\Lambda^T\eta\Lambda=\eta$, покажите, что $\det\|\Lambda^{\bar\mu}{}_{\nu}\|=\pm 1$, и удостоверьтесь, что детерминант равен $+1$ для преобразований между системами, у которых $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_{\bar 0}$ направлены в будущее, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_{\bar 1}$, $\mathbf{e}_{\bar 2}$, $\mathbf{e}_{\bar 3}$ — правые тройки.

г. Чему равны компоненты ε в лоренцевой системе с $\mathbf{e}_{\bar 0}$, направленным в прошлое? С левой тройкой $\mathbf{e}_{\bar 1}$, $\mathbf{e}_{\bar 2}$, $\mathbf{e}_{\bar 3}$?

д. Исходя из тензора Леви-Чивиты можно построить различные «тензоры перестановок». В индексных обозначениях они имеют вид

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\lambda} \equiv -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{3.50з}$$

$$\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{3.50и}$$

$$\delta^{\alpha}{}_{\mu} \equiv \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\beta} = \frac{1}{6}\delta^{\alpha\beta\lambda}{}_{\mu\beta\lambda} = -\frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\beta\lambda\rho}. \tag{3.50к}$$

Покажите, что

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} +1, \text{ если } \alpha\beta\gamma \text{ — четная перестановка } \mu\nu\lambda, \\ -1, \text{ если } \alpha\beta\gamma \text{ — нечетная перестановка } \mu\nu\lambda, \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases} \tag{3.50л}$$

$$\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\delta^{\beta}{}_{\mu} = \begin{cases} +1, \text{ если } \alpha\beta \text{ — четная перестановка } \mu\nu, \\ -1, \text{ если } \alpha\beta \text{ — нечетная перестановка } \mu\nu, \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases} \tag{3.50м}$$

$$\delta^{\alpha}{}_{\mu} = \begin{cases} +1, \text{ если } \alpha=\mu, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.50н}$$

3.14. Дуальные тензоры

Для любого вектора $\mathbf{J}$, любого антисимметричного тензора второго ранга $\mathbf{F}$ ($F_{\alpha\beta}=F_{[\alpha\beta]}$) и любого антисимметричного тензора третьего ранга $\mathbf{B}$ ($B_{\alpha\beta\gamma}=B_{[\alpha\beta\gamma]}$) можно построить новые тензоры, определяемые равенствами

$${}^*J_{\alpha\beta\gamma} = J^{\mu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}, \quad {}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad {}^*B_{\alpha} = \frac{1}{3!}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}. \tag{3.51}$$

Тензор ${}^*\mathbf{J}$ называется «дуальным» тензору $\mathbf{J}$, ${}^*\mathbf{F}$ — дуальным $\mathbf{F}$, ${}^*\mathbf{B}$ — дуальным $\mathbf{B}$. [Выше (в § 2.7) слово «дуальный» было употреблено совсем в другом смысле: *совокупность* базисных 1-форм $\{\omega^\alpha\}$ была названа дуальной совокупности базисных векторов $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, если $(\omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta)=\delta^\alpha{}_\beta$. К счастью, нет никаких оснований путать два типа дуальности. Один из них устанавливает соотношение между совокупностью векторов и совокупностью 1-форм, другой — между антисимметричными тензорами ранга p и антисимметричными тензорами ранга $4-p$.]

УПРАЖНЕНИЯ

а. Покажите, что

$$**\mathbf{J} = \mathbf{J}, \quad **\mathbf{F} = -\mathbf{F}, \quad **\mathbf{B} = \mathbf{B}, \tag{3.52}$$

т. е. любой совершенно антисимметричный тензор **H** можно (с точностью до знака) восстановить из дуального ему тензора $*\mathbf{H}$, применив еще раз дуальность $**\mathbf{H}$. Это говорит о том, что **H** и $*\mathbf{H}$ содержат абсолютно одинаковую информацию.

б. Продемонстрируйте в явном виде тот факт, что дуальные тензоры содержат одну и ту же информацию, расписав компоненты $*A^{\alpha\beta\gamma}$ через A^{α}, а также $*F^{\alpha\beta}$ — через $F^{\alpha\beta}$ и $*B^{\alpha}$ — через $B^{\alpha\beta\gamma}$.

3.15. Геометрическая форма уравнений Максвелла

Пусть **F** — тензор электромагнитного поля. Покажите, что $\nabla \cdot *\mathbf{F} = 0$ представляет собой геометрическую, не зависящую от системы координат, форму уравнений Максвелла:

$$F_{\alpha\beta,\,\gamma} + F_{\beta\gamma,\,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\,\beta} = 0.$$

Аналогично покажите, что $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\mathbf{J}$ (дивергенция по второму каналу **F**) представляет собой геометрическую форму уравнений $F^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta} = 4\pi J^{\alpha}$.

3.16. Сохранение заряда

Выведите из уравнений Максвелла $F^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta} = 4\pi J^{\alpha}$ «уравнение сохранения заряда»

$$J^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0. \tag{3.53}$$

Покажите, что это уравнение действительно описывает сохранение заряда. Дальнейшее его изучение проводится в гл. 5.

3.17. Векторный потенциал

Векторный потенциал **A** в теории электромагнетизма генерирует тензор электромагнитного поля посредством уравнения

$$\mathbf{F} = -(\text{антисимметричная часть } \nabla\mathbf{A}), \tag{3.54}$$

т. е.

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \tag{3.54'}$$

а. Покажите, что электрическое и магнитное поля в определенной лоренцевой системе задаются выражениями

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{A}/\partial t - \nabla A^{0}. \tag{3.55}$$

б. Покажите, что **F** удовлетворяет уравнениям Максвелла тогда и только тогда, когда **A** удовлетворяет соотношению

$$A^{\alpha,\,\mu}{}_{,\,\mu} - A^{\mu}{}_{,\,\mu}{}^{,\,\alpha} = -4\pi J^{\alpha}. \tag{3.56}$$

в. Покажите, что при «калибровочных преобразованиях»

$$\mathbf{A}_{\text{новое}} = \mathbf{A}_{\text{старое}} + \mathbf{d}\phi, \quad \phi \text{ — произвольная функция,} \tag{3.57}$$

$\mathbf{F}$ не изменяется.

г. Покажите, что калибровку можно выбрать так, что

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ («лоренцева калибровка»),} \tag{3.58а}$$

$$\Box \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{J}. \tag{3.58б}$$

Здесь $\Box$ — волновой оператор («даламбертиан»):

$$\Box \mathbf{A} = A^{\alpha,\ \mu}{}_{,\mu} \mathbf{e}_\alpha. \tag{3.59}$$

3.18. Дивергенция электромагнитного тензора энергии-импульса

Исходя из тензора электромагнитного поля $\mathbf{F}$, можно следующим образом построить симметричный тензор второго ранга $\mathbf{T}$ («тензор энергии-импульса», рассматриваемый в гл. 5):

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right). \tag{3.60}$$

В качестве упражнения по «жонглированию индексами»:

а. Покажите, что $\nabla \cdot \mathbf{T}$ имеет компоненты

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}{}_{,\nu}F^{\nu}{}_{\alpha} + F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha,\ \nu} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}{}^{,\mu}F^{\alpha\beta}\right]. \tag{3.61}$$

б. Преобразуйте это выражение к виду

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[-F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\left(F_{\alpha\beta,\ \mu} + F_{\mu\alpha,\ \beta} + F_{\beta\mu,\ \alpha}\right)\right]; \tag{3.62}$$

заметьте, что первый член в (3.62) получается непосредственно из второго члена в (3.61).

в. Используя уравнение Максвелла, получите

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -F^{\mu\alpha}J_{\alpha}. \tag{3.63}$$

Дополнение 3.3. ТЕХНИКА «ЖОНГЛИРОВАНИЯ ИНДЕКСАМИ»

Уравнение	Название и пояснение
$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}, \mathbf{e}_{\gamma})$	Вычисление компонент
$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{\omega}^{\beta}, \mathbf{e}_{\gamma})$	Вычисление других компонент
$\mathbf{S} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\gamma}$	Восстановление $\mathbf{S}$ по его компонентной форме ранга $\left(\frac{1}{2}\right)$

Уравнение	Название и пояснение
$\mathbf{S} = S^{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma$	Восстановление **S** по его компонентной форме ранга $\binom{3}{0}$. (Напомним, что обычно между различными формами не делается различия; см. уравнение (3.15) и его обсуждение в тексте)
$S^{\alpha\beta}{}_\gamma = \eta^{\beta\mu}S^\alpha{}_{\mu\gamma}$	Поднятие индекса
$S^\alpha{}_{\mu\gamma} = \eta_{\mu\beta}S^{\alpha\beta}{}_\gamma$	Опускание индекса
$M_\mu = S^\alpha{}_{\mu\alpha}$	Свертка **S**, в результате которой образуется новый тензор **M**
$T^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = S^{\alpha\beta}{}_\mu M_\nu$	Тензорное произведение **S** и **M**, результатом которого является новый тензор **T**.
$\mathbf{A}^2 = A^\alpha A_\alpha$	Квадрат длины вектора **A**, получающийся в результате образования тензорного произведения $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}$ с последующей сверткой и совпадающий с тем же квадратом длины, представляющим собой результат пересечения 1-формы $\tilde{\mathbf{A}}$, соответствующей **A**: $\mathbf{A}^2 = \langle\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{A}\rangle = A^\alpha A_\alpha$
$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$	Матрица $\|\|\eta_{\alpha\beta}\|\|$, образованная из «ковариантных компонент» метрики, обратна матрице $\|\|\eta^{\alpha\beta}\|\|$, образованной из «контравариантных компонент». Или, что то же самое, поднятие индекса у метрики $\eta_{\alpha\beta}$ приводит к символу Кронекера
$S^\alpha{}_{\beta\gamma} = N^\alpha{}_{\beta,\gamma}$	Градиент тензора **N**, являющийся новым тензором **S**
$R_\beta = N^\alpha{}_{\beta,\alpha}$	Дивергенция тензора **N**, являющаяся новым тензором **R**
$N^\alpha{}_{\beta,\gamma} = (\eta_{\beta\mu}N^{\alpha\mu})_{,\gamma} = \eta_{\beta\mu}N^{\alpha\mu}{}_{,\gamma}$	Вычисление градиента и поднятие или опускание индексов — коммутирующие операции
$N^\alpha{}_\beta{}^{,\gamma} \equiv N^\alpha{}_{\beta,\mu}\eta^{\mu\gamma}$	Контравариантный индекс градиента получается поднятием ковариантного индекса
$(R_\alpha M_\beta)_{,\gamma} = R_{\alpha,\gamma}M_\beta + R_\alpha M_{\beta,\gamma}$	Градиент тензорного произведения: $\nabla(\mathbf{R}\otimes\mathbf{M}) = $ транспозиция $= (\nabla\mathbf{R}\otimes\mathbf{M}) + \mathbf{R}\otimes\nabla\mathbf{M}$
$G_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha})$	Антисимметризация тензора **F**, результатом которой является новый тензор **G**
$H_{\alpha\beta} = F_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha})$	Симметризация тензора **F**, результатом которой является новый тензор **H**
${}^*J_{\alpha\beta\gamma} = J^\mu\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$	Образование тензора третьего ранга, дуального вектору (упражнение 3.14)
${}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$	Образование антисимметричного тензора второго ранга, дуального данному антисимметричному тензору второго ранга (упражнение 3.14)
${}^*B_\alpha = \frac{1}{6}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}$	Образование 1-формы, дуальной антисимметричному тензору третьего ранга (упражнение 3.14)

4. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

**Эта глава целиком относится к курсу 2.
Она необходима в качестве подготовительного материала для § 14.5 и 14.6 (вычисление кривизны с помощью дифференциальных форм) и для гл. 15 (тождества Бианки и граница границы), но не нужна для понимания остальной части книги.**

§ 4.1. ВНЕШНЕЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Семейства поверхностей, как расположенные отдельно, так и пересекающиеся, в результате чего образуются «соты», «коробки для яиц» и другие структуры подобного рода («дифференциальные формы»), позволяют с единой точки зрения подойти к геометрии электромагнетизма и гравитации. Однако, чтобы освоить такой подход, требуется некоторое время. Поэтому при первом чтении книги большинство читателей может опустить эту главу и последующий материал, который на ней основан.

На аналитическом языке дифференциальные формы представляют собой совершенно антисимметричные тензоры; на языке рисунков — это пересекающиеся семейства поверхностей. Математический формализм, позволяющий с легкостью оперировать дифференциальными формами и называемый «внешним исчислением», кратко изложен в дополнении 4.1; его основные особенности иллюстрируются в остальной части главы, где на языке этого формализма излагается электромагнитная теория. По-видимому, наиболее эффективный способ изучения данной главы состоит в следующем: 1) просмотреть дополнение 4.1, чтобы уловить суть формализма; 2) внимательно прочесть остальную часть главы; 3) вернуться и подробно изучить дополнение 4.1; 4) проработать упражнения для приобретения практических навыков в этом формализме[1]).

---

[1]) Более подробно, чем в этой книге, внешнее исчисление изложено в работах [97—101], и особенно в работах [102] (относительно доступно, с многочисленными приложениями), [103] (для неспециалистов и студентов младших курсов, но на современном математическом уровне), [104, 105].

Дополнение 4.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ВНЕШНЕЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В КРАТКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Здесь приведены для справок основные определения и формулы внешнего исчисления. Каждый пункт состоит из общего положения и основных приложений. Излагаемый формализм применим не только в пространстве-времени, но и в геометрических системах более общего вида (см. заголовки к разделам). Здесь не делается попыток ни продемонстрировать внутреннюю непротиворечивость формализма, ни вывести его из какой-либо совокупности определений и аксиом. Систематическое изложение предмета можно найти, например, в работах [67, 70].

А. Алгебра I (применима в любом векторном пространстве)

1. *Базисные 1-формы*

   а. Координатный базис $\boldsymbol{\omega}^j = \mathbf{d}x^j$

   (j — номер 1-формы, а не компоненты).

   б. Общий базис $\boldsymbol{\omega}^j = L^j{}_{k'}\,\mathbf{d}x^{k'}$.

   Приложение. Простые базисные 1-формы, используемые при анализе шварцшильдовской геометрии вокруг статического, сферически симметричного центра притяжения:

$$\boldsymbol{\omega}^0 = (1-2m/r)^{1/2}\,\mathbf{d}t,$$

$$\boldsymbol{\omega}^1 = (1-2m/r)^{-1/2}\,\mathbf{d}r,$$

$$\boldsymbol{\omega}^2 = r\,\mathbf{d}\theta,$$

$$\boldsymbol{\omega}^3 = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi.$$

2. *Общий вид p-формы* (*или p-вектора*) представляет собой совершенно антисимметричный тензор ранга $\binom{0}{p}$ [или $\binom{p}{0}$]. Его можно разложить по косым произведениям (см. § 3.5 и упражнение 4.12):

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_2}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p} \equiv \alpha_{[i_1 i_2 \ldots i_p]}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_2}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}.$$

   (Если индексы взяты в вертикальные черточки, то суммирование распространяется лишь на комбинации $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.)

   Два приложения: 1-форма энергии-импульса есть 1-форма вида $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i\boldsymbol{\omega}^i$, или

$$\mathbf{p} = -E\,\mathbf{d}t + p_x\,\mathbf{d}x + p_y\,\mathbf{d}y + p_z\,\mathbf{d}z.$$

   $\mathbf{F}$ есть 2-форма вида $\boldsymbol{\beta} = \beta_{[\mu\nu]}\boldsymbol{\omega}^\mu\wedge\boldsymbol{\omega}^\nu$, или в плоском пространстве-времени

$$\mathbf{F} = -E_x\,\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}x - E_y\,\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}y - E_z\,\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}z +$$
$$+ B_x\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z + B_y\,\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x + B_z\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y.$$

3. *Косое произведение*

Справедливы *все* хорошо известные правила сложения и умножения, например

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \gamma = a\alpha \wedge \gamma + b\beta \wedge \gamma,$$
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv \alpha \wedge \beta \wedge \gamma,$$

за исключением модифицированного правила коммутации p-формы α и q-формы β, которое имеет вид

$$\underset{p}{\alpha} \wedge \underset{q}{\beta} = (-1)^{pq} \underset{fq}{\beta} \wedge \underset{p}{\alpha}.$$

Приложение к 1-формам α, β:

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, \quad \alpha \wedge \alpha = 0;$$

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_j \omega^j) \wedge (\beta_k \omega^k) = \alpha_j \beta_k \omega^j \wedge \omega^k = \frac{1}{2} (\alpha_j \beta_k - \beta_j \alpha_k)\, \omega^j \wedge \omega^k.$$

4. *Свертка p-формы с p-вектором*

$$\underset{p}{\langle \alpha, \mathbf{A} \rangle}_{p} = \alpha_{[i_1 \ldots i_p]} A^{[j_1 \ldots j_p]} \underbrace{\langle \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p}, \mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_p} \rangle}_{[\equiv \delta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} \text{ (см. упражнения 3.13 и 4.12)}]} =$$

$$= \alpha_{[i_1 \ldots i_p]} A^{i_1 \ldots i_p}.$$

Четыре приложения:

а. Свертка 1-формы энергии-импульса частицы $\mathbf{p} = p_\alpha \omega^\alpha_{\mathbf{i}}$ с 4-скоростью $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ наблюдателя (1-вектор):

$$-\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = -p_\alpha u^\alpha = \text{энергия частицы}.$$

б. Свертка 2-формы $\mathbf{F}$ с бивектором $\delta \mathscr{P} \wedge \Delta \mathscr{P}$ [где $\delta \mathscr{P} = (d\mathscr{P}/d\lambda_1)\, \Delta\lambda_1$ и $\Delta \mathscr{P} = (d\mathscr{P}/d\lambda_2)\, \Delta\lambda_2$ — два бесконечно малых вектора на 2-поверхности $\mathscr{P}(\lambda_1, \lambda_2)$, а бивектор характеризует элемент поверхности, на них опирающийся] равна магнитному потоку $\Phi = \langle \mathbf{F}, \delta \mathscr{P} \wedge \Delta \mathscr{P} \rangle$ через этот элемент поверхности.

в. В более общем случае p-мерный параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$, обладает ориентированным объемом, описываемым «*простым*» p-вектором $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p$ (ориентированным потому, что перестановка двух ребер меняет знак объема). Структура типа «коробки для яиц», стенками которой являются гиперплоскости p различных 1-форм $\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^p$, описывается «*простой*» p-формой $\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \ldots \wedge \sigma^p$. Количество ячеек $\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \ldots \wedge \sigma^p$, отсекаемых бесконечно малым p-объемом $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p$, равно

$$\langle \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \ldots \wedge \sigma^p, \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p \rangle.$$

г. Якобиан системы p функций $f^k(x^1, \ldots, x^p)$ равен

$$\left\langle \mathbf{d}f^1 \wedge \mathbf{d}f^2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}f^p, \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^2} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^p} \right\rangle =$$

$$= \det \left\| \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j} \right) \right\| \equiv \frac{\partial (f^1, f^2, \ldots, f^p)}{\partial (x^1, x^2, \ldots, x^p)}.$$

5. *Простые формы*

а. Простой p-формой называется p-форма, которую можно записать в виде косого произведения p 1-форм:

$$\underset{p}{\sigma} = \underbrace{\alpha \wedge \beta \wedge \cdots \wedge \gamma}_{p \text{ множителей}}.$$

б. Простая p-форма $\alpha \wedge \beta \wedge \ldots \wedge \gamma$ может быть представлена семействами пересекающихся плоскостей α, β, . . ., γ (структура типа «коробки для яиц») в совокупности с направлением обхода (ориентация).

Приложения:

а. В четырехмерном пространстве (например в пространстве-времени) все 0-формы, 1-формы, 3-формы и 4-формы являются простыми. 2-форма $\mathbf{F}$ в общем случае является суммой двух простых форм, как, например, $\mathbf{F} = -e\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x + h\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$; она проста тогда и только тогда, когда $\mathbf{F} \wedge \mathbf{F} = 0$.

б. Совокупность 1-форм α, β, . . ., γ линейно зависима (одна есть линейная комбинация остальных) тогда и только тогда, когда $\alpha \wedge \beta \wedge \ldots \wedge \gamma = 0$ (сплющенная «коробка для яиц»).

Б. Внешняя производная (применима в любом «дифференцируемом многообразии» как с метрикой, так и без нее)

1. $\mathbf{d}$ образует $(p+1)$-форму $\mathbf{d}\sigma$ из p-формы σ.
2. Действие $\mathbf{d}$ определяется по индукции, используя (гл. 2) определение $\mathbf{d}f$, где f — функция (0-форма), плюс

$$\mathbf{d}(\underset{p}{\alpha} \wedge \underset{q}{\beta}) = \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathbf{d}\beta,$$

$$\mathbf{d}^2 = \mathbf{d}\mathbf{d} = 0.$$

Два приложения:

$$\mathbf{d}(\alpha \wedge \mathbf{d}\beta) = \mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}\beta.$$

Для p-формы Φ, где

$$\Phi = \phi_{[i_1 \ldots i_p]}\, \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_p},$$

имеем (другое, эквивалентное определение $\mathbf{d}\Phi$)

$$\mathbf{d}\Phi = \mathbf{d}\phi_{[i_1 \ldots i_p]} \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}.$$

В. Интегрирование (применимо в любом «дифференцируемом многообразии» как с метрикой, так и без нее)

1. *Интерпретация в рисунках*

В тексте и на рисунках гл. 4 $\int \alpha$ (интеграл от некоторой заданной 1-формы α вдоль заданной кривой от заданной начальной точки до заданной конечной точки) интерпретируется как «число α-поверхностей, пересекаемых на этом пути»; аналогичным образом $\int \Phi$ (интеграл от заданной 2-фор-

мы Φ по заданному участку поверхности, на которой задано направление обхода, или «ориентация») интерпретируется как «число ячеек сотоподобной структуры Φ, пересекаемых этим участком поверхности»; подобным же образом дается определение для структур типа «коробки для яиц», представляющих 3-формы, и т. д.

2. *Правила вычисления интегралов*

Вычисление $\int \alpha$ — интеграла от p-формы

$$\alpha = \alpha_{[i_1 \ldots i_p]}(x^1, \ldots, x^n)\, \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \ldots, \mathbf{d}x^{i_p}$$

по p-мерной поверхности — производится в два этапа.

а. Подставим в α параметрическое представление поверхности

$$x^k(\lambda^1, \ldots, \lambda^p)$$

и приведем сумму к виду

$$\alpha = a(\lambda^j)\, \mathbf{d}\lambda^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}\lambda^p$$

(α представлена как p-форма на p-мерной поверхности).

б. Проинтегрируем

$$\int \alpha = \int a(\lambda^j)\, d\lambda^1 d\lambda^2 \ldots d\lambda^p,$$

использовав обычное определение интегрирования. [*Пример*. См. уравнения (4.12) — (4.14).]

3. *Дифференциальная геометрия интегрирования*

Вычислим $\int \alpha$ от p-формы α следующим образом.

а. Выберем p-мерную поверхность $\mathscr{S}$, по которой нужно взять интеграл.

б. Представим $\mathscr{S}$ в параметрическом виде в соответствии с общим представлением о поверхности как о функции параметров $\mathscr{P}(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p)$. При этом фиксируется ее ориентация. Та же функция с $\lambda^1 \leftrightarrow \lambda^2$, $\mathscr{P}(\lambda^2, \lambda^1, \ldots, \lambda^p)$ описывает другую (противоположно ориентированную) поверхность $-\mathscr{S}$.

в. Бесконечно малый параллелепипед

$$\left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^1} \Delta\lambda^1\right) \wedge \left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^2} \Delta\lambda^2\right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^p} \Delta\lambda^p\right)$$

касается выбранной поверхности. Число ячеек α, которые он отсекает, равно

$$\left\langle \alpha, \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^p} \right\rangle \Delta\lambda^1 \ldots \Delta\lambda^p.$$

При перестановке двух векторов $\partial\mathscr{P}/\partial\lambda^k$ это число меняет знак подобно тому, как и при изменении ориентации поверхности на противоположную.

г. Интерпретация, вытекающая из сказанного выше, приводит к следующему определению:

$$\int \alpha \equiv \int\int \ldots \int \left\langle \alpha, \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^1} \wedge \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^2} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \lambda^p} \right\rangle d\lambda^1 d\lambda^2 \ldots d\lambda^p.$$

Это определение в упражнении 4.9 отождествляется с правилом вычисления интегралов предыдущего раздела (B.2).

Приложение: Проинтегрируем градиент $\mathbf{d}f$ вдоль кривой $\mathscr{P}(\lambda)$ от $\mathscr{P}(0)$ до $\mathscr{P}(1)$:

$$\int \mathbf{d}f = \int_0^1 \langle \mathbf{d}f,\, d\mathscr{P}/d\lambda \rangle\, d\lambda = \int_0^1 (df/d\lambda)\, d\lambda = f[\mathscr{P}(1)] - f[\mathscr{P}(0)].$$

д. Использование символа d в трех разных значениях. *Первое*: d (светлое) в явных выражениях для производных, таких, как d/da, df/da или $d\mathscr{P}/da$; числитель и знаменатель по отдельности лишены смысла, смысл имеет лишь вся совокупность символов. *Второе*: d (светлое) под знаком интеграла, например $\int f da$. В данном случае это лишь указание, как выполнять интегрирование, и символ d лишен всякого смысла без знака интеграла; «$\int \ldots d \ldots$» существует как единое целое. *Третье*: $\mathbf{d}$ (жирное), например $\mathbf{d}$ отдельно, или $\mathbf{d}f$, или $\mathbf{d}\alpha$. Теперь этот символ означает внешнюю производную, которая превращает p-форму в $(p+1)$-форму. Иногда для той же цели употребляется d (светлое). Следовательно, отдельное d, или df, или dx, всегда означает внешнюю производную, если им не сопутствует знак $\int$ (*второе* значение) или знак / (*первое* значение).

4. *Обобщенная теорема Стокса* (см. дополнение 4.6)

а. Пусть $\partial\mathscr{V}$ — замкнутая p-мерная граница $(p+1)$-мерной поверхности $\mathscr{V}$, а $\boldsymbol{\sigma}$ — p-форма, определенная на всей $\mathscr{V}$. Тогда

$$\boxed{\int_{\mathscr{V}} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial\mathscr{V}} \boldsymbol{\sigma}}$$

(интеграл от p-формы $\boldsymbol{\sigma}$ по границе $\partial\mathscr{V}$ поверхности $\mathscr{V}$ равен интегралу от $(p+1)$-формы $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ по самой поверхности $\mathscr{V}$).

б. Чтобы получить правильный знак, необходимо согласовать ориентации $\mathscr{V}$ и $\partial\mathscr{V}$ в следующем смысле: выберем координаты $y^0, y^1, \ldots, y^p$ на некотором участке $\mathscr{V}$ таким образом, чтобы $y^0 \leqslant 0$ выполнялось на $\mathscr{V}$, а $y^0 = 0$ — на границе $\partial\mathscr{V}$; тогда ориентации

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y^0} \wedge \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y^p}$$

на $\mathscr{V}$ должна соответствовать ориентация

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y^p}$$

на $\partial\mathscr{V}$.

в. *Примечание*: В случае неориентируемой поверхности, например кольца Мёбиуса, когда невозможно непротиворечивым образом выбрать непрерывную ориентацию, требуется более сложный математический аппарат, чтобы дать определение «∂», для которого выполняется теорема Стокса.

Приложения. Частными случаями данной теоремы являются все интегральные теоремы для поверхностей любой размерности в пространствах любой размерности, как с метрикой, так и без нее; она является обобщением всех форм теорем Стокса и Гаусса.

Примеры:

а. $\mathscr{V}$ — кривая, $\partial\mathscr{V}$ — ее граничные точки, $\sigma = f$ — 0-форма (функция):

$$\int_{\mathscr{V}} \mathbf{d}f = \int_0^1 (df/d\lambda)\, d\lambda = \int_{\partial\mathscr{V}} f = f(1) - f(0).$$

б. $\mathscr{V}$ — 2-поверхность в 3-пространстве, $\partial\mathscr{V}$ — ее граница в виде замкнутой кривой, $\mathbf{v}$ — 1-форма; в эвклидовых векторных обозначениях интегралы принимают вид

$$\int_{\mathscr{V}} \mathbf{d}\mathbf{v} = \int_{\mathscr{V}} (\nabla \times \boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{dS}, \quad \int_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{v} = \int_{\partial\mathscr{V}} \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{dl}.$$

в. Другие приложения содержатся в § 5.8, 20.2, 20.3, 20.5 и в упражнениях 4.10, 4.11, 5.2 и ниже.

Г. Алгебра II (применима в любом векторном пространстве с метрикой)

1. *Норма p-формы*

$$\| \alpha \|^2 \equiv \alpha_{[i_1 \ldots i_p]} \alpha^{i_1 \ldots i_p}$$

Два приложения. Норма 1-формы равна квадрату ее длины $\| \alpha \|^2 = \alpha \cdot \alpha$. Норма электромагнитной 2-формы $\mathbf{F}$: $\| \mathbf{F} \|^2 = \boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2$.

2. *Объект, дуальный p-форме*

а. В n-мерном пространстве объектом, дуальным p-форме $\boldsymbol{\alpha}$, является $(n-p)$-форма $^*\boldsymbol{\alpha}$ с компонентами

$$(^*\alpha)_{k_1 \ldots k_{n-p}} = \alpha^{|i_1 \ldots i_p|} \varepsilon_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_{n-p}}.$$

б. Свойства дуальных объектов

$$^{**}\alpha = (-1)^{p-1}\alpha \text{ в пространстве-времени;}$$

$$\alpha \wedge {}^*\alpha = \| \alpha \|^2 \boldsymbol{\varepsilon} \text{ в общем случае.}$$

в. Примечание. Определение $\boldsymbol{\varepsilon}$ (упражнение 3.13) влечет в качестве следствия ориентацию пространства, т. е. 1) выбор «правых» ортонормированных базисов, 2) для которых $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = +1$.

Приложения:

а. Для f (0-форма) имеем $^*f = f\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\int f d\,(\text{объем}) = \int {}^*f$.

б. Дуальной к 1-форме заряда-тока $\mathbf{J}$ является 3-форма $^*\mathbf{J}$. Полный заряд Q на участке $\mathscr{S}$ 3-мерной гиперповерхности равен

$$Q(\mathscr{S}) = \int_{\mathscr{S}} {}^*\mathbf{J}.$$

Закон сохранения заряда в локальной форме имеет вид $\mathbf{d}{}^*\mathbf{J} = 0$. Теорема Стокса связывает этот дифференциальный закон сохранения с интегральным законом сохранения

$$0 = \int_{\mathscr{V}} \mathbf{d}{}^*\mathbf{J} = \int_{\partial\mathscr{V}} {}^*\mathbf{J}.$$

Этот закон представляет наибольший интерес, когда $\partial\mathscr{V} = \mathscr{S}_2 - \mathscr{S}_1$ состоит из двух границ пространственно-временной области $\mathscr{S}_2$ (в будущем) и $\mathscr{S}_1$ (в прошлом); в этом случае он гласит $Q(\mathscr{S}_2) = Q(\mathscr{S}_1)$; см. упражнение 5.2.

в. Дуальным к тензору электромагнитного поля $\mathbf{F}$ является тензор $^*\mathbf{F}$. Из уравнения Максвелла $\mathbf{d}{}^*\mathbf{F} = 4\pi{}^*\mathbf{J}$ находим, что $4\pi Q = 4\pi \int_{\mathscr{S}} {}^*\mathbf{J} =$

$$= \int_{\mathscr{S}} \mathbf{d}{}^*\mathbf{F} = \int_{\partial\mathscr{S}} {}^*\mathbf{F}.$$

3. *Еще раз простые формы*

а. Форма, дуальная к простой форме, сама является простой.

б. «Коробка для яиц» формы $^*\boldsymbol{\sigma}$ перпендикулярна «коробке для яиц» формы $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\mu}$ в следующем смысле:

1) возьмем произвольный вектор $\mathbf{V}$, принадлежащий пересечению поверхностей $\boldsymbol{\sigma}$,

$$(\langle \alpha, \mathbf{V}\rangle = \langle \beta, \mathbf{V}\rangle = \ldots = \langle \mu, \mathbf{V}\rangle = 0),$$

2) возьмем произвольный вектор $\mathbf{W}$, принадлежащий пересечению поверхностей $^*\boldsymbol{\sigma}$,

3) тогда $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ заведомо перпендикулярны друг другу: $\mathbf{V}\cdot\mathbf{W} = 0$.

Пример. В пространстве-времени $\boldsymbol{\sigma} = 3\mathbf{d}t$ есть простая 1-форма.

а. $^*\boldsymbol{\sigma} = -3\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ — простая 3-форма.

б. Общий вид вектора на поверхностях $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{V} = V^x \mathbf{e}_x + V^y \mathbf{e}_y + V^z \mathbf{e}_z.$$

в. Общий вид вектора на пересечении поверхностей $^*\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{W} = W^t \mathbf{e}_t.$$

г. $\mathbf{W}\cdot\mathbf{V} = 0$.

§ 4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ 2-ФОРМА И СИЛА ЛОРЕНЦА

Тензор электромагнитного поля $\mathbf{F}$ является антисимметричным тензором второго ранга (т. е. 2-формой). Вместо того чтобы разлагать его по тензорным произведениям базисных 1-форм

$$\mathbf{F} = F_{\alpha\beta}\mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta,$$

во внешнем исчислении предпочитают разложение по антисимметризованным тензорным произведениям («внешним произведениям», упражнение 4.1):

Выражение для электромагнитной 2-формы через внешние произведения

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \equiv \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta - \mathbf{d}x^\beta \otimes \mathbf{d}x^\alpha. \tag{4.2}$$

Подобное разложение можно написать для любой 2-формы (антисимметричного тензора второго ранга). Символ «$\wedge$» называется «знаком внешнего произведения»; $\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$ — «базисные 2-формы» данной лоренцевой системы (см. § 3.5, упражнение 3.12 и дополнение 4.1).

Самый простой способ проиллюстрировать такое представление электромагнитного поля в виде 2-формы — рассмотреть магнитное поле в направлении x:

$$\begin{cases} F_{yz} = -F_{zy} = B_x, \\ \mathbf{F} = B_x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z. \end{cases} \tag{4.3}$$

1-форма $\mathbf{d}y = \operatorname{grad} y$ представляет собой совокупность поверхностей (точнее гиперповерхностей) $y = 18$ (все t, x, z), $y = 19$ (все t, x, z), $y = 20$ (все t, x, z) и т.д., а также поверхностей, которые можно провести между ними с помощью линейной интерполяции. Аналогичным образом можно представить и 1-форму $\mathbf{d}z$. Пересечение поверхностей этих двух семейств образует сотоподобную структуру. Эта структура становится «2-формой», если ее снабдить указаниями (см. стрелки на фиг. 4.1), позволяющими найти «направление обхода» в каждой трубке таких сот (порядок сомножителей в «косом произведении» в уравнении (4.2); $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = -\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}y$). 2-форма $\mathbf{F}$ в рассматриваемом примере отличается от «базисной 2-формы» $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ лишь в том отношении, что там, где $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ имеет одну трубку, 2-форма поля имеет B_x трубок.

2-форма как соты, на трубках которых задано направление обхода

Когда мы рассматриваем трубчатую структуру, которая закручивается и изгибается в пространстве-времени, для ее описания необходимо большее число компонент. В общем случае 2-форму электромагнитного поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = {} & E_x\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t + E_y\,\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}t + E_z\,\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}t + \\ & + B_x\,\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + B_y\,\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + B_z\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \end{aligned} \tag{4.4}$$

(6 компонент, 6 базисных 2-форм).

1-форма — машина, производящая число из вектора (удары колокола при последовательном прокалывании вектором поверхностей). 2-форма — машина, производящая число из ориентированной поверхности (поверхности с указанным направлением обхода: фиг. 4.1, справа внизу). Смысл этого числа так же прост, как в простейшей теории магнетизма,— число фарадеевых трубок, пересекаемых поверхностью. Электромагнитная 2-форма $\mathbf{F}$, описываемая такой «трубчатой структурой» (в соответствующем абстрактном понимании; дополнение 4.2), реально существует и расположена в пространстве независимо ни от каких координатных систем и ни от какого искусственного разбиения на «электрическое» и «магнитное» поля. Более того, такие трубки позволяют дать наиболее непосредственную (из всех предложенных ранее) геометрическую интерпретацию тому, как электромагнитное поле действует на заряженную частицу. Рассмотрим частицу с зарядом e, обладающую 4-скоростью

2-форма как машина, производящая число из ориентированной поверхности

$$\mathbf{u} = \frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\mathbf{e}_\alpha. \tag{4.5}$$

Пусть эта частица пролетает через область, где электромагнитное поле описывается 2-формой

$$\mathbf{F} = B_x\,\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}, \tag{4.6}$$

представленной на фиг. 4.1. Тогда сила, действующая на частицу (трактуемая как 1-форма), равна свертке этой 2-формы с 4-скоростью (и зарядом):

Сила Лоренца как свертка электромагнитной 2-формы с 4-скоростью частицы

$$\dot{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/d\tau = e\mathbf{F}(\mathbf{u}) \equiv e\langle\mathbf{F},\ \mathbf{u}\rangle. \tag{4.7}$$

Непосредственным вычислением, действуя по очереди каждым из двух сомножителей 2-формы на касательный вектор $\mathbf{u}$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= eB_x\langle\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz},\ \mathbf{u}\rangle = eB_x\{\mathbf{dy}\langle\mathbf{dz},\ \mathbf{u}\rangle - \mathbf{dz}\langle\mathbf{dy},\ \mathbf{u}\rangle\} = \\ &= eB_x\{\mathbf{dy}\langle\mathbf{dz},\ u^z\mathbf{e}_z\rangle - \mathbf{dz}\langle\mathbf{dy},\ u^y\mathbf{e}_y\rangle\},\end{aligned}$$

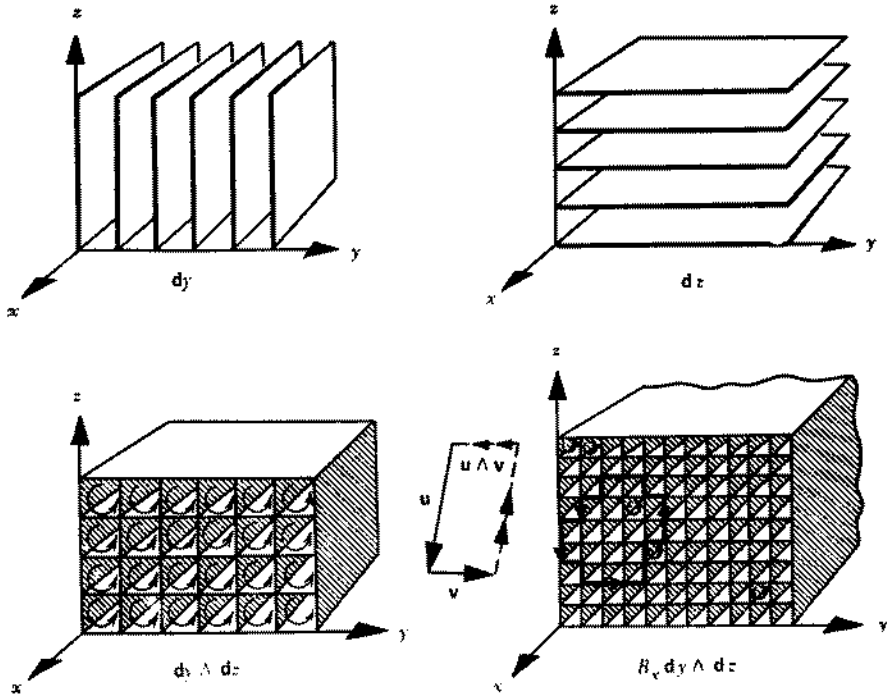
или

$$\dot{p}_\alpha\,\mathbf{dx}^\alpha = eB_x u^z\,\mathbf{dy} - eB_x u^y\,\mathbf{dz}. \tag{4.8}$$

Сравнивая коэффициенты при различных базисных 1-формах в правой и левой частях этого уравнения, мы получаем в подробном виде силу Лоренца, обусловленную магнитным полем B_x:

$$\begin{aligned}\dot{p}_y &= \frac{dp_y}{d\tau} = eB_x\frac{dz}{d\tau},\\ \dot{p}_z &= \frac{dp_z}{d\tau} = -eB_x\frac{dy}{d\tau}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Эти рассуждения легко распространить на общий случай электромагнитного поля, откуда следует вывод: *скорость изменения им-*



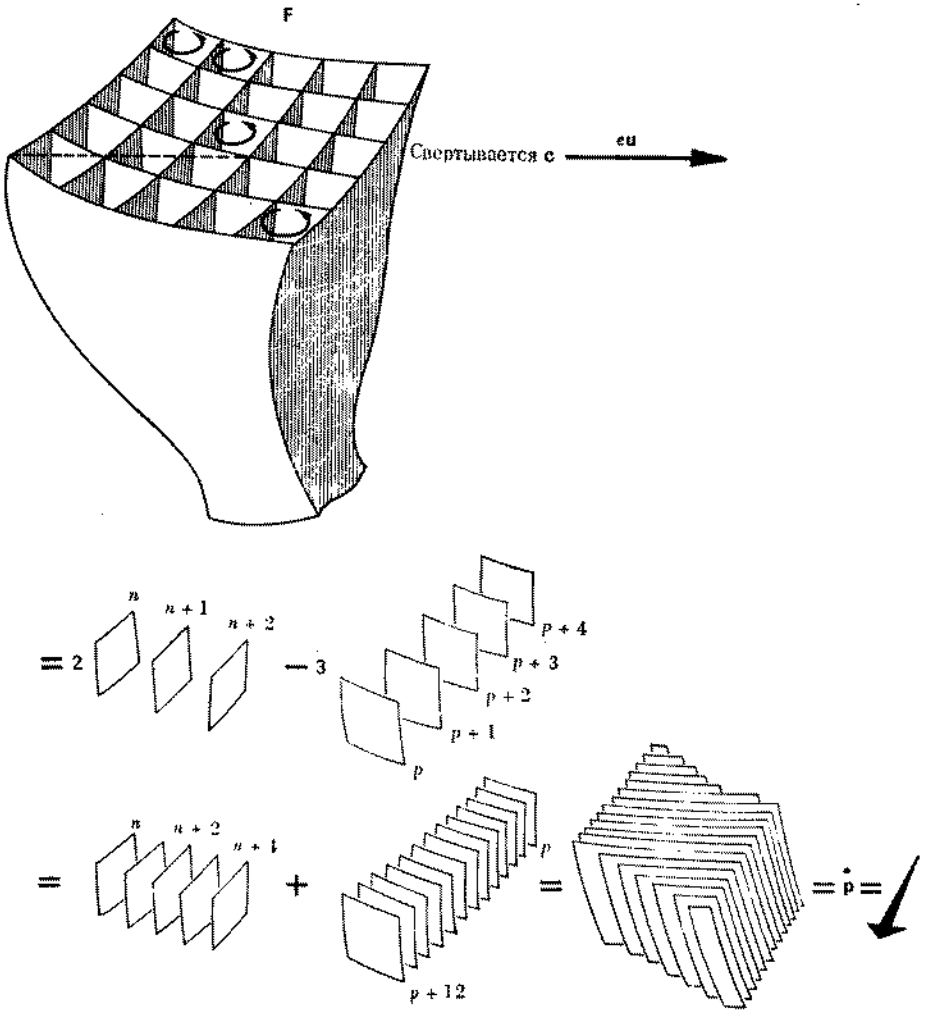
ФИГ. 4.1.
Построение 2-формы электромагнитного поля $\mathbf{F} = B_x \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz}$ из 1-форм **dy** и **dz** с помощью «косого умножения» (построение сотоподобной структуры, направление обхода которой указано стрелками). 2-форма представляет собой «машину для образования числа из ориентированной поверхности» (иллюстрацией служит выбранная в качестве образца поверхность, окаймленная стрелками, в правом нижнем углу; число трубок, пересекаемых этой поверхностью, равно

$$\int_{\text{по этой поверхности}} \mathbf{F} = 18;$$

налицо связь с фарадеевской концепцией «магнитного потока»). Такую трактовку 2-формы можно связать с трактовкой тензора как машины, гл. 3, следующим образом. Форма ориентированной поверхности, по которой берется интеграл от **F**, не играет роли, если эта поверхность мала. Интеграл от **F** зависит только от площади поверхности и ее ориентации. Возьмем два вектора **u** и **v**, принадлежащие поверхности. Они являются ребрами параллелограмма, ориентация (за **u** следует **v**) и площадь которого выражаются внешним произведением $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Подберем длины **u** и **v** так, чтобы опирающийся на них параллелограмм $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ имел ту же площадь, что и поверхность интегрирования. Тогда

$$\underbrace{\int_{\text{по поверхности}}}_{\text{трактовка данной главы}} \mathbf{F} = \underbrace{\int_{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}}}_{} \mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}_{\text{трактовка гл. 3}}.$$

Упражнение. Получите этот результат для бесконечно малой поверхности $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ и **F** в общем виде, используя формализм дополнения 4.1.



ФИГ. 4.2.
2-форма электромагнитного поля **F** представляет собой машину, производящую 1-форму (скорость изменения во времени импульса заряженной частицы $\dot{\mathbf{p}}$) из касательного вектора (произведение заряда частицы e на ее 4-скорость $\mathbf{u}$). В пространстве-времени 2-форма общего вида является «суперпозицией» (см. дополнение 4.2) двух структур, подобных той, которая изображена в верхней части фигуры, причем наклон и упаковка трубок первой из них совпадают с указанными на фигуре, а трубки второй наклонены в другом направлении и имеют другую плотность упаковки.

пульса (1-формы) со временем равна заряду, умноженному на свертку **F** *с 4-скоростью.* На фиг. 4.2 иллюстрируется, как 2-форма **F** выступает в роли машины, производящей 1-форму $\dot{\mathbf{p}}$ из касательного вектора e_{II}.

Дополнение 4.2. КАК АБСТРАГИРУЯСЬ ОТ ПОНЯТИЯ «СОТОПОДОБНОЙ СТРУКТУРЫ» ПРИЙТИ К ПОНЯТИЮ 2-ФОРМЫ; СЛУЧАЙ 3-ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Откройте картонную коробку, содержащую дюжину бутылок, и посмотрите на сотоподобную структуру, которую образуют картонные стенки между бутылками, разделяющие ящик в направлении с севера на юг и с востока на запад. Такая сотоподобная структура из «трубок» («отделений для бутылок») является довольно хорошей иллюстрацией 2-формы в случае обычного 3-пространства. Каждому гладкому элементу 2-поверхности, пересекающему эту трехмерную структуру, ставится в соответствие число (число пересекаемых трубок). Однако пересекающиеся картонные стенки — это уже излишняя конкретизация. Все, что может дать настоящая 2-форма,— это лишь число пересекаемых трубок, но не их «форму». Поверните коробку на полу на 45°. Теперь разделительные стенки идут с северо-запада на юго-восток и с северо-востока на юго-запад, но число трубок, проходящих через данный участок 2-поверхности, фиксированной в 3-пространстве, при этом не меняется. Поэтому, пользуясь понятием трубок, следует быть внимательным и представлять себе эти трубки в достаточно абстрактном виде, т. е. имея в виду их направление (в данном примере вертикальное) и плотность, но отнюдь не конкретное расположение и ориентацию их стенок. Например, все приведенные ниже представления описывают одну и ту же 2-форму σ:

$$\sigma = B\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y;$$

$$\sigma = B\,(2\mathbf{d}x) \wedge \left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}y\right)$$

(картонные стенки, направленные с севера на юг, расположены в два раза чаще, чем в предыдущем случае, а направленные с востока на запад — в два раза реже);

$$\sigma = B\mathbf{d}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \wedge \mathbf{d}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

(стенки повернуты на 45°);

$$\sigma = B\,\frac{\alpha\,\mathbf{d}x + \beta\,\mathbf{d}y}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{1/2}} \wedge \frac{\gamma\,\mathbf{d}x + \delta\,\mathbf{d}y}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{1/2}}$$

(ориентация и расположение картонных стенок меняются от точки к точке, так как все четыре функции α, β, γ и δ зависят от точки).

Физической реальностью обладает не каждая из 1-форм, взятая в отдельности, а лишь сама 2-форма σ, которая и образует реальный геометрический объект. Это обстоятельство помогает объяснить, почему в литературе по физике иногда говорят о «силовых трубках», а иногда о «силовых линиях». У этих двух терминов, обозначающих одну и ту же структуру, общим является то, что оба они ставят

в соответствие участку поверхности, пересекающему эту структуру, число. Картина силовых линий имеет то преимущество, что не заставляет думать о какой-то конкретной структуре «листов картона», т. е. о каком-то конкретном разложении 2-формы на произведение 1-форм. Однако именно эта особенность является и недостатком такой картины, так как при вычислениях часто бывает полезно иметь хорошо определенное представление 2-формы в виде косого произведения 1-форм. Более того, картина трубок даже в той абстрактной форме, которой она должна обладать, чтобы быть верной, имеет также то преимущество, что позволяет легко указать ориентацию трубок (направление обхода, указанное, например, стрелками на фиг. 4.1 и 4.5). Поэтому на всех рисунках этой книги мы будем изображать трубки со «стенками», которые будут напоминать нам о том, что 2-формы могут быть построены из 1-форм; но здесь и ниже всегда следует помнить, каким множеством способов можно выбрать отдельные 1-формы.

Перейдем теперь от трех измерений к четырем и покажем, что в этом случае понятие «сотоподобной структуры» должно стать еще более абстрактным. В трехмерном пространстве произвольность разложения 2-формы на 1-формы проявлялась в наклоне и упаковке «картонных стенок», но никак не сказывалась на вертикальности «отделений для бутылок» (направления фарадеевских силовых линий или силовых трубок); иначе обстоит дело в случае четырех измерений, или по крайней мере, в общем случае четырехмерного пространства.

В частных случаях в четырехмерном пространстве все обстоит почти так же просто, как и в трехмерном пространстве. Взяв опять в качестве примера частный случай 2-формы $\sigma = B\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$, мы имеем те же возможности разложения на 1-формы, которые уже упоминались выше, причем каждый выбор того или иного разложения приводит к одному и тому же «направлению» трубок. И если теперь слово «направление» вместо смысла «движение в направлении увеличения z не сопровождается пересечением стенок трубки» приобретает смысл «движение в направлении увеличения z, или в направлении увеличения t, или в направлении, представляющем линейную комбинацию этих двух направлений, не сопровождается пересечением стенок трубки», то это вполне естественное следствие появления лишнего измерения. Более того, та же простота существует и в случае плоской электромагнитной волны. Пусть, например, волна распространяется в направлении z, и пусть она поляризована так, что электрическое поле имеет составляющую лишь вдоль оси x; тогда для монохроматической волны имеем

$$E_x = B_y = E_0 \cos\omega(z - t) = -F_{01} = F_{31},$$

а все остальные компоненты равны нулю. Тензор электромагнитного поля $\mathbf{F}$ имеет вид

$$\mathbf{F} = F_{01}\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x + F_{31}\,\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x = E_0 \cos\omega(z-t)\,\mathbf{d}(z-t) \wedge \mathbf{d}x,$$

т. е. его также можно представить в виде одного косого произведения двух 1-форм.

Но в общем случае это не имеет места. 2-форма общего вида в случае четырех измерений состоит из шести различных косых произведений

$$\mathbf{F} = F_{01}\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x + F_{02}\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}y + \ldots + F_{23}\,\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z.$$

Было бы слишком оптимистичным надеяться, что это выражение ведется в общем случае к одному косому произведению двух 1-форм («простой» 2-форме). И это действительно не так. Но замечательно уже то, что эти шесть внешних произведе-

ний сводятся к двум (подробности см. в упражнении 4.1), т. е.

$$\mathbf{F} = \pi^1 \wedge \xi^1 + \pi^2 \wedge \xi^2.$$

Каждое отдельное произведение $\pi^i \wedge \xi^i$ можно рассматривать как сотоподобную структуру, подобную показанным на фиг. 4.1, 4.2, 4.4 и 4.5. Каждую такую структуру в отдельности можно изображать состоящей из пересекающихся поверхностей (1-форм), абстрагируясь при этом от таких деталей, как наклон и упаковка этих 1-форм. При пересечении с элементом поверхности каждая такая структура дает число. Но для 2-формы $\mathbf{F}$ имеет значение не число трубок $\pi^1 \wedge \xi^1$, отсекаемых поверхностью, и не число трубок $\pi^2 \wedge \xi^2$, отсекаемых той же поверхностью, а лишь сумма этих двух чисел. Эта сумма и называется в тексте «числом трубок $\mathbf{F}$», отсекаемых поверхностью. Вклад каждого косого произведения в отдельности не является строго определенным по простой причине: представление объекта из шести косых произведений в виде двух косых произведений (каким бы чудесным оно ни казалось) на самом деле не единственно (подробности см. в упражнении 4.2).

Имея в виду необходимость использования представления общей 2-формы в виде двух произведений 1-форм, отметим, что равенство нулю $\mathbf{dF}$ («нет магнитных зарядов») отнюдь не влечет автоматически равенство нулю $\mathbf{d}(\pi^1 \wedge \xi^1)$ или $\mathbf{d}(\pi^2 \wedge \xi^2)$ по отдельности. Отметим также, что любое пространственноподобное сечение (переход от четырех измерений к трем) 2-формы $\mathbf{F}$ общего вида всегда можно представить в виде сотоподобной структуры («простая» 2-форма в трех измерениях; фарадеевская картина магнитных силовых трубок).

Несмотря на абстрагирование, к которому пришлось прибегнуть, рассматривая 2-формы в самом общем виде, нет никаких причин, препятствующих дальнейшему использованию термина «сотоподобная структура» в широком смысле для описания этих объектов, что и практикуется здесь и при дальнейшем изложении.

§ 4.3. ФОРМЫ ПОЗВОЛЯЮТ ЛУЧШЕ ПОНЯТЬ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ, А ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ ПОЗВОЛЯЕТ ЛУЧШЕ ПОНЯТЬ ФОРМЫ

Всю теорию электромагнетизма можно сформулировать на языке 2-форм — сотоподобных «структур» (в абстрактном смысле «структур» дополнения 4.2) из трубок, заполняющих все пространство-время,— как в случае плоского, так и в случае искривленного пространства-времени. Кратко можно сказать, что имеются две такие структуры: $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M} = {}^*\mathbf{F}$, дуальные друг другу («перпендикулярные» друг другу — единственное место, где в рассмотрение вводится метрика). Каждая из них удовлетворяет простому уравнению

$$\mathbf{dF} = 0 \tag{4.10}$$

(«трубки $\mathbf{F}$ нигде не оканчиваются») и

$$\mathbf{d}\,{}^*\mathbf{F} = 4\pi\,{}^*\mathbf{J} \tag{4.11}$$

Предварительный обзор основных положений электромагнетизма

(«число трубок **M**, оканчивающихся в элементарном объеме, равно электрическому заряду этого объема»). Чтобы подробнее ознакомиться с применением этого аппарата на практике, рассмотрим последовательно: 1) определение 2-формы; 2) как данное электромагнитное поле находит свое выражение в виде **F** и **M**; 3) структуру **M** для покоящегося точечного заряда; 4) то же для движущегося точечного заряда; 5) характер поля заряда, движущегося равномерно, за исключением короткого промежутка времени, в течение которого он ускоряется; 6) структуру **F** для поля осциллирующего диполя; 7) понятие внешней производной; 8) уравнения Максвелла на языке форм; 9) решение уравнений Максвелла в плоском пространстве-времени с использованием 1-формы **A**, по которой можно вычислить 2-форму **F** Лиенара — Вихерта из соотношения $\mathbf{F} = \mathbf{dA}$.

2-форма как машина с числом пересекаемых трубок на выходе

Как показано на фиг. 4.1, 2-форма является машиной, производящей число («число пересекаемых трубок») из любой «ориентированной 2-поверхности» (2-поверхности, на которой указано «направление обхода»)

$$\begin{pmatrix}\text{число пересе-}\\ \text{каемых трубок}\end{pmatrix} = \int_{\text{поверхность}} \mathbf{F}. \tag{4.12}$$

Пример вычисления числа пересекаемых трубок

Рассмотрим в качестве примера 2-форму, изображенную на фиг. 4.1,

$$\mathbf{F} = B_x\, \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z,$$

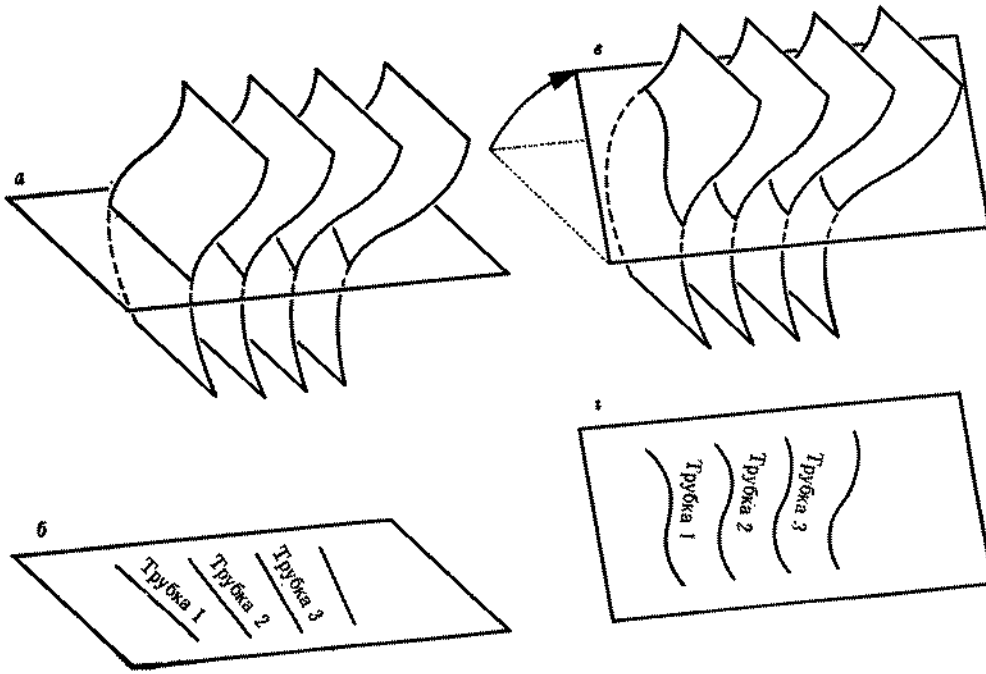
и возьмем в качестве поверхности интегрирования участок поверхности 2-сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $t = \text{const}$, заключенный между $\theta = 70°$ и $\theta = 110°$ и между $\varphi = 0°$ и $\varphi = 90°$ («атлантический район тропиков»). Запишем

$$\begin{aligned} y &= a \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= a\cos\theta, \\ \mathbf{d}y &= a(\cos\theta \sin\varphi\, \mathbf{d}\theta + \sin\theta\cos\varphi\, \mathbf{d}\varphi), \\ \mathbf{d}z &= -a\sin\theta\, \mathbf{d}\theta, \\ \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z &= a^2 \sin^2\cos\varphi\, \mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\varphi. \end{aligned} \tag{4.13}$$

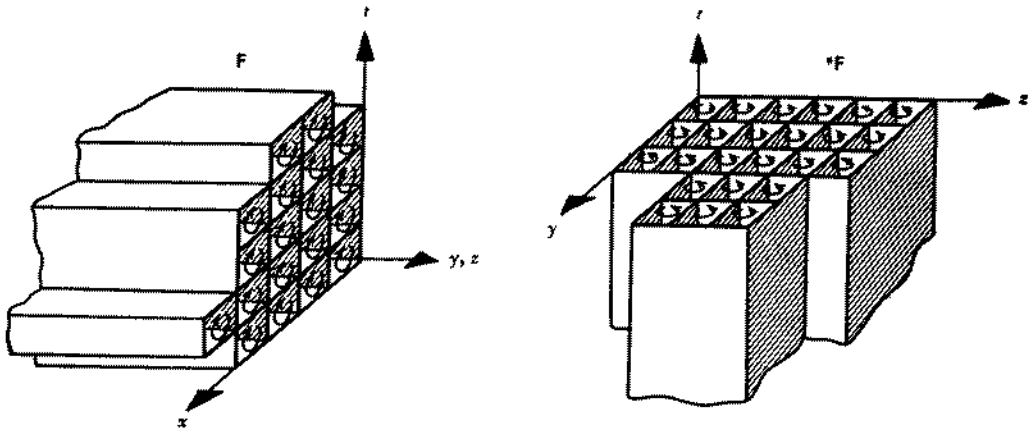
Структура $\mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\theta$ выглядит как «сплющенная коробка для яиц» (фиг. 1.4, справа вверху) и имеет нулевую вместимость — факт, которой формально очевиден из того, что $\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha} = 0$, если $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. При постоянном B_x результат интегрирования имеет вид

$$\int_{\text{поверхность}} \mathbf{F} = a^2 B_x \int_{70°}^{110°} \sin^2\theta\, d\theta \int_{0°}^{90°} \cos\varphi\, d\varphi. \tag{4.14}$$

Чисто электрическое поле гораздо труднее наглядно представить по соответствующей ему 2-форме **F** (фиг. 4.4, слева), чем чисто



ФИГ. 4.3.
Пространственноподобные сечения электромагнитной 2-формы F — геометрического объекта, представляющего собой сотовую конфигурацию трубок, заполняющих все пространство-время («сотовую» в абстрактном смысле, сформулированном более точно в дополнении 4.2). Поверхности на фигуре не похожи на 2-форму (соты), так как второе семейство поверхностей, образующих соты, простирается в том пространственном направлении, которое невозможно изобразить на фигуре. *а* — пространственноподобное сечение 2-формы (ось времени направлена вверх). *б* — проекция 2-формы на эту пространственноподобную гиперповерхность, которая в данной трехмерной геометрии представляет магнитные силовые трубки Фарадея (если добавить недостающее измерение, то трубки станут действительно трубками, а не полосками с линиями в качестве границы). *в* — другое пространственноподобное сечение (гиперповерхность одновременных событий для наблюдателя в другой лоренцевой системе). *г* — конфигурация магнитных трубок в этой системе отсчета, сильно отличающаяся от предыдущей. Потребовав, чтобы в каждом пространственноподобном сечении F магнитные силовые трубки нигде не оканчивались ($\nabla \cdot B = 0$), мы получаем соотношение $\partial B/\partial t = -\nabla \times E$, которое должно выполняться всюду. Таким образом (магнитостатика) + (ковариантность) → (магнитодинамика). Подобным же образом, см. гл. 17 и 21, имеем: (геометростатика) + (ковариантность) → (геометродинамика).



ФИГ. 4.4.
Структура **F**

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu = \frac{1}{2} F_{01}\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x + \frac{1}{2} F_{10}\, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t = E_x\, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t,$$

соответствующая электрическому полю в направлении x, и дуальная («перпендикулярная») сотоподобная 2-форма **M**

$$* = \frac{1}{2} {}^*F_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu = {}^*F_{23}\, \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 =$$
$$= F^{01}\, \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 = F_{10}\, \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 = E_x\, \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z.$$

магнитное поле по соответствующей ему 2-форме **F** (фиг. 4.1—4.3). Не существует ли какой-нибудь метод рассмотрения, при котором эти поля более равноправны? Да, такой метод есть, и чтобы им воспользоваться, нужно построить 2-форму ***F** (фиг. 4.4, справа), *дуальную* («перпендикулярную»; дополнение 4.3; упражнение 3.14) **F**.

Представим в геометрической форме поле точечного заряда e, покоящегося в начале координат. В плоском пространстве в сферических полярных координатах имеем

$$ds^2 = -d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu =$$
$$= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (4.15)$$

Поскольку электрическое поле вдоль радиуса r равно $E_r = e/r^2$, отсюда следует выражение для 2-формы **F**

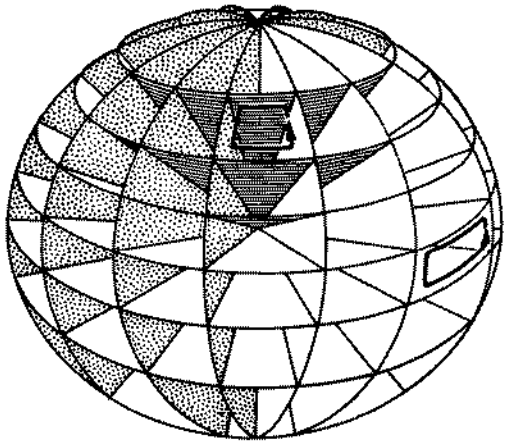
$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu = -E_r\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}r = -\frac{e}{r^2}\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}r. \qquad (4.16)$$

Конфигурация трубок дуальной структуры M в случае покоящегося точечного заряда

Согласно упражнению 3.15, дуальной **F** является 2-форма **M**

$$\mathbf{M} = {}^*\mathbf{F} = e \sin\theta\, \mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\varphi, \qquad (4.17)$$

изображенная на фиг. 4.5.



ФИГ. 4.5.
Поле 2-формы $\mathbf{M} = {}^*\mathbf{F} = e \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$, описывающей электромагнитное поле заряда e, покоящегося в начале координат. Изображенная картина на самом деле есть пересечение $^*\mathbf{F}$ с 3-поверхностью фиксированного значения временной координаты t, т. е. временное направление не представлено на фигуре.

Совершим обход в положительном направлении по замкнутому контуру, ограничивающему некоторый участок поверхности на сфере, показанной на фиг. 4.5. Число трубок $^*\mathbf{F}$, охватываемых этим контуром, в точности равно

$$\begin{pmatrix}\text{число}\\ \text{трубок}\end{pmatrix} = e \begin{pmatrix}\text{телесный}\\ \text{угол}\end{pmatrix}.$$

Полное число трубок $^*\mathbf{F}$, пронизывающих всю сферу, равно $4\pi e$, что вполне согласуется с фарадеевой картиной силовых трубок.

Поле движущегося точечного заряда

Как определить конфигурацию трубок, связанную с заряженной частицей, движущейся с постоянной скоростью? Сначала выразим $^*\mathbf{F}$ в прямоугольных координатах, движущихся вместе с частицей (координаты в этой системе отсчета, движущейся вместе с «ракетой», помечены чертой; используемые ниже координаты без черты относятся к лабораторной системе). Соответствующие этапы имеют вид

а) $^*\mathbf{F} = e \sin\bar\theta\, d\bar\theta \wedge d\bar\varphi = -e\,(\mathbf{d}\cos\bar\theta) \wedge \mathbf{d}\bar\varphi$;

б) $\bar\varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\bar y}{\bar x}$, $\mathbf{d}\bar\varphi = \dfrac{\bar x\,\mathbf{d}\bar y - \bar y\,\mathbf{d}\bar x}{\bar x^2 + \bar y^2}$;

в) $\cos\bar\theta = \dfrac{\bar z}{\bar r}$, $-\mathbf{d}(\cos\bar\theta) = \dfrac{-\mathbf{d}\bar z}{\bar r} + \dfrac{\bar z}{\bar r^3}(\bar x\,\mathbf{d}\bar x + \bar y\,\mathbf{d}\bar y + \bar z\,\mathbf{d}\bar z)$;

г) объединяя написанное, получаем

$$\mathbf{d}\bar y \wedge \mathbf{d}\bar z + \bar y\,\mathbf{d}\bar z \wedge \mathbf{d}\bar x + \bar z\,\mathbf{d}\bar x \wedge \mathbf{d}\bar y) \qquad (4.18)$$

(электромагнитное поле точечного заряда в декартовой системе, движущейся вместе с ним, сферически симметрично). Теперь выполним преобразование к лабораторным координатам:

$$\text{параметр скорости } \alpha,$$

$$\text{скорость } \beta = \operatorname{th}\alpha,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \operatorname{ch}\alpha, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \operatorname{sh}\alpha,$$

а)
$$\begin{cases} \bar{t} = t\operatorname{ch}\alpha - x\operatorname{sh}\alpha, \\ \bar{x} = -t\operatorname{sh}\alpha + x\operatorname{ch}\alpha, \\ \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z; \end{cases}$$

б)
$$\bar{r} = [(x\operatorname{ch}\alpha - t\operatorname{sh}\alpha)^2 + y^2 + z^2]^{1/2};$$

в)
$$^*\mathbf{F} = (e/\bar{r}^3)\,[(x\operatorname{ch}\alpha - t\operatorname{sh}\alpha)\,\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + y\,\mathbf{d}z \wedge (\operatorname{ch}\alpha\,\mathbf{d}x - \operatorname{sh}\alpha\,\mathbf{d}t) + z\,(\operatorname{ch}\alpha\,\mathbf{d}x - \operatorname{sh}\alpha\,\mathbf{d}t) \wedge \mathbf{d}y]; \tag{4.19}$$

г) сравнивая с дуальной 2-формой в общем виде

$$^*\mathbf{F} = E_x\,\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + E_y\,\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + E_z\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + B_x\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x + B_y\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}y + B_z\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}z,$$

получаем выражения для искомых отдельных компонент поля:

д)
$$\begin{cases} E_x = (e/\bar{r}^3)\,(x\operatorname{ch}\alpha - t\operatorname{sh}\alpha), & B_x = 0, \\ E_y = (e/\bar{r}^3)\,y\operatorname{ch}\alpha, & B_y = -(e/\bar{r}^3)\,z\operatorname{sh}\alpha, \\ E_z = (e/\bar{r}^3)\,z\operatorname{ch}\alpha, & B_z = (e/\bar{r}^3)\,y\operatorname{sh}\alpha. \end{cases} \tag{4.20}$$

Легко убедиться, что значения инвариантов

$$B^2 - E^2 = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{4.21}$$

$$E \cdot B = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}{}^*F^{\alpha\beta} \tag{4.22}$$

в лабораторной системе и в системе ракеты, как и требовалось, совпадают. Отметим, что сама сотоподобная структура дифференциальной формы при переходе из системы ракеты в лабораторную систему не изменяется. Меняется лишь математическая формула, которая ее описывает.

Дополнение 4.3. ДУАЛЬНОСТЬ 2-ФОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Если имеется 2-форма общего вида (содержащая шесть внешних, или косых, произведений)

$$\mathbf{F} = E_x\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t + E_y\,\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}t + \ldots + B_z\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y,$$

то дуальная к ней («перпендикулярная») 2-форма задается выражением

$$*\mathbf{F} = -B_x\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt} - \ldots + E_y\,\mathbf{dz}\wedge\mathbf{dx} + E_z\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}.$$

Дуальные повороты

Отметим, что двукратное применение дуальности восстанавливает первоначальную 2-форму с обратным знаком:

$$**\mathbf{F} = -E_x\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt} - \ldots - B_z\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy} = -\mathbf{F}.$$

В этом смысле символ * обладает тем же свойством, что и мнимая единица i: $** = ii = -1$. Поэтому можно написать

$$e^{*\alpha} = \cos\alpha + *\sin\alpha.$$

Применяя эту операцию к $\mathbf{F}$, мы из 2-формы общего вида в простейшем представлении (см. упражнение 4.1)

$$\mathbf{F} = E_x\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt} + B_x\,\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}$$

получаем «дуально повернутое электромагнитное поле»

$$e^{*\alpha}\mathbf{F} = (E_x\cos\alpha - B_x\sin\alpha)\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt} + (B_x\cos\alpha + E_x\sin\alpha)\,\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}.$$

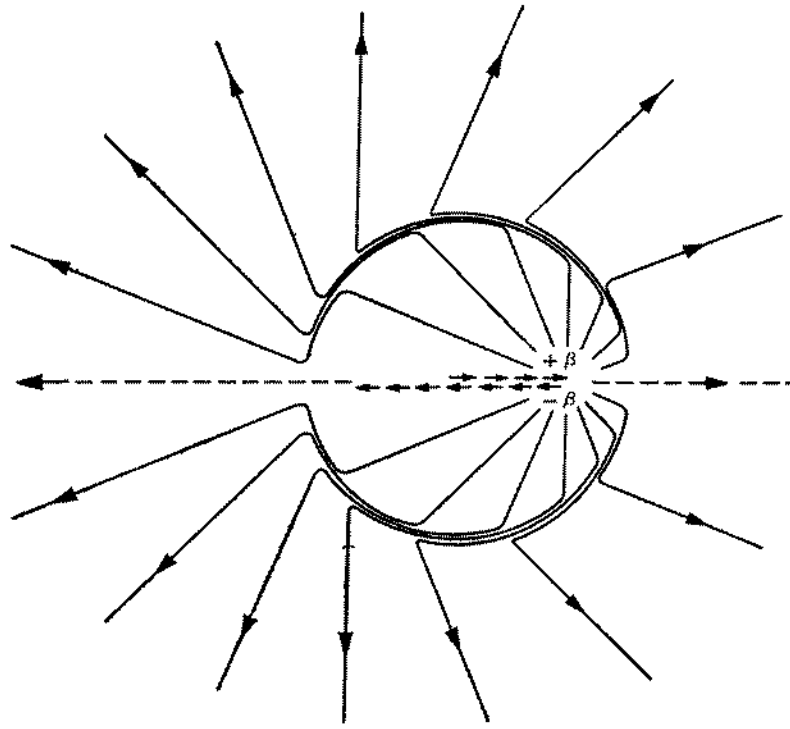
Если начальное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла в пустоте, то им удовлетворяет и новое поле. Соответствующим выбором «угла дуального поворота» α можно занулить одно из двух косых произведений в любой, заранее выбранной точке пространства-времени, после чего второе приобретает вид

$$(B_x^2 + E_x^2)^{1/2}\,\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}.$$

§ 4.4. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Структура $\mathbf{M}$ (представленная в виде трубок), соответствующая равномерно движущемуся заряду, имеет гораздо больше замечательных свойств, чем может показаться с первого взгляда, даже если принять во внимание лоренцево сокращение трубок в направлении движения. Движение трубок, расположенных как угодно далеко, находится в строгом соответствии с движением заряда, на котором они оканчиваются, несмотря на отсутствие времени, за которое информация, «испущенная» зарядом в данный момент, могла бы достигнуть в данный же момент удаленной трубки. Следовательно, конфигурация удаленных трубок в данный момент должна обусловливаться состоянием заряда в более ранний момент его равномерного движения по прямолинейной траектории. Это обстоятельство нигде не проявляется так четко, как в изменении, которое претерпевает поле в результате внезапного (за короткое время $\Delta\tau$) перехода от движения с одним значением постоянной скорости к движению с другим значением постоянной скорости (фиг. 4.6). Конфигурации трубок в обоих состояниях движения соответствуют равномерному движению: внутри сферы радиуса r

Как ускорение приводит к излучению



ФИГ. 4.6.
Механизм излучения. Принадлежащее Дж. Томсону объяснение того, что напряженность в электромагнитной волне падает обратно пропорционально лишь первой степени расстояния r и что амплитуда волны меняется (при малых скоростях) как $\sin\theta$ (максимум в плоскости, перпендикулярной линии ускорения). Сначала заряд двигался влево с постоянной скоростью. Силовые линии вдали от него продолжают двигаться так, как если бы постоянная скорость поддерживалась все время (кулоновское поле точечного заряда, движущегося с малой скоростью). Однако вблизи поле является уже полем точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью вправо (напряженность зависит от расстояния как $1/r^2$). Переход от одной конфигурации поля к другой осуществляется в слое толщиной $\Delta\tau$, находящемся на расстоянии r от точки ускорения (усиление поля за счет «фактора растяжения» $r\sin\theta\Delta\beta/\Delta\tau$, см. текст).

одна конфигурация, вне ее — другая, причем r равно времени («см пути, пройденного светом за это время»), прошедшему с момента ускорения. Необходимость сшивания двух конфигураций в промежуточной зоне толщины $\Delta r = \Delta\tau$ приводит к тому, что поле в ней нужно умножить на «фактор растяжения», пропорциональный r. Именно этим множителем обусловлен тот хорошо известный факт, что поле излучения спадает обратно пропорционально лишь первой степени расстояния (фиг. 4.6).

Если состояние движения заряда изменяется непрерывным образом, структура электромагнитного поля, будучи основанной на тех же простых принципах, которые иллюстрирует фиг. 4.6, имеет тем не менее более сложный вид. При этом 2-форма $\mathbf{F}$ для поля электрического диполя величины p_1, осциллирующего вверх-вниз параллельно оси z, имеет вид

Поле осциллирующего диполя

$$\mathbf{F} = E_x\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}t + \ldots + B_x\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z + \ldots =$$

$$= \text{вещественная часть}\left\{p_1 e^{i\omega r - i\omega t}\Big[\underbrace{2\cos\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}\right)}_{\text{дает } E_r}\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}t + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\sin\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)}_{\text{дает } E_\theta} r\,\mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}t + \underbrace{\sin\theta\left(\frac{-i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)}_{\text{дает } B_\phi}\mathbf{d}r\wedge r\,\mathbf{d}\theta\Big]\right\}. \quad (4.23)$$

Дуальная 2-форма $\mathbf{M} = {}^*\mathbf{F}$ в этом случае имеет вид

$${}^*\mathbf{F} = -B_x\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}t - \ldots + E_x\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z + \ldots =$$

$$= \text{вещественная часть}\left\{p_1 e^{i\omega r - i\omega t}\Big[\underbrace{\sin\theta\left(\frac{-i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)}_{\text{дает } B_\phi}\mathbf{d}t\wedge r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi + \right.$$

$$+ \underbrace{2\cos\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}\right)}_{\text{дает } E_r} r\,\mathbf{d}\theta\wedge r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi +$$

$$\left. + \underbrace{\sin\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)}_{\text{дает } E_\theta} r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi\wedge\mathbf{d}r\Big]\right\}. \quad (4.24)$$

§ 4.5. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

2-форма $\mathbf{F}$ в общем случае записывается в виде суперпозиции косых произведений с множителем $^1/_2$:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,\mathbf{d}x^\mu\wedge\mathbf{d}x^\nu, \quad (4.25)$$

так как каждый член встречается дважды: один раз в виде $F_{xy}\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y$ и второй раз в виде $F_{yx}\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}x$, причем $F_{yx} = -F_{xy}$ и $\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}x = -\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y$.

Если в результате дифференцирования («вычисления градиента», оператор $\mathbf{d}$) скаляра получалась 1-форма, то дифференцирование (опять оператор $\mathbf{d}$, но уже известный под названием «внешнее дифференцирование», введенным Картаном) 1-формы в общем случае приводит к 2-форме, дифференцирование 2-формы приводит к 3-форме, дифференцирование 3-формы приводит к 4-форме —

форме наивысшего ранга, которая может существовать в пространстве-времени. Запишем f-форму в общем виде

$$\Phi = \frac{1}{f!}\phi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_f}\,\mathbf{d}x^{\alpha_1}\wedge\mathbf{d}x^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge\mathbf{d}x^{\alpha_f}, \tag{4.26}$$

где коэффициенты $\phi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_f}$, как и косые произведения, перед которыми они стоят, антисимметричны по отношению к перестановке любых двух индексов. Тогда внешняя производная Φ равна

Вычисление внешней производной

$$\mathbf{d}\Phi \equiv \frac{1}{f!}\frac{\partial\phi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_f}}{\partial x^{\alpha_0}}\,\mathbf{d}x^{\alpha_0}\wedge\mathbf{d}x^{\alpha_1}\wedge\mathbf{d}x^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge\mathbf{d}x^{\alpha_f}. \tag{4.27}$$

Вычисление внешней производной $\mathbf{F}$ согласно этому правилу показывает, что она обращается в нуль не только в частном случае дипольного осциллятора, но и в случае электромагнитного поля самого общего вида. В координатах, соответствующих локально лоренцевой системе отсчета, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{dF} &= \mathbf{d}\,(E_x\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}t+\ldots+B_x\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z+\ldots) = \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\mathbf{d}t+\frac{\partial E_x}{\partial x}\mathbf{d}x+\frac{\partial E_x}{\partial y}\mathbf{d}y+\frac{\partial E_x}{\partial z}\mathbf{d}z\right)\wedge\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}t+ \\ &+\ldots\text{ (еще 5 таких скобок по 4 члена в каждой)}\ldots.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Отметим, что такой член, как $\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z$, тождественно равен нулю («коробка для яиц сплющивается, если на нее наступить»). Собрав не равные нулю члены, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{dF} = &\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z+ \\ &+\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z+ \\ &+\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x+ \\ &+\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Каждый член в этом выражении уже знаком нам из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

и

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}},$$

и все эти члены равны нулю. Таким образом, мы видим, что внешняя производная $\mathbf{F}$ обращается в нуль:

$$\mathbf{dF} = 0. \tag{4.30}$$

Другими словами, «**F** является замкнутой 2-формой», «трубки **F** нигде не оканчиваются».

Структура F: трубки нигде не оканчиваются

Подобные вычисления приводят к следующему результату для внешней производной дуальной 2-формы **M**:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^*\mathbf{F} &= \mathbf{d}\left(-B_x\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}-\ldots+E_x\,\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}+\ldots\right)=\\ &=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}+\\ &\quad+\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}+\ldots=\\ &=4\pi\left(\rho\,\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}-J_x\,\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}-\right.\\ &\quad\left.-J_y\,\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dz}\wedge\mathbf{dx}-J_z\,\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}\right)=4\pi^*\mathbf{J};\end{aligned}$$

$$\mathbf{d}^*\mathbf{F}=4\pi^*\mathbf{J}. \tag{4.31}$$

Структура M: плотность распределения окончаний трубок дается 3-формой заряда-тока

В пустом пространстве эта внешняя производная также равна нулю; в нем **M** тоже является замкнутой 2-формой, и трубки ***F** подобно трубкам **F** нигде не оканчиваются.

Иначе обстоит дело в той области, где есть заряд. В такой области берут свое начало трубки **M**. Плотность окончаний описывается 3-формой ***J**, представляющей собой «совокупность ячеек коробки для яиц», вытянутых (в четырехмерном пространстве-времени) вдоль мировых линий.

Два уравнения

$$\mathbf{dF}=0$$

и

$$\mathbf{d}^*\mathbf{F}=4\pi^*\mathbf{J}$$

на геометрическом языке в лиостью передают содержание уравнений Максвелла. Для описания форм **F** и ***F** = **M** можно выбирать любые координаты или язык (структуры, подобные сотам или «коробке для яиц»), вообще не использующий никаких координат. Замечательно то, что ни одно из уравнений не нуждается в понятии метрики. Для введения понятий формы и внешней производной метрика не нужна, как неоднократно подчеркивал Герман Вейль — один из самых горячих сторонников этой идеи (см. также гл. 8 и 9). Метрика появилась только в одном месте — в понятии дуальности («перпендикулярности»), когда мы перешли от **F** к дуальному объекту ***F**.

Дуальность — единственное место в теории электромагнетизма, где появляется метрика

§ 4.6. ВНЕШНЯЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ЗАМКНУТЫЕ ФОРМЫ

Понятия «соты» и «коробка для яиц» могли дать некоторое представление о геометрии, связанной с электродинамикой. Теперь мы попытаемся изложить эти понятия более четко и проиллюстриро-

вать в геометрических терминах на примере электродинамики, что подразумевается под «внешним дифференцированием». Обход вокруг границы? Да. Но какой, почему и что из него вытекает? Полезно вернуться к функциям и 1-формам и взглянуть на них и на 2-формы **F** и **M** и на 3-форму ***J** как на члены упорядоченной последовательности (см. дополнение 4.4). Из дополнения 4.4 видно, что 2-формы бывают двух типов: 1) частный случай 2-форм — «замкнутые» 2-формы, обладающие тем свойством, что число трубок, входящих под замкнутую 2-поверхность, равно числу трубок, выходящих из-под нее (внешняя производная 2-формы равна нулю; из нее нельзя получить другой 3-формы, кроме тривиальной, равной нулю!), и 2) общий случай 2-форм, у которых полное число трубок, пронизывающих замкнутую 2-поверхность, не равно нулю и которые позволяют определить нетривиальную 3-форму («внешнюю производную 2-формы»), содержащую внутри каждой замкнутой 2-поверхности ровно столько ячеек «коробки для яиц», сколько из-под этой поверхности выходит трубок первоначальной 2-формы (обобщение введенного Фарадеем понятия силовых трубок на случай пространства-времени, как плоского, так и искривленного).

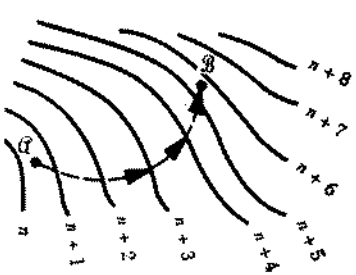
Отличие замкнутых 2-форм от 2-форм общего вида

Дополнение 4.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФОРМ И ВНЕШНИХ ПРОИЗВОДНЫХ

0-форма, или скаляр f

Примером в случае 3-пространства и ньютоновской физики является температура $T(x, y, z)$, а в случае пространства-времени — скалярный потенциал $\phi(t, x, y, z)$.

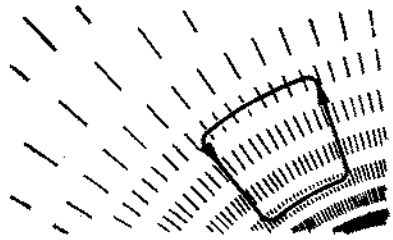
От скаляра к 1-форме



Вычислив градиент, или «внешнюю производную» скаляра f, получим частный случай 1-формы $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{d}f$. *Замечания*: а. Произвольная аддитивная постоянная, добавленная к f, при дифференцировании исчезает; значение n на фигуре неизвестно и неважно. б. 1-форма $\boldsymbol{\gamma}$ является частным случаем в том смысле, что поверхности из одной окрестности «зацепляются» с поверхностями из соседней окрестности («замкнутая 1-форма»). в. Интеграл по контуру $\mathcal{AB}\int \mathbf{d}f$ не зависит от пути интегрирования в классе траекторий, эквивалентных друг другу при непрерывной деформации. г. 1-форма представляет собой машину, производящую число («удары колокола» при каждом пересечении очередной интегральной поверхности) из смещения (аппроксимации понятия касательного вектора).

1-форма в общем случае $\beta = \beta_\alpha dx^\alpha$

Она представляет собой конфигурацию поверхностей, иллюстрируемую на фигуре, т. е. машину, производящую число («удары колокола», $\langle \beta, u \rangle$) из вектора. Реальность существования 1-формы и ее положение в пространстве не зависят от выбора системы координат. Поверхности, как правило не зацепляются. Интеграл $\int \beta$ по указанному замкнутому контуру не равен нулю («ударов больше, чем антиударов»).

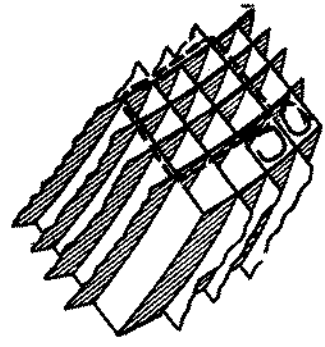


От 1-формы к 2-форме $\xi = d\beta = \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^\alpha$

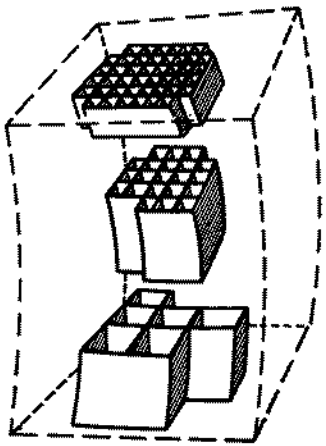
ξ представляет собой конфигурацию сотоподобных ячеек с указанным направлением обхода, размещенных таким образом, что число ячеек внутри замкнутого пунктирного контура совпадает с суммарным числом (разностью между ударами и антиударами), полученным при обходе того же контура на фигуре, иллюстрирующей β. «Внешняя производная» определена таким образом, что это всегда выполняется; в этом состоит утверждение обобщенной теоремы Стокса. Слово «внешняя» обязано своим происхождением тому факту, что контур обхода расположен на краю рассматриваемой окрестности. Таким образом, 2-форма является машиной, производящей число (число трубок $\langle \xi, u \wedge v \rangle$) из участка поверхности ($u \wedge v$), на котором указано направление обхода. Определенная таким образом 2-форма есть частный случай 2-формы в следующем смысле: резиновую пленку, «закрепленную по краю» пунктирным контуром или какой-либо другой замкнутой кривой, пересекает всегда одно и то же число трубок независимо от того, а) вспучивается ли она посередине, или б) продавливается посередине, или в) испытывает какую-либо другую непрерывную деформацию. 2-форма электромагнитного поля F, которую всегда можно выразить в виде $F = dA$ (A = 4-потенциал, 1-форма), также обладает этим специальным свойством («сохранения трубок»).

От 0-формы к 1-форме, а затем к 2-форме? Нет!

Перейдем от скаляра f к 1-форме $\gamma = df$. Однако следующий шаг к 2-форме α уже не имеет смысла. Полное значение интеграла $\int \gamma$ по пунктирному замкнутому контуру автоматически обращается в нуль. Чтобы представить этот нулевой результат, нужна нулевая 2-форма. Таким образом, $\alpha = d\gamma = ddf$ должно быть нулевой 2-формой. Этот результат является частным примером общего результата $dd = 0$.

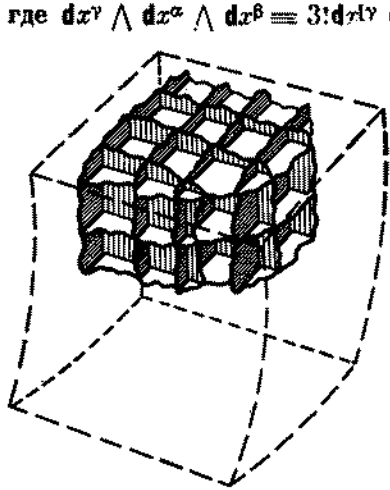


Общий случай 2-формы $\sigma = \frac{1}{2}\,\sigma_{\alpha\beta}\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$, **где** $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$



Это также сотоподобная структура и также машина, производящая число (число трубок $\langle \sigma, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle$) из поверхности ($\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$), на которой указано направление обхода. Она является общей в том смысле, что сотоподобные структуры из одной окрестности, как правило, не зацепляются с такими же структурами из соседней окрестности. Вследствие этого замкнутую 2-поверхность, подобную поверхности в виде ящика, показанного на фигуре пунктиром, пересекает, как правило, не нулевое полное число трубок. Однако полное число трубок, выходящих из-под такой замкнутой поверхности, в точности равно нулю, если 2-форма есть внешняя производная 1-формы

От 2-формы к 3-форме $\mu = \mathbf{d}\sigma = \frac{\partial \sigma_{[\alpha\beta]}}{\partial x^\gamma}\mathbf{d}x^\gamma \wedge \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$,
где $\mathbf{d}x^\gamma \wedge \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta = 3!\mathbf{d}x^{[\gamma} \otimes \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^{\beta]}$



Эта структура, подобная коробке для яиц, представляет собой машину, производящую число (число ячеек (μ, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$)) из объема (объема $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, в котором подсчитываются ячейки). На более полной схеме должна быть указана ориентация каждой ячейки и самого объема интегрирования (аналогично стрелкам, указывающим направление обхода в ячейках 2-формы). При подсчете числа ячеек вклад данной ячейки равен $+1$ или -1 в зависимости от того, совпадает ли ее ориентация с ориентацией объема интегрирования или они противоположны. Число ячеек «коробки для яиц», соответствующей $\mu = \mathbf{d}\sigma$, в любом заданном объеме (подобном тому, который показан пунктиром) в точности равно полному числу трубок 2-формы σ (фигура выше), выходящих из этого объема (обобщенная теорема Стокса). В электромагнетизме внешняя производная 2-формы $\mathbf{F}$ дает нулевую 3-форму, а внешняя производная 2-формы $^*\mathbf{F} = \mathbf{M}$ дает 4π, умноженное на 3-форму заряда $^*\mathbf{J}$:

$$^*\mathbf{J} = \rho\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z - J_x\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z - J_y\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x - J_z\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y.$$

От 1-формы к 2-форме, а затем к 3-форме? Нет!

Взяв 1-форму (электромагнитный 4-потенциал) и вычислив ее внешнюю производную, получим 2-форму $\mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{A}$. Трубки этой сотоподобной структуры нигде

не оканчиваются, т. е. число окончаний трубок в каждом бесконечно малом объеме, а следовательно, и 3-форма $\mathbf{dF} = \mathbf{ddA}$ автоматически обращаются в нуль. Это еще один пример общего результата $\mathbf{dd} = 0$.

От 2-формы к 3-форме, а затем к 4-форме? Нет!

Взяв 2-форму $^*\mathbf{F}$ и вычислив ее внешнюю производную, получим 3-форму $4\pi{}^*\mathbf{J}$. Ячейки этой структуры, подобной коробке для яиц, вытянуты вдоль четвертой координаты («гипертрубки»). Число таких гипертрубок, оканчивающихся в бесконечно малом объеме, а следовательно, и 4-форма

$$\mathbf{d}(4\pi{}^*\mathbf{J}) = \mathbf{dd}^*\mathbf{F}$$

автоматически обращаются в нуль — еще один пример общего результата $\mathbf{dd} = 0$. Этот результат гласит

$$\mathbf{d}^*\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = 0$$

(«закон сохранения заряда»). Примечание:

$$\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma \wedge \mathbf{d}x^\delta \equiv 4!\, \mathbf{d}x^{[\alpha} \otimes \mathbf{d}x^\beta \otimes \mathbf{d}x^\gamma \otimes \mathbf{d}x^{\delta]}.$$

Отсюда следует $\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = \boldsymbol{\varepsilon}$.

От 3-формы к 4-форме $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{dv} = \frac{\partial v_{[\alpha\beta\gamma]}}{\partial x^\delta}\, \mathbf{d}x^\delta \wedge \mathbf{d}x^\alpha_{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma$

Эта четырехмерная структура, подобная «суперкоробке для яиц», представляет собой машину, производящую число (число ячеек $\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle$) из 4-объема $\mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

От 4-формы к 5-форме? Нет!

Пространство-время, будучи четырехмерным, не может вместить пятимерные структуры типа коробки для яиц. По крайней мере два из сомножителей $\mathbf{d}x^\mu$ в

$$\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma \wedge \mathbf{d}x^\delta \wedge \mathbf{d}x^\varepsilon$$

должны совпадать, откуда при учете антисимметрии $\wedge$ следует, что эта «базисная 5-форма» должна обращаться в нуль.

Результаты внешнего дифференцирования

0-форма	f				
1-форма	$\mathbf{d}f$	$\mathbf{A}$			
2-форма	$\mathbf{dd}f = 0$	$\mathbf{F} = \mathbf{dA}$	$^*\mathbf{F}$		
3-форма		$\mathbf{dF} = \mathbf{ddA} \equiv 0$	$4\pi{}^*\mathbf{J} = \mathbf{d}^*\mathbf{F}$	$\mathbf{v}$	
4-форма			$\mathbf{d}(4\pi{}^*\mathbf{J}) = \mathbf{dd}^*\mathbf{F} \equiv 0$	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{dv}$	$\boldsymbol{\mu}$
5-форма?	Нет!			$\mathbf{d}\boldsymbol{\tau} \equiv 0$	$\mathbf{d}\boldsymbol{\mu} \equiv 0$

Новые формы, образованные из старых с помощью операции дуальности (см. упражнение 3.14)

Дуальной к скаляру f является 4-форма: $^*f = f\mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 = f\boldsymbol{\varepsilon}$.
Дуальной к 1-форме $\mathbf{J}$ является 3-форма: $^*\mathbf{J} = J^0\,\mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 - J^1\,\mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3 \wedge \wedge \mathbf{dx}^0 + J^2\,\mathbf{dx}^3 \wedge \mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 - J^3\,\mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2$.
Дуальной к 2-форме $\mathbf{F}$ является 2-форма: $^*\mathbf{F} = F^{|\alpha\beta|}\varepsilon_{\alpha\beta|\mu\nu|}\mathbf{dx}^\mu \wedge \mathbf{dx}^\nu$, где $F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\delta}F_{\lambda\delta}$.
Дуальной к 3-форме $\mathbf{K}$ является 1-форма: $^*\mathbf{K} = K^{012}\,\mathbf{dx}^3 - K^{123}\,\mathbf{dx}^0 + K^{230}\,\mathbf{dx}^1 - K^{301}\,\mathbf{dx}^2$, где $K^{\alpha\beta\gamma} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\lambda}K_{\mu\nu\lambda}$.
Дуальной к 4-форме $\mathbf{L}$ является скаляр: $\mathbf{L} = L_{0123}\,\mathbf{dx}^0 \wedge \mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2 \wedge \mathbf{dx}^3$; $^*\mathbf{L} = L^{012}{}_{\text{н}} = -L_{0123}$.

Пр^{3}имечание 1. Это понятие дуальности *между формами* следует отличать от понятия дуальности *между векторным базисом* $\mathbf{e}_\alpha$ *и базисом* 1*-форм* $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ данной системы координат. Между этими двумя типами дуальности нет ничего общего!

Примечание 2. В пространстве-времени операция дуальности, примененная дважды, снова приводит к первоначальной форме — для форм нечетного ранга и к первоначальной форме с обратным знаком — для форм четного ранга. В эвклидовом 3-пространстве всегда воспроизводится первоначальная форма независимо от ее ранга

Дуальность плюс внешнее дифференцирование

Возьмем скаляр ϕ. Его градиент $\mathbf{d}\phi$ есть 1-форма. Образуем дуальную ему 3-форму $^*\mathbf{d}\phi$. Ее внешняя производная есть 4-форма $\mathbf{d}^*\mathbf{d}\phi$. Дуальным к ней объектом является скаляр $\Box\phi = -^*\mathbf{d}^*\mathbf{d}\phi$. Проделав соответствующие выкладки в индексных обозначениях, можно убедиться, что оператор $\Box$, определенный таким образом, есть волновой оператор, т. е. в любой лоренцевой системе $\Box\phi = \phi_{,\alpha}{}^{,\alpha} = -(\partial^2\phi/\partial t^2) + \nabla^2\phi$.

Возьмем 1*-форму* $\mathbf{A}$. Построим 2-форму $\mathbf{F} = \mathbf{dA}$. Образуем дуальную к ней 2-форму $^*\mathbf{F} = {}^*\mathbf{dA}$. Вычислим ее внешнюю производную, получив при этом 3-форму $\mathbf{d}^*\mathbf{F}$ (равную $4\pi{}^*\mathbf{J}$ в электромагнетизме). Дуальной к ней является 1-форма $^*\mathbf{d}^*\mathbf{F} = {}^*\mathbf{d}^*\mathbf{dA} = 4\pi\mathbf{J}$ («волновое уравнение для электромагнитного 4-потенциала»). В индексных обозначениях это уравнение сводится к

$$F_{\mu\nu}{}^{,\nu} = A_{\nu,\,\mu}{}^{,\nu} - A_{\mu,\,\nu}{}^{,\nu} = 4\pi J_\mu.$$

(Более подробно см. [102, 106]; см. также упражнение 3.17.)

§ 4.7. ДЕЙСТВИЕ НА РАССТОЯНИИ КАК СЛЕДСТВИЕ ЛОКАЛЬНОГО ЗАКОНА

В качестве инструмента в теории электромагнетизма дифференциальные формы обладают огромными возможностями, но, чтобы использовать их в полной мере, необходимо владеть и другими инструментами. Особенно важны методы, используемые при описании действия на расстоянии («функции Грина», «пропагаторы»).

Более того, переход от максвелловских уравнений поля к электромагнитному действию на расстоянии во многом предвосхищает то, как эйнштейновские локальные уравнения воспроизводят (приближенно) закон Ньютона $1/r^2$.

В плоском пространстве-времени выразим координаты частицы A в лоренцевой системе координат как функции ее собственного времени α:

$$a^\mu = a^\mu(\alpha), \qquad \frac{da^\mu}{d\alpha} = \dot{a}^\mu(\alpha), \qquad \frac{d^2a^\mu}{d\alpha^2} = \ddot{a}^\mu(\alpha). \tag{4.32}$$

Мировая линия заряда как последовательность вспыхивающих на мгновение и гаснущих зарядов

Дирак нашел удобное представление для распределения заряда и тока движущейся таким образом частицы с зарядом e в виде суперпозиции зарядов, которые возникают на мгновение («вспыхивают»), а затем исчезают и не существуют за пределами этого мгновения. Локализацию каждой такой вспышки в пространстве и времени можно записать в виде произведения четырех дираковских дельта-функций (см., например, [71, 72]):

$$\delta^4(x^\mu - a^\mu) = \delta[x^0 - a^0(\alpha)]\,\delta[x^1 - a^1(\alpha)]\,\delta[x^2 - a^2(\alpha)]\,\delta[x^3 - a^3(\alpha)]. \tag{4.33}$$

Каждая функция Дирака $\delta(x)$ («символическая функция»; «распределение»; «предел гауссовой функции ошибок» с бесконечно малой шириной, бесконечно высоким максимумом и равным единице интегралом) в отдельности 1) равна нулю при $x \neq 0$, а 2) интеграл от нее равен $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$. При таком описании вектор 4-тока частицы представляется в виде («суперпозиция вспышек»)

$$J^\mu = e\int \delta^4[x^\nu - a^\nu(\alpha)]\,a^\mu(\alpha)\,d\alpha. \tag{4.34}$$

4-ток (4.34) приводит к появлению электромагнитного поля $\mathbf{F}$. Запишем его в виде $\mathbf{F} = \mathbf{dA}$, чтобы удовлетворить тождественно половине максвелловских уравнений ($\mathbf{dF} = \mathbf{ddA} \equiv 0$):

$$F_{\mu\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}, \tag{4.35}$$

В плоском пространстве остальные уравнения Максвелла ($\mathbf{d{*}F} = 4\pi{*}\mathbf{J}$) принимают вид

$$\frac{\partial F_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu} = 4\pi J_\mu,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} - \eta^{\nu\alpha}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu\,\partial x^\alpha} = 4\pi J_\mu. \tag{4.36}$$

Воспользуемся тем произволом, который существует при выборе 4-потенциала A^ν, и потребуем выполнения условия

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \tag{4.37}$$

Уравнение электромагнитных волн

(лоренцево условие калибровки, см. упражнение 3.17). Таким образом, получаем

$$\Box A_\mu = -4\pi J_\mu. \tag{4.38}$$

Поскольку 4-ток есть суперпозиция «вспышек», действие (**A**) этого 4-тока можно выразить в виде суперпозиции воздействий E элементарных вспышек, т. е.

Решение волнового уравнения

$$A^\mu(x) = \int E[x - a(\alpha)]\, \dot{a}^\mu(\alpha)\, d\alpha, \tag{4.39}$$

где «элементарное воздействие» E («ядро», «функция Грина») удовлетворяет уравнению

$$\Box E(x) = -4\pi\delta^4(x). \tag{4.40}$$

Одним из решений является «полуопережающий плюс полузапаздывающий потенциал»

$$E(x) = \delta(\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta). \tag{4.41}$$

Он равен нулю всюду, кроме направленных в будущее и в прошлое световых конусов, в которых он постоянен. Обычно более полезным оказывается запаздывающее решение

$$R(x) = \begin{cases} 2E(x), & \text{если } x^0 > 0, \\ 0, & \text{если } x^0 < 0, \end{cases} \tag{4.42}$$

которое получается при удвоении (4.41) в световом конусе будущего и обращении в нуль в световом конусе прошлого. Вся электродинамика (сила Кулона, закон Ампера, электромагнитная индукция, излучение) вытекает из простого выражения (4.39) для векторного потенциала (см., например, [89, 90], а также [109]).

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Простейшая форма локального электромагнитного поля в общем случае

В лабораторной лоренцевой системе электрическое поле равно $\boldsymbol{E}$, а магнитное поле равно $\boldsymbol{B}$. Частными случаями являются: 1) чисто электрическое поле ($\boldsymbol{B} = 0$), 2) чисто магнитное поле ($\boldsymbol{E} = 0$) и 3) «поле излучения», или «нулевое поле» ($\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ равны по величине и направлены перпендикулярно друг другу). Все случаи, отличные от этих трех, являются «общими». Вычислите в общем случае плотность потока энергии $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/4\pi$ (вектор Пойнтинга) и плотность энергии $(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)/8\pi$. С помощью отношения потока энергии к плотности энергии задайтесь направлением единичного вектора $\boldsymbol{n}$

и величиной параметра скорости α:

$$n \operatorname{th} 2\alpha = \frac{2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}.$$

Рассмотрите то же электромагнитное поле в системе ракеты, движущейся в направлении n с параметром скорости α (но не 2α; множитель 2 вошел потому, что поток энергии и плотность энергии представляют собой компоненты не вектора, а тензора). Используя формулы преобразования Лоренца (3.23) или каким-нибудь иным способом покажите, что в системе ракеты поток энергии равен нулю, откуда следует, что $\overline{\boldsymbol{E}}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$ параллельны. Ось $\bar{z}$ всегда можно направить в направлении, общем для $\overline{\boldsymbol{E}}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$. Покажите, что при таком выборе ориентации $\mathbf{F}$ принимает вид

$$\mathbf{F} = \overline{E}_z\, \mathbf{d}\bar{z}\wedge\mathbf{d}\bar{t} + \overline{B}_z\, \mathbf{d}\bar{x}\wedge\mathbf{d}\bar{y}$$

(нужно только два косых произведения, чтобы представить локальное поле общего вида, «каноническое представление»; если справедливо в одной системе, то, следовательно, справедливо в любой системе).

4.2. Произвол в выборе 1-форм в каноническом представлении локального поля общего вида

Будем проводить рассмотрение в столь ограниченной окрестности, что изменением поля от точки к точке можно пренебречь. Запишем $\mathbf{F}$ в каноническом представлении вида

$$\mathbf{F} = \mathbf{d}p_{\mathrm{I}}\wedge\mathbf{d}q^{\mathrm{I}} + \mathbf{d}p_{\mathrm{II}}\wedge\mathbf{d}q^{\mathrm{II}},$$

где p_A (A = I или II) и q^A — скалярные функции точки в пространстве-времени. Определим «каноническое преобразование» к новым скалярным функциям точки $p_{\bar{A}}$ и $q^{\bar{A}}$ с помощью «уравнения преобразования»

$$p_A\mathbf{d}q^A = \mathbf{d}S + p_{\bar{A}}\mathbf{d}q^{\bar{A}},$$

где «генерирующей функцией» S преобразования является произвольная функция q^A и $q^{\bar{A}}$

$$\mathbf{d}S = (\partial S/\partial q^A)\,\mathbf{d}q^A + (\partial S/\partial q^{\bar{A}})\,\mathbf{d}q^{\bar{A}}.$$

а. Получите выражения для обоих p_A и обоих $p_{\bar{A}}$ через S, приравняв по очереди коэффициенты при dq^{I}, dq^{II}, $dq^{\bar{\mathrm{I}}}$, $dq^{\bar{\mathrm{II}}}$ по обе стороны уравнения преобразования.

б. Используя эти выражения для p_A и $p_{\bar{A}}$, покажите, что $\mathbf{F} = \mathbf{d}p_A\wedge\mathbf{d}q^A$ и $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{d}p_{\bar{A}}\wedge\mathbf{d}q^{\bar{A}}$, отличные по виду друг от друга, на самом деле являются выражениями для одной и той же 2-формы через различные совокупности 1-форм.

УПРАЖНЕНИЯ

4.3. Замкнутая, или безвихревая, 1-форма есть градиент

Покажите, что если задана 1-форма $\boldsymbol{\sigma}$, такая, что $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$, то $\boldsymbol{\sigma}$ может быть представлена в виде $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}f$, где f — некоторый скаляр. 1-форму $\boldsymbol{\sigma}$ называют «безвихревой», являющейся частным случаем 1-формы «без вращения» (представимой в виде $\boldsymbol{\sigma} = h\mathbf{d}f$), которая изучается в следующем упражнении и которая в свою очередь есть более узкое понятие (см. фиг. 4.7), чем «1-форма с вращением» (непредставимая в виде $\boldsymbol{\sigma} = h\mathbf{d}f$). Покажите также, что если σ_α есть компоненты разложения «безвихревой» 1-формы $\boldsymbol{\sigma}$ по базисным 1-формам $\mathbf{d}x^\alpha$, то выполняется соотношение $\sigma_{[\alpha,\ \beta]} = 0$.

4.4. Каноническое выражение для 1-формы без вращения

В трехмерном пространстве твердое тело, вращающееся вокруг оси z с угловой скоростью ω, имеет компоненты скорости $v_y = \omega x$, $v_x = -\omega y$. Величина $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ имеет z-компоненту, равную 2ω, а остальные компоненты равны нулю. Таким образом, скалярное произведение $\boldsymbol{v}$ на $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}$ равно нулю:

$$v_{[i,\ j}v_{k]} = 0.$$

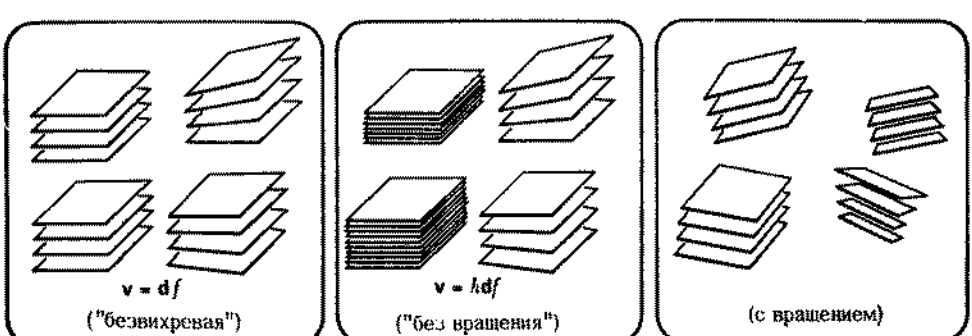
Этот факт обобщается и на случай четырехмерного пространства

$$v_{[\alpha,\ \beta}v_{\gamma]} = 0$$

и может быть выражен на языке, свободном от координат, как требование обращения в нуль некоторой 3-формы

$$\mathbf{dv} \wedge \mathbf{v} = 0.$$

Произвольная 1-форма $\mathbf{v}$, удовлетворяющая этому условию, называется 1-формой «без вращения». Покажите, что 1-формами без вращения являются те и только те, которые могут быть представ-



ФИГ. 4.7.
Сравнение и противопоставление некоторых простых типов 1-форм.

лены в виде

$$\mathbf{v} = h\mathbf{d}f,$$

где h и f — скалярные функции точки («теорема Фробениуса»).

4.5. Формы, обладающие полярными сингулярностями

Перечислите основные результаты, касающиеся представлений таких форм, например

$$\Phi_1 = \frac{dS}{S} \wedge \psi_1 + \theta_1,$$

и укажите условия применимости каждого из них (смысл этого задания и ответ можно найти в работе [110]).

4.6. Поле осциллирующего диполя

Убедитесь, что выражения (4.23) и (4.24) для электромагнитного поля осциллирующего диполя удовлетворяют условию $\mathbf{dF} = 0$ повсюду и условию $\mathbf{d}^*\mathbf{F} = 0$ повсюду, за исключением начала координат.

4.7. Связь аппарата 2-форм с тензорным аппаратом

Это упражнение сформулировано в конце подписи к фиг. 4.1.

4.8. Кулоновское поле в экваториальной плоскости

На фиг. 4.5 показано пространственноподобное ($t = \text{const}$) сечение $\mathbf{M}$ для покоящегося точечного заряда. С помощью следующей серии рисунков убедитесь, что при наблюдении из движущейся лоренцевой системы линии электрического поля сжимаются в поперечном направлении: 1. Изобразите экваториальное ($\theta = \pi/2$, t, r, ϕ — переменные) сечение $\mathbf{M} = {}^*\mathbf{F}$. 2. Нарисуйте различные пространственноподобные сечения получившейся геометрической структуры, соответствующие фиксированному значению временной координаты в различных лоренцевых системах. 3. Пересечению $\mathbf{M} = {}^*\mathbf{F}$ с каждым лоренцевым сечением дайте интерпретацию, аналогичную приведенной на фиг. 4.3.

4.9. Вычисление интегралов по поверхности

В дополнении 4.1 дано определение

$$\int \boldsymbol{\alpha} = \int \ldots \int \left\langle \boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^p} \right\rangle |d\lambda^1 \ldots d\lambda^p$$

интеграла p-формы $\boldsymbol{\alpha}$ по p-поверхности $\mathcal{P}(\lambda^1, \ldots, \lambda^p)$ в n-мерном пространстве. Исходя из него, обоснуйте следующее правило для вычислений (также приведенное в дополнении 4.1): 1) подставьте

УПРАЖНЕНИЯ

уравнение поверхности

$$x^k = x^k(\lambda^1, \ldots, \lambda^p)$$

в $\boldsymbol{\alpha}$ и перегруппируйте члены в виде

$$\boldsymbol{\alpha} = a(\lambda^1, \ldots, \lambda^p)\, \mathbf{d}\lambda^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}\lambda^p;$$

2) проинтегрируйте

$$\int \boldsymbol{\alpha} = \int \ldots \int a(\lambda^1, \ldots, \lambda^p)\, d\lambda^1 \ldots d\lambda^p,$$

используя обычное определение интеграла.

4.10. Калумоид Уиттекера, или движение контура

Возьмем замкнутый контур, ограничивающий двумерную поверхность $\mathscr{S}$. Он окружает некоторый поток $\mathbf{F}$, равный $\Phi_F = \int_{\mathscr{S}} \mathbf{F}$ («магнитные трубки»), и некоторый поток $\mathbf{M}$, равный $\Phi_M = \int_{\mathscr{S}} {}^*\mathbf{F}$ («электрические трубки»).

а. Покажите, что потоки Φ_F и Φ_M зависят только от выбора контура и не зависят от выбора поверхности $\mathscr{S}$, которую этот контур ограничивает, в том и только том случае, если $\mathbf{dF} = \mathbf{d}{}^*\mathbf{F} = 0$ (нет ни магнитных, ни электрических зарядов). *Указание*: используйте обобщенную теорему Стокса, дополнения 4.1 и 4.6.

б. Переместите контур в пространстве и во времени, двигая его таким образом, чтобы он все время окружал один и тот же поток $\mathbf{F}$ и один и тот же поток $\mathbf{M}$. При таком перемещении контур описывает двумерную поверхность («калумоид» [111]) $\mathscr{P} = \mathscr{P}(a, b)$; $x^\mu = x^\mu(a, b)$. Покажите, что элементарный бивектор на этой поверхности $\boldsymbol{\Sigma} = \partial\mathscr{P}/\partial a \wedge \partial\mathscr{P}/\partial b$ удовлетворяет условиям $\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\Sigma} \rangle = 0$ и $\langle {}^*\mathbf{F}, \boldsymbol{\Sigma} \rangle = 0$.

в. Покажите, что эти дифференциальные уравнения относительно $x^\mu(a, b)$ можно решить при заданном начальном условии $x^\mu = x^\mu(a, 0)$ для начального положения контура, если $\mathbf{dF} = 0$ и $\mathbf{d}{}^*\mathbf{F} = 0$ (нет ни магнитных, ни электрических зарядов).

г. Рассмотрите статическое однородное электрическое поле $\mathbf{F} = -E_x \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x$. Решите уравнения $\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\Sigma} \rangle = 0$ и $\langle {}^*\mathbf{F}, \boldsymbol{\Sigma} \rangle = 0$ и найдите уравнение $\mathscr{P}(a, b)$ для калумоида самого общего вида. [*Ответ*: $y = y(a)$, $z = z(a)$, $x = x(b)$, $t = t(b)$.] Остановитесь подробнее на двух частных случаях: 1) калумоид, целиком лежащий на гиперповерхности постоянного значения времени (контур движется с бесконечной скоростью, аналогично движению со сверхсветовой скоростью точки пересечения лезвий у ножниц); 2) калумоид, контур которого все время покоится в лоренцевой системе t, x, y, z.

4.11. Дифференциальные формы и гамильтонова механика

Рассмотрим динамическую систему с двумя степенями свободы. Чтобы определить эту систему как гамильтонову систему (частный случай: здесь гамильтониан не зависит от времени), необходимо 1) определить канонические переменные (см. дополнение 4.5) и 2) задать гамильтониан H как функцию координат q^1, q^2 и канонически сопряженных импульсов p_1, p_2. Чтобы вывести законы механики, рассмотрим пятимерное пространство p_1, p_2, q^1, q^2 и t, кривую в этом пространстве, соединяющую начальные значения пяти координат (индекс A) с их конечными значениями (индекс B), а также значение

$$I = \int_A^B p_1\,\mathbf{d}q^1 + p_2\,\mathbf{d}q^2 - H(p,\,q)\,\mathbf{d}t = \int_A^B \omega$$

интеграла I вдоль этой кривой. Разность значений интеграла вдоль двух «соседних» кривых, ограничивающих двумерную область $\mathscr{S}$, согласно теореме Стокса (дополнения 4.1 и 4.6), составляет

$$\delta I = \oint_{\mathscr{S}} \omega = \int_{\mathscr{S}} \mathbf{d}\omega.$$

Принцип наименьшего действия (принцип «экстремальной траектории») гласит, что точка, изображающая систему, должна двигаться по той траектории в пятимерном многообразии (траектория с касательным вектором $d\mathscr{P}/dt$), вдоль которой вариация равна нулю, т. е.

$$\mathbf{d}\omega\,(\ldots,\,d\mathscr{P}/dt) = 0$$

(2-форма $\mathbf{d}\omega$, в которую введен лишь один векторный аргумент, а канал для второго оставлен свободным, приводит к 1-форме в 5-пространстве, которая и должна равняться нулю). Тем самым фиксируется лишь направление $d\mathscr{P}/dt$; его величину можно задать нормировкой $\langle \mathbf{d}t,\ d\mathscr{P}/dt\rangle = 1$.

а. Вычислите $\mathbf{d}\omega$, использовав выражение $\omega = p_j\mathbf{d}q^j - H\,\mathbf{d}t$.

б. Положите $d\mathscr{P}/dt = \dot{q}^j\,(\partial\mathscr{P}/\partial q^j) + \dot{p}_j\,(\partial\mathscr{P}/\partial p_j) + \dot{t}\,(\partial\mathscr{P}/\partial t)$ и разложите $\mathbf{d}\omega\,(\ldots,\,d\mathscr{P}/dt) = 0$ по базису $\{\mathbf{d}p_j,\ \mathbf{d}q^k,\ \mathbf{d}t\}$.

в. Покажите, что это пятимерное уравнение можно записать в четырехмерном фазовом пространстве $\{q^j,\ p_k\}$ в виде

$$\Theta\,(\ldots,\,d\mathscr{P}/dt) = \mathbf{d}H,$$

где Θ — 2-форма, определенная в дополнении 4.5.

г. Покажите, что компоненты $\Theta(\ldots,\,d\mathscr{P}/dt) = \mathbf{d}H$ в системе координат $\{q^j,\ p_k\}$ представляют собой известные уравнения Гамильтона. Отметим, что этот вывод основан только на той форме,

УПРАЖНЕНИЯ

которую мы приняли для Θ; другими словами, классические уравнения Гамильтона получаются и в любых других координатах фазового пространства $(\bar{q}^j, \bar{p}_k)$ («канонических переменных»), для которых

$$\Theta = \mathbf{d}\bar{p}_1 \wedge \mathbf{d}\bar{q}^1 + \mathbf{d}\bar{p}_2 \wedge \mathbf{d}\bar{q}^2.$$

4.12. Операторы симметрии, трактуемые как тензоры

Определим смысл квадратных и круглых скобок, в которые заключается совокупность индексов, следующим образом:

$$V_{(\alpha_1 \ldots \alpha_p)} \equiv \frac{1}{p!} \sum V_{\alpha_{\pi_1} \ldots \alpha_{\pi_p}}, \qquad V_{[\alpha_1 \ldots \alpha_p]} \equiv \frac{1}{p!} \sum (-1)^\pi V_{\alpha_{\pi_1} \ldots \alpha_{\pi_p}}.$$

Здесь суммирование производится по всем перестановкам π чисел $1, 2, \ldots, p$ и $(-1)^\pi$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того, четная перестановка или нечетная. У величины V, помимо совокупности p индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, могут быть и другие индексы, не указанные здесь, но лишь данная совокупность индексов подвергается действию операторов, которые здесь описываются. Числа $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$ есть числа $1, 2, \ldots, p$, расположенные в другом порядке соответственно перестановке π. (Случаи $p = 2, 3$ рассмотрены в упражнении 3.12.) Таким образом, имеется машина, превращающая любой тензор ранга p с компонентами $V_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$ в новый тензор с компонентами

$$[\mathbf{Alt}\,(\mathbf{V})]_{\mu_1 \ldots \mu_p} = V_{[\mu_1 \ldots \mu_p]}.$$

Так как машина **Alt** является линейной, ее можно рассматривать как тензор, который по соответствующим аргументам $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w}, \alpha, \beta, \ldots, \gamma$ производит число

$$u^{\mu} v^{\nu} \ldots w^{\lambda} \alpha_{[\mu} \beta_{\nu} \ldots \gamma_{\lambda]}.$$

а. Покажите, что компонентами этого тензора являются [1])

$$(\mathbf{Alt})_{\beta_1 \ldots \beta_p}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = (p!)^{-1} \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_p},$$

где

$$\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_p} = \begin{cases} +1, \text{ если } (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \text{ — четная перестановка } (\beta_1, \ldots, \beta_p), \\ -1, \text{ если } (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \text{ — нечетная перестановка } (\beta_1, \ldots, \beta_p), \\ 0, \text{ если 1) какие-либо два из } \alpha \text{ совпадают}, \\ 0, \text{ если 2) какие-либо два из } \beta \text{ совпадают}, \\ 0, \text{ если 3) } \alpha \text{ и } \beta \text{ — разные совокупности целых чисел.} \end{cases}$$

Отметим, что данный вывод, а следовательно, значения компонент справедливы в любой системе.

---

[1]) Индексы у δ почти никогда не поднимаются и не опускаются, поэтому такое обозначение не приводит к путанице.

УПРАЖНЕНИЯ

б. Покажите, что для любого «альтернированного» (т. е. *совершенно антисимметричного*) тензора $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = A_{[\alpha_1 \ldots \alpha_p]}$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{p!} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta_1 \ldots \beta_q}_{\gamma_1 \ldots \gamma_p \gamma_{p+1} \ldots \gamma_{p+q}} = \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta_1 \ldots \beta_q}_{\gamma_1 \ldots \ldots \gamma_{p+q}} \equiv$$
$$\equiv A_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|} \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta_1 \ldots \beta_q}_{\gamma_1 \ldots \ldots \gamma_{p+q}}.$$

В последней строке использовано соглашение о том, что при суммировании по индексам, заключенным в вертикальные черточки, в сумме участвуют лишь члены, индексы которых образуют возрастающую последовательность. Покажите отсюда или подобным же образом, что

$$\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta_1 \ldots \beta_q}_{\gamma_1 \ldots \ldots \gamma_{p+q}} \delta^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{|\beta_1 \ldots \beta_q|} = \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p \mu_1 \ldots \mu_q}_{\gamma_1 \ldots \ldots \gamma_{p+q}}.$$

в. *Определим* внешнее («косое») произведение двух произвольных альтернированных тензоров соотношением

$$(\alpha \wedge \beta)_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+q}} = \delta^{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \lambda_{p+1} \ldots \lambda_{p+q}} \alpha_{|\mu_1 \ldots \mu_p|} \beta_{|\nu_1 \ldots \nu_q|}$$

и аналогичным образом

$$(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})^{\lambda_1 \ldots \lambda_{p+q}} = \delta^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \lambda_{p+1} \ldots \lambda_{p+q}}_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q} U^{|\mu_1 \ldots \mu_p|} V^{|\nu_1 \ldots \nu_q|}.$$

Покажите, что отсюда вытекает соотношение (3.45б). Установите ассоциативный закон для такого произведения, показав, что

$$[(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma]_{\sigma_1 \ldots \sigma_{p+q+r}} = \delta^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu_1 \ldots \mu_q \nu_1 \ldots \nu_r}_{\sigma_1 \ldots \ldots \sigma_{p+q+r}} \alpha_{|\lambda_1 \ldots \lambda_p|} \beta_{|\mu_1 \ldots \mu_q|} \times$$
$$\times \gamma_{|\nu_1 \ldots \nu_r|} = [\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)]_{\sigma_1 \ldots \sigma_{p+q+r}},$$

и покажите, что он сводится к уравнению (3.45в), в котором стоит 3-форма, когда α, β и γ все являются 1-формами.

г. Выведите следующую формулу для компонент внешнего произведения p векторов:

$$(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{u}_p)^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\mu \ldots \nu} (u_1)^\mu \ldots (u_p)^\nu =$$
$$= p! u_1^{[\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p]} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}_{1\,2 \ldots p} \det [(u_\mu)^\lambda].$$

Дополнение 4.5. СРАВНЕНИЕ И ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ И ГАМИЛЬТОНИАНА, ИЛИ «СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ»

	Метрическая структура	Симплектическая структура
1. Физическое приложение	Геометрия пространства-времени	Гамильтонова механика
2. Каноническая структура	$(\ldots \cdot \ldots) = \text{"}d\mathbf{s}^2\text{"} = -\mathbf{d}t \otimes \mathbf{d}t + \mathbf{d}x \otimes \mathbf{d}x + \mathbf{d}y \otimes \mathbf{d}y + \mathbf{d}z \otimes \mathbf{d}z$	$\Theta = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2$

	Метрическая структура	Симплектическая структура
3. Характер «метрики»	Симметричная	Антисимметричная
4. Название данной системы координат и любой другой совокупности четырех координат, в которых метрика имеет тот же вид	Лоренцева система координат	Система «канонически» (или «динамически») сопряженных координат
5. Уравнение поля для этой метрики	$R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$ (нулевая риманова кривизна; плоское пространство-время)	$\mathbf{d}\Theta=0$ («замкнутая 2-форма»; условие, выполняющееся автоматически для написанного выше выражения)
6. Четырехмерное многообразие	Пространство-время	Фазовое пространство
7. Описание структуры этого многообразия, свободное от координат	$\mathbf{R}=0$	$\mathbf{d}\Theta=0$
8. Чем канонические координаты отличаются от других координат (допустимых, но не таких простых)	Приводят к тому, что метрика имеет вид, указанный выше (пункт 2)	Приводят к тому, что метрика имеет вид, указанный выше (пункт 2)

Дополнение 4.6. ИСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СТОКСА

При математической формулировке электромагнетизма центральное место занимают теоремы Гаусса (о ней речь пойдет в гл. 5) и Стокса. Теперь, сформулированные на языке форм, обе они выступают как единое целое. Но не всегда это единство было очевидным. Эверитт [112] вспоминает историю появления теоремы Стокса: «Первое появление в печати формулы, связывающей интегралы по контуру и по поверхности и известной теперь под названием теоремы Стокса, связано с работой Стокса, выдвинутой на премию Смита и попавшей в руки к Максвеллу в [феврале] 1854 г. ...

5. Даны центр и две точки эллипса, а также длина большой оси. С помощью геометрических построений найдите направление этой оси.

6. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение

$$(a^2 - x^2)\,dy^2 + 2xydydx + (a^2 - y^2)\,dx^2 = 0.$$

Есть ли у него сингулярное решение?

7. В двойной системе кривых с двойной кривизной касательная проводится в переменной точке P; покажите, что если P отходит от произвольной фиксированной точки Q, то чтобы последовательные касательные могли где-то пересечься, точка P должна начинать свое движение по образующей эллиптического конуса с вершиной в точке Q, но условия задачи могут быть также и несовместны.

8. Пусть X, Y, Z — функции прямоугольных координат x, y, z, dS — элемент произвольной ограниченной поверхности, l, m, n — косинусы углов между нормалью к dS и осями, ds — элемент кривой, ограничивающей поверхность. Покажите, что

$$\iint \left\{ l\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+m\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+n\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\right\} dS = \\ = \int \left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

где дифференциальные коэффициенты X, Y, Z являются частными, а однократный интеграл берется по всему периметру поверхности.

Эта теорема была очень важна для последующего развития Максвеллом электромагнитной теории. Наиболее ранним явным доказательством теоремы, по-видимому, является то, которое приведено в письме Томсона Стоксу, датированном 2 июля 1850 г.» (Цитируется в работе [113], стр. 186—187.)

5. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 5.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К КУРСУ 1

«Геометрия указывает материи, как двигаться, а материя указывает геометрии, как искривляться». Однако изучение кривизны (часть III) и закона Эйнштейна, описывающего, как эта кривизна создается энергией-массой (часть IV), не даст никакой пользы, пока мы не найдем способа определять, сколько энергии-массы содержится в единице объема. А это можно сделать лишь с помощью тензора энергии-импульса. Именно на нем концентрируется внимание в данной главе.

Основные свойства тензора энергии-импульса кратко изложены в дополнении 5.1, предназначенном для читателя, который хочет как можно скорее перейти к физике гравитации. Такой читатель может сразу после дополнения 5.1 приступить к изучению гл. 6, но сделав это, он лишит себя возможности ознакомиться с некоторыми последующими разделами курса 2, которые в значительной мере опираются на материал данной главы.

Дополнение 5.1. РЕЗЮМЕ ГЛАВЫ 5

А. Тензор энергии-импульса как машина

В каждом событии пространства-времени существует тензор энергии-импульса. Он представляет собой машину, которая несет в себе информацию о плотности энергии, плотности импульса и напряжениях, измеряемых всевозможными наблю-

дателями в данном событии. Сюда входят энергия, импульс и напряжения, связанные со всеми видами вещества и со всеми негравитационными полями.

Тензор энергии-импульса является линейной симметричной машиной с двумя каналами для ввода двух векторов: $\mathbf{T}(\ldots, \ldots)$. То, что получается на его выходе при заданных входных данных, можно кратко описать следующим образом.

1. Введем в один из каналов 4-скорость наблюдателя $\mathbf{u}$, оставив другой канал свободным. На выходе получим

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \ldots) = \mathbf{T}(\ldots, \mathbf{u}) = -\left(\begin{array}{c}\text{плотность 4-импульса } d\mathbf{p}/dV, \text{ т. е. 4-импульс}\\ \text{единицы трехмерного объема, измеренный}\\ \text{в лоренцевой системе наблюдателя в событии,}\\ \text{в котором взят } \mathbf{T}\end{array}\right);$$

т. е. $T^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta} = T_{\beta}{}^{\alpha}u^{\beta} = -(dp^{\alpha}/dV)$ для наблюдателя с 4-скоростью u^{α}.

2. Введем 4-скорость наблюдателя в один канал и произвольный единичный вектор $\mathbf{n}$ в другой. На выходе получим

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = -\left(\begin{array}{c}\text{компонента } \mathbf{n}\cdot d\mathbf{p}/dV \text{ плотности 4-импульса вдоль}\\ \text{направления } \mathbf{n}, \text{ измеренная в лоренцевой системе}\\ \text{наблюдателя}\end{array}\right);$$

т. е. $T_{\alpha\beta}u^{\alpha}n^{\beta} = T_{\alpha\beta}n^{\alpha}u^{\beta} = -n_{u}\,dp^{u}/dV$.

3. Введем 4-скорость наблюдателя в оба канала. На выходе получим плотность энергии-массы, измеренную этим наблюдателем в собственной лоренцевой системе:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \left(\begin{array}{c}\text{энергия-масса единицы объема, измеренная в системе,}\\ \text{обладающей 4-скоростью } \mathbf{u}\end{array}\right).$$

4. Выберем конкретного наблюдателя и два пространственноподобных базисных вектора $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$ его лоренцевой системы. Введем $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$ во входные каналы $\mathbf{T}$. На выходе получим j,k-компоненту напряжений, измеренную этим наблюдателем:

$$T_{jk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = T_{kj} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) =$$

$$= \left(\begin{array}{c}j\text{-компонента силы, действую-}\\ \text{щей со стороны } x^k - \varepsilon \text{ на}\\ \text{материю в области } x^k + \varepsilon\\ \text{через единичную площадку}\\ \text{с перпендикуляром } \mathbf{e}_k\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}k\text{-компонента силы, действую-}\\ \text{щей со стороны } x^j - \varepsilon \text{ на}\\ \text{материю в области } x^j + \varepsilon\\ \text{через единичную площадку}\\ \text{с перпендикуляром } \mathbf{e}_j\end{array}\right).$$

Б. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости

Одним из видов материи, который широко изучается в последующих главах этой книги, является «*идеальная жидкость*». Идеальная жидкость представляет собой жидкость или газ, которые 1) движутся в пространстве-времени с 4-скоростью $\mathbf{u}$, которая может меняться от события к событию, и 2) обладают плотностью энергии-

массы ρ и изотропным давлением p в системе покоя каждого элемента жидкости. Сдвиговые напряжения, анизотропное давление и вязкость должны отсутствовать, в противном случае жидкость не идеальна. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости в данном событии можно построить, используя метрический тензор $\mathbf{g}$, 4-скорость $\mathbf{u}$, плотность ρ и давление p в системе покоя:

$$\mathbf{T} = (\rho + p)\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{g}, \text{ или } T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\,u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}.$$

В системе, где жидкость покоится, компоненты этого тензора энергии-импульса имеют требуемый вид (чтобы убедиться в этом, надо лишь ввести во входной канал $\mathbf{T}$ в качестве 4-скорости наблюдателя 4-скорость жидкости):

$$T^\alpha{}_\beta u^\beta = [(\rho + p)\,u^\alpha u_\beta + p\delta^\alpha{}_\beta]\,u^\beta = -(\rho + p)\,u^\alpha + p u^\alpha = -\rho u^\alpha;$$

т.*е.

$$T^0{}_\beta u^\beta = -\rho = -(\text{плотность энергии-массы}) = -dp^0/dV,$$

$$T^j{}_\beta u^\beta = 0 = -(\text{плотность импульса}) = -dp^j/dV,$$

а также

$$T_{jk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = p\delta_{jk} = \text{компоненты тензора напряжений.}$$

B. Сохранение энергии-импульса

В электродинамике сохранение заряда может быть выражено в форме дифференциального уравнения

$$\partial\,(\text{плотность заряда})/\partial t + \nabla \cdot (\text{плотность тока}) = 0,$$

т. е. $J^0{}_{,0} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$, или $J^\alpha{}_{,\alpha} = 0$, т. е. $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Подобным же образом сохранение энергии-импульса можно выразить в форме фундаментального геометрического закона

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0.$$

(Так как тензор $\mathbf{T}$ симметричен, неважно, по какому каналу вычисляется дивергенция.) Этот закон играет важную роль в теории тяготения.

**Остальная часть этой главы относится к курсу 2.
Ее содержание не зависит от предыдущего материала курса 2.
Она нужна в качестве подготовительного материала для гл. 20
(законы сохранения массы и момента импульса).
Она исключительно полезна во всех приложениях теории тяготения (гл. 18—40).**

§ 5.2. ТРЕХМЕРНЫЕ ОБЪЕМЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

В пространстве-времени течет «река» 4-импульса. Каждая частица несет вдоль своей мировой линии вектор своего 4-импульса. Множество частиц на множестве мировых линий, если представлять их размазанными (приближение континуума), создают течение континуума — «реку» 4-импульса. Электромагнитные поля, ней-

тринные поля, мезонные поля — все они тоже дают вклад в эту «реку».

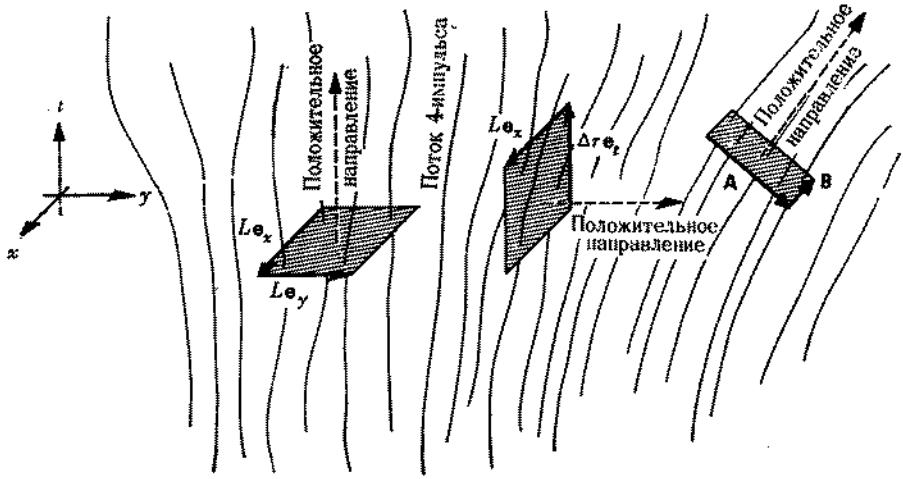
Как можно количественно описать течение этой «реки»? С помощью линейной машины — тензора энергии-импульса **T**.

Выберем в пространстве-времени малый трехмерный параллелепипед с векторами **A**, **B**, **C** в качестве ребер (фиг. 5.1). Зададимся вопросом: какое количество 4-импульса пересекает этот объем в положительном направлении (т. е. в направлении от его «отрицательной стороны» к его «положительной стороне»)? Чтобы получить ответ, выполним следующие операции. 1. Построим *«1-форму объема»*

Математическое представление 3-объемов

$$\Sigma_\mu = +\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma; \qquad (5.1)$$

наш параллелепипед расположен на одной из поверхностей 1-формы, а положительное направление, перпендикулярное параллелепипеду, определено таким образом, что совпадает с положи-



ФИГ. 5.1.
«Река» 4-импульса, текущая в пространстве-времени, и три различных 3-объема, сквозь которые она протекает. (На фигуре недостает одного измерения, поэтому 3-объемы выглядят как 2-объемы.) Первый 3-объем представляет собой внутреннюю часть кубической мыльницы, которая в данный момент покоится в изображенной лоренцевой системе. Ее ребрами являются Le_x, Le_y, Le_z, а 1-форма ее объема, «положительно» ориентированная в сторону будущего («стандартная ориентация») есть $\Sigma = L^3\mathbf{d}t = -V\mathbf{u}$ ($V = Le_x$ — объем, измеренный в системе покоя, $\mathbf{u} = -\mathbf{d}t$ — 4-скорость мыльницы). Второй 3-объем представляет собой «мировую полосу», заметаемую за время $\Delta\tau$ крышкой второй кубической мыльницы. Ребрами крышки являются Le_x и Le_z, а 1-форма ее объема, «положительно» ориентированная наружу от мыльницы в направлении растущих y, есть $\Sigma = L^3\Delta\tau\mathbf{d}y = \mathcal{A}\Delta\tau\sigma$ ($\mathcal{A} = L^2$ — площадь крышки мыльницы; $\sigma = \mathbf{d}y$ — единичная 1-форма, содержащая мировую полосу). Третий 3-объем выбран произвольно; его ребрами являются **A**, **B**, **C**, а 1-форма объема есть $\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma$.

Нахождение импульса, пересекающего 3-объем, с помощью тензора энергии-импульса

тельным направлением 1-формы $\boldsymbol{\Sigma}$. 2. Введем 1-форму этого объема во второй канал тензора энергии-импульса $\mathbf{T}$. В результате получим

$$\mathbf{T}(\ldots, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{p} = \begin{pmatrix}\text{импульс, пересекающий 3-объем от}\\ \text{отрицательной стороны к положи-}\\ \text{тельной стороне}\end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

↑ пустой канал

3. Чтобы получить проекцию 4-импульса на вектор $\mathbf{w}$ или 1-форму $\boldsymbol{\alpha}$, введем 1-форму объема $\boldsymbol{\Sigma}$ во второй канал, а $\mathbf{w}$ или $\boldsymbol{\alpha}$ — в первый:

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{p}, \qquad \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Sigma}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p} \rangle. \quad (5.3)$$

Это и есть определение тензора энергии-импульса.

Важнейшие свойства 3-объемов и тензора энергии-импульса полностью отражены в изложенной выше трехэтапной процедуре. Однако нельзя ограничиться подобной краткой сводкой: необходимо также и глубокое понимание. Для достижения такого понимания необходимо изучить частные случаи 3-объемов и тензора энергии-импульса.

Частный случай

Внутренняя часть мыльницы

В пространстве-времени движется мыльница. В событии $\mathcal{P}_0$ на мировой линии мыльницы в нее заглядывает человек и тщательно исследует все мыло, воздух и электромагнитные поля, которые в ней содержатся. Он складывает их 4-импульсы и получает полный 4-импульс $\mathbf{p}_{\text{мыльницы в } \mathcal{P}_0}$. Какова величина этого полного 4-импульса? Ее можно вычислить, если учесть, что 4-импульс, которым обладает мыльница в $\mathcal{P}_0$, в точности равен 4-импульсу, пересекающему мыльницу в направлении из прошлого в будущее в этой точке (фиг. 5.1). Следовательно, 4-импульс, измеренный нашим исследователем, равен

$$\mathbf{p}_{\text{мыльницы в } \mathcal{P}_0} = \mathbf{T}(\ldots, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (5.4)$$

1-форма ее объема

где $\boldsymbol{\Sigma}$ есть 1-форма объема мыльницы в точке $\mathcal{P}_0$. Но у такой мыльницы величина $\boldsymbol{\Sigma}$ равна ее объему V, измеренному в системе, в которой она в данный момент покоится, а сама мыльница лежит в одной из гиперплоскостей $\boldsymbol{\Sigma}$; другими словами,

$$\boldsymbol{\Sigma} = -V\mathbf{u}, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{u}$ есть 4-скорость мыльницы в $\mathcal{P}_0$ (со знаком минус, так как если под $\mathbf{u}$ понимается 1-форма, то положительным направлением для нее является направление в прошлое, $u_0 < 0$); см. дополнение 5.2. Следовательно, полный 4-импульс, которым обладает мыльница, равен

4-импульс, которым она обладает

$$\mathbf{p}_{\text{мыльницы в } \mathcal{P}_0} = \mathbf{T}(\ldots, -V\mathbf{u}) = -V\mathbf{T}(\ldots, \mathbf{u}), \quad (5.6)$$

или в компонентных обозначениях

$$(p^\alpha)_{\text{мыльницы в } \mathscr{P}_0} = -VT^{\alpha\beta}u_\beta. \tag{5.6'}$$

Энергия внутри мыльницы, измеренная в ее системе покоя, равна проекции 4-импульса на 4-скорость мыльницы, взятой с обратным знаком:

$$E = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}_{\text{мыльницы в } \mathscr{P}_2} = +VT^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = V\mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{u});$$

итак

$$\begin{pmatrix}\text{плотность энергии,}\\ \text{измеренная в системе}\\ \text{покоя мыльницы}\end{pmatrix} = \frac{E}{V} = \mathbf{T}(\mathbf{u},\mathbf{u}). \tag{5.7}$$

Плотность энергии в ней

Еще один частный случай

Человек, едущий с той же мыльницей, открывает крышку и отливает немного мыла. Какое количество полного 4-импульса вытекает из мыльницы за очень малый промежуток времени $\Delta\tau$? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим трехмерный объем, «заметаемый» за время $\Delta\tau$ открытой двумерной крышкой мыльницы («мировая полоса крышки»). Искомый 4-импульс равен 4-импульсу, пересекающему эту мировую полосу в положительном направлении (фиг. 5.1); следовательно, он равен

Крышка мыльницы

$$\mathbf{p}_{\text{вытекший}} = \mathbf{T}(\ldots, \boldsymbol{\Sigma}), \tag{5.8}$$

где $\boldsymbol{\Sigma}$ есть 1-форма объема мировой полосы. Пусть $\mathscr{A}$ — площадь крышки мыльницы, а $\boldsymbol{\sigma}$ — единичная 1-форма, ориентированная наружу, одной из поверхностей которой принадлежит мировая полоса (т. е. принадлежит крышка мыльницы и мгновенное значение ее 4-скорости). Тогда

1-форма ее объема

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathscr{A}\Delta\tau\boldsymbol{\sigma} \tag{5.9}$$

(см. дополнение 5.2); таким образом, 4-импульс, вытекший за время $\Delta\tau$, равен

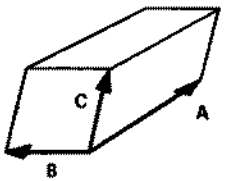
4-импульс, который через нее протекает

$$\mathbf{p}_{\text{вытекший}} = \mathscr{A}\Delta\tau\mathbf{T}(\ldots, \boldsymbol{\sigma}). \tag{5.10}$$

Дополнение 5.2. ТРЕХМЕРНЫЕ ОБЪЕМЫ

А. Параллелепипед в общем случае

1. Ребрами параллелепипеда являются три вектора $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Ребра должны быть упорядочены, например: «за $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$, за $\mathbf{B}$ следует $\mathbf{C}$».
2. *Тривектор объема* определяется как $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$. Он употребляется в более сложной теории объемов (гл. 4) и почти не используется в элементарной теории.



(Здесь отсутствует одно измерение, ортогональное параллелепипеду.)

3. *1-форма объема* определяется как $\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma$. (**A**, **B**, **C** должны следовать здесь в установленном порядке, который выбран в пункте 1.) Отметим, что вектор, «соответствующий» **Σ**, и тривектор объема связаны соотношением $\mathbf{\Sigma} = -{}^*(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$.
4. *Ориентация* объема определяется таким образом, чтобы она совпадала с ориентацией соответствующей ему 1-формы **Σ**. Точнее, ребра **A**, **B**, **C** лежат в гиперплоскости **Σ** ($\langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{C} \rangle = 0$; ни одного «удара колокола»). Таким образом, *сам объем является одной из гиперплоскостей* **Σ**! Положительным направлением, выходящим из объема, по определению является положительное направление **Σ**. *Примечание.* Изменение порядка **A**, **B**, **C** приводит к изменению положительного направления!
5. При *«стандартной ориентации»* пространственноподобных 3-объемов положительным направлением 1-формы **Σ** является направление в будущее, что соответствует такому порядку **A**, **B**, **C**, при котором они образуют правую тройку векторов.

(Здесь отсутствует одно измерение, простирающееся вдоль **C**.)

Б. 3-объемы произвольной формы

Они могут быть проанализированы с помощью разбиения на параллелепипеды

В. Внутренняя часть мыльницы (пример)

1. *Анализ в системе, где мыльница покоится.* Выберем событие на мировой линии мыльницы. В нем три ребра мыльницы представляют собой три определенных вектора **A**, **B**, **C**. В системе покоя мыльницы они являются чисто пространственными: $A^0 = B^0 = C^0 = 0$. Следовательно, у 1-формы объема компоненты $\Sigma_j = 0$, а

$$\Sigma_0 = \varepsilon_{0tjk}A^tB^jC^k = \det \begin{Vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{Vmatrix} =$$

$= \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ в обычных обозначениях трехмерного векторного анализа;

$= +V$ (V — объем мыльницы), если ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$) — правая тройка (положительным направлением **Σ** является направление в будущее; стандартная ориентация);

$= -V$ (V — объем мыльницы), если ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$) — левая тройка (положительным направлением **Σ** является направление в прошлое).

2. *Этот результат на геометрическом языке выражается следующим образом.* Пусть $\mathbf{u}$ — 4-скорость мыльницы, а V — ее объем, измеренный в ее системе покоя. Тогда либо

$$\Sigma = -V\mathbf{u}$$

и в этом случае «положительной стороной» 3-поверхности мыльницы является будущая сторона, а ее ребра упорядочены так, что образуют правую тройку (стандартная ориентация), либо

$$\Sigma = +V\mathbf{u}$$

и в этом случае «положительной стороной» является прошедшая сторона, а ребра мыльницы упорядочены так, что образуют левую тройку.

Г. 3-объем, заметаемый за время $\Delta\tau$ двумерной крышкой мыльницы (пример)

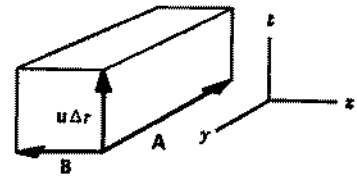
1. *Анализ в системе, где мыльница покоится.* Выберем событие на мировой линии мыльницы. Два ребра крышки мыльницы представляются в нем двумя векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. В системе покоя мыльницы направим пространственные оси так, чтобы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ лежали в плоскости y, z. За промежуток собственного времени $\Delta\tau$ крышка мыльницы заметает 3-объем, третьим ребром которого является $\mathbf{u}\Delta\tau$ ($\mathbf{u}$ — 4-скорость мыльницы). В системе покоя мыльницы при соблюдении порядка «за $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$, за $\mathbf{B}$ следует $\mathbf{u}\Delta\tau$» 1-форма объема имеет компоненты

$$\Sigma_0 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = 0,$$

$$\Sigma_1 = \varepsilon_{1jk0} A^j B^k \Delta\tau u^0 = -\varepsilon_{01jk} A^j B^k \Delta\tau =$$

$= -\mathcal{A}\Delta\tau$ ($\mathcal{A}$ — площадь крышки мыльницы), если $(\mathbf{e}_x, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ — правая тройка,

$= +\mathcal{A}\Delta\tau$ ($\mathcal{A}$ — площадь крышки мыльницы), если $(\mathbf{e}_x, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ — левая тройка.



(*Примечание.* В этом случае нельзя определить стандартной ориентации, так как Σ можно непрерывным образом преобразовать в $-\Sigma$ с помощью чисто пространственных вращений.)

2. *Этот результат на геометрическом языке выражается следующим образом.* Пусть $\mathcal{A}$ — площадь крышки мыльницы, измеренная в ее системе покоя; пусть далее σ — единичная 1-форма, одной из поверхностей которой принадлежит крышка мыльницы и ее 4-скорость (т. е. принадлежит «мировая полоса» крышки мыльницы). Направим положительное направление σ так, чтобы оно совпало с положительным направлением (выбранным произвольно) 3-объема крышки мыльницы. Тогда

$$\Sigma = \mathcal{A}\Delta\tau\,\sigma.$$

§ 5.3. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Как и все другие тензоры, тензор энергии-импульса является машиной, определение и смысл которой выходят за рамки координатных систем и систем отсчета. Но любой наблюдатель, будучи

привязанным к некоторой одной лоренцевой системе, обращает больше внимания на компоненты $\mathbf{T}$, чем на сам тензор $\mathbf{T}$. Каждой компоненте он приписывает определенный физический смысл. Наибольший интерес, пожалуй, представляет «временно-временная» компонента. Она равна суммарной плотности энергии-массы, измеренной в лоренцевой системе наблюдателя:

Физическая интерпретация компонент тензора энергии-импульса

T^{00}—плотность энергии

$$T_{00} = -T^0_0 = T^{00} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = \text{плотность энергии-массы} \quad (5.11)$$

(ср. уравнение (5.7), где 4-скорость наблюдателя $\mathbf{u}$ заменена базисным вектором $\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}$).

Интерпретацию «пространственно-временным» компонентам T^{j0} можно дать, рассмотрев содержимое мыльницы, покоящейся в системе наблюдателя. Если ее объем равен V, то 1-форма этого объема равна $\boldsymbol{\Sigma} = -V\mathbf{u} = +V\mathbf{d}t$; μ-компонента 4-импульса, которым она обладает, составляет

$$p^\mu = \langle \mathbf{d}x^\mu, \mathbf{p}\rangle = \mathbf{T}(\mathbf{d}x^\mu, \boldsymbol{\Sigma}) = V\mathbf{T}(\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{d}t) = VT^{\mu 0}.$$

Тогда 4-импульс единицы объема равен

$$p^\mu/V = T^{\mu 0}, \quad (5.12а)$$

или, что эквивалентно,

$$T^{00} = \text{плотность энергии-массы} \quad (5.13а)$$

(единицы: г/см^3, эрг/см^3 или см$^{-2}$);

T^{j0}-плотность импульса

$$T^{j0} = \text{плотность } j\text{-компоненты импульса} \quad (5.13б)$$

(единицы: г(см/с)см$^{-3}$ или см$^{-2}$).

Компоненты $T^{\mu k}$ можно интерпретировать, если рассмотреть покоящуюся в системе наблюдателя двумерную поверхность площади $\mathcal{A}$, положительная нормаль к которой направлена в направлении k. За промежуток времени Δt эта 2-поверхность заметает 3-объем, 1-форма которого равна $\boldsymbol{\Sigma} = \mathcal{A}\Delta t\mathbf{d}x^k$ (см. дополнение 5.2). 4-импульс, пересекающий 2-поверхность за время Δt, имеет μ-компоненту

$$p^\mu = \mathbf{T}(\mathbf{d}x^\mu, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{A}\,\Delta t\,\mathbf{T}(\mathbf{d}x^\mu, \mathbf{d}x^k) = \mathcal{A}\,\Delta t\,T^{\mu k}.$$

Таким образом, поток 4-импульса (4-импульс, пересекающий за единицу времени единичную площадку, ориентированную перпендикулярно $\mathbf{e}_k$) равен

$$(p^\mu/\mathcal{A}\,\Delta t)_{\text{пересекающий площадку} \perp \mathbf{e}_k} = T^{\mu k}, \quad (5.12б)$$

или, что эквивалентно,

T^{0k} — поток энергии

$$T^{0k} = k\text{-компонента потока энергии} \quad (5.13в)$$

(единицы: эрг/см^2·с или см$^{-2}$);

T^{jk} = j,k-компонента «напряжения» ≡ (5.13г)
≡ k-компонента потока j-компоненты импульса ≡
≡ j-компонента силы, действующей со стороны полей и вещества в области $x^k - \varepsilon$ на поля и вещество в области $x^k + \varepsilon$ через единичную площадку с перпендикуляром $\mathbf{e}_k$.

T^{jk} — напряжение

(единицы: дин/см² или см$^{-2}$). (Напомним, что «передача импульса за секунду» есть «сила».)

Тензор энергии-импульса должен быть симметричным: $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$; но доказательство этого мы приведем после того, как рассмотрим несколько примеров.

§ 5.4. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА РОЯ ЧАСТИЦ

Рассмотрим рой частиц. Выберем некоторое событие $\mathscr{P}$ внутри роя. Разобьем частицы вблизи $\mathscr{P}$ на классы $A = 1, 2, \ldots$ таким образом, чтобы частицы из одного класса обладали одними и теми же свойствами:

$m_{(A)}$ — масса покоя,

$\mathbf{u}_{(A)}$ — 4-скорость,

$\mathbf{p}_{(A)} = m_{(A)}\mathbf{u}_{(A)}$ — 4-импульс.

Пусть $N_{(A)}$ — число частиц класса A в единице объема, измеренное в системе, где эти частицы покоятся. Тогда компоненты «*вектора числа-потока*» частиц $\mathbf{S}_{(A)}$, определяемого выражением

Определение вектора числа-потока для роя частиц

$$\mathbf{S}_{(A)} \equiv N_{(A)}\mathbf{u}_{(A)}, \tag{5.14}$$

имеют простой физический смысл. В системе, в которой частицы класса A имеют обычную скорость $\boldsymbol{v}_{(A)}$, этот смысл сводится к следующему

$$S^0_{(A)} = N_{(A)}u^{(0)}_{(A)} = N_{(A)}\underbrace{[1 - v^2_{(A)}]^{-1/2}}_{\text{фактор лоренцева сокращения объема}} = \text{плотность числа частиц;} \tag{5.15а}$$

плотность числа частиц в системе, где они покоятся

$$\boldsymbol{S}_{(A)} = N_{(A)}\boldsymbol{u}_{(A)} = S^0_{(A)}\boldsymbol{v}_{(A)} = \text{поток частиц.} \tag{5.15б}$$

Следовательно, плотность 4-импульса имеет компоненты

$$T^{\mu 0}_{(A)} = p^{\mu}_{(A)}S^0_{(A)} = m_{(A)}u^{\mu}_{(A)}N_{(A)}u^0_{(A)} = m_{(A)}N_{(A)}u^{\mu}_{(A)}u^0_{(A)},$$

а поток μ-компоненты импульса через поверхность, перпендикуляром к которой служит $\mathbf{e}_j$, равен

$$T^{\mu j}_{(A)} = p^{\mu}_{(A)} S^{j}_{(A)} = m_{(A)} u^{\mu}_{(A)} N_{(A)} u^{j}_{(A)} = m_{(A)} N_{(A)} u^{\mu}_{(A)} u^{j}_{(A)}.$$

Эти выражения в точности совпадают с $\mu, 0$- и μ, j-компонентами геометрического, не зависящего от системы, выражения

Тензор энергии-импульса роя частиц

$$\mathbf{T}_{(A)} = m_{(A)} N_{(A)} \mathbf{u}_{(A)} \otimes \mathbf{u}_{(A)} = \mathbf{p}_{(A)} \otimes \mathbf{S}_{(A)}. \tag{5.16}$$

Полный вектор числа-потока и тензор энергии-импульса для всех частиц в рое вблизи $\mathscr{P}$ получаются суммированием по всем классам:

$$\mathbf{S} = \sum_A N_{(A)} \mathbf{u}_{(A)}, \tag{5.17}$$

$$\mathbf{T} = \sum_A m_{(A)} N_{(A)} \mathbf{u}_{(A)} \otimes \mathbf{u}_{(A)} = \sum_A \mathbf{p}_{(A)} \otimes \mathbf{S}_{(A)}. \tag{5.18}$$

§ 5.5. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Определение идеального газа

Простейшим примером сплошной среды является газ из невзаимодействующих частиц («идеальный газ»), в котором скорости частиц распределены изотропно. В лоренцевой системе, где имеет место изотропия, из соображений симметрии вытекает равенство между собой диагональных пространственно-пространственных компонент тензора энергии-импульса

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = \sum_A \frac{m_{(A)} v_{x(A)}}{(1 - v^2_{(A)})^{1/2}} \frac{N_{(A)} v_{x(A)}}{(1 - v^2_{(A)})^{1/2}} \tag{5.19}$$

и равенство нулю всех недиагональных компонент. Более того, (5.19) составлено из произведений числа частиц в единице объема на скорость в направлении оси x (что дает поток частиц в направлении оси x) и на компоненту импульса в направлении оси x, что совпадает с хорошо известным в кинетической теории выражением для давления p. Поэтому в данной специальной лоренцевой системе — «системе покоя» газа — тензор энергии-импульса принимает вид

$$T_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{Vmatrix}. \tag{5.20}$$

Здесь величина ρ прямо никак не связана с массой покоя составляющих частиц. Она является мерой суммы энергии покоя и кинетической энергии этих частиц.

Выразив (5.20) через 4-скорость $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ среды в системе, где газ покоится, получим

$$T_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{Vmatrix} =$$

$$= \rho u_\alpha u_\beta + p\,(\eta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta),$$

или на геометрическом языке, не зависящем от выбора системы,

$$\mathbf{T} = p\mathbf{g} + (\rho + p)\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \tag{5.21}$$

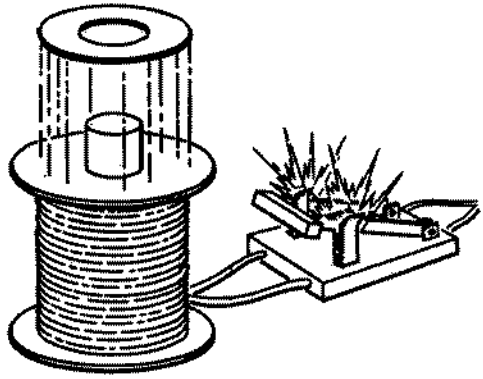
Тензор энергии-импульса идеального газа и идеальной жидкости

Приложения соотношения (5.21) носят самый общий характер. Это выражение является точным в только что рассмотренном случае «идеального газа». Оно является точным также для любой сплошной среды, которая представляет собой «идеальную жидкость» в том смысле, что в ней нет таких процессов переноса, как теплопроводность и вязкость, а следовательно (в системе покоя), нет и сдвиговых напряжений (тензор напряжений диагонален; диагональные компоненты равны между собой, так как в противном случае поворот системы отсчета привел бы к появлению сдвиговых напряжений). Однако в общем случае идеальной жидкости в плотность энергии-массы ρ, измеренную в системе, где жидкость покоится, надо включить не только массу покоя и кинетическую энергию частиц, но и энергию сжатия, энергию связи ядер и все прочие источники энергии-массы [полную плотность энергии-массы, которую можно было бы определить с помощью идеализированного эксперимента, подобного изображенному на фиг. 1.12, в котором испытуемая масса помещается в центре сферы, а пробная частица совершает около нее колебания малой амплитуды с $\omega^2 = (4\pi/3)\rho$].

Определение идеальной жидкости

§ 5.6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Картина натяжений силовых линий и давлений в перпендикулярных направлениях (фиг. 5.2) позволила Фарадею глубже проникнуть в суть электромагнетизма. Кроме натяжения $\boldsymbol{E}^2/8\pi$ (или $\boldsymbol{B}^2/8\pi$) силовых линий и такого же давления в перпендикулярных направлениях, имеется еще вектор Пойнтинга для потока энергии $(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})/4\pi$ и максвелловское выражение для плотности



ФИГ. 5.2.
Фарадеевы напряжения в действии. Когда через электромагнит пропускают переменный ток, алюминиевое кольцо взлетает в воздух.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

энергии $(E^2 + B^2)/8\pi$. Все эти величины содержатся в тензоре энергии-импульса Максвелла, определяемом выражением

$$4\pi T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{5.22}$$

УПРАЖНЕНИЕ **5.1.**

Покажите, что выражение (5.22), записанное в лоренцевой системе координат, имеет вид

$$\begin{aligned} T^{00} &= (E^2 + B^2)/8\pi, \quad T^{0j} = T^{j0} = (E \times B)^j/4\pi, \\ T^{jk} &= \frac{1}{4\pi}\left[-(E^jE^k + B^jB^k) + \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\,\delta^{jk}\right]. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Покажите, что тензор напряжений действительно описывает натяжение $(E^2 + B^2)/8\pi$ силовых линий поля и давление $(E^2 + B^2)/8\pi$ в направлениях, перпендикулярных линиям поля, в соответствии с тем, что утверждалось выше.

---

§ 5.7. СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Все тензоры энергии-импульса, исследованные выше, были симметричными. Что они другими и не могли быть, можно показать следующим образом.

2

Доказательство того, что тензор энергии-импульса симметричен

Будем проводить выкладки в некоторой лоренцевой системе. Рассмотрим сначала плотность импульса (компоненты T^{j0}) и поток энергии (компоненты T^{0j}). Они должны быть равны между собой, поскольку энергия равна массе ($E = Mc^2 = M$):

$$T^{0j} = (\text{поток энергии}) = (\text{плотность энергии}) \cdot (\text{средняя скорость потока энергии})^j = (\text{плотность массы}) \cdot (\text{средняя скорость потока массы})^j = (\text{плотность импульса}) = T^{j0}.$$

Остается лишь тензор напряжений T^{jk}. Для него проводим доказательство с помощью тех же стандартных рассуждений, которые используются в ньютоновской теории. Рассмотрим бесконечно малый куб с ребром L, энергией-массой $T^{00}L^3$ и моментом инерции $\sim T^{00}L^5$. Поместив начало пространственных координат в центре куба, получим следующее выражение для z-компоненты крутящего момента, действующего на куб со стороны внешней среды:

$$\tau^z = \underbrace{(-T^{yx}L^2)}_{\substack{y\text{-компонента силы, действующей на грань } +x}} \underbrace{(L/2)}_{\substack{\text{плечо грани} \\ +x}} + \underbrace{(T^{yx}L^2)}_{\substack{y\text{-компонента силы, действующей на грань } -x}} \underbrace{(-L/2)}_{\substack{\text{плечо грани} \\ -x}} - \underbrace{(-T^{xy}L^2)}_{\substack{x\text{-компонента силы, действующей на грань } +y}} \underbrace{(L/2)}_{\substack{\text{плечо грани} \\ +y}} - \underbrace{(T^{xy}L^2)}_{\substack{x\text{-компонента силы, действующей на грань } -y}} \underbrace{(-L/2)}_{\substack{\text{плечо грани} \\ -y}} = (T^{xy} - T^{yx})\,L^3.$$

Поскольку с уменьшением L крутящий момент убывает лишь как L^3, тогда как момент инерции убывает как L^5, этот крутящий момент приведет к бесконечно большому угловому ускорению бесконечно малого куба, что абсурдно. Во избежание этого противоречия напряжения всегда распределяются таким образом, что крутящий момент равен нулю, т. е.

$$T^{yx} = T^{xy}.$$

Если это распределение напряжений нарушить, то возникающие бесконечные угловые ускорения мгновенно перераспределят их, и равновесие восстановится. Данное условие равновесия для крутящего момента, выполненное по всем остальным парам направлений, эквивалентно симметрии тензора напряжений:

$$T^{jk} = T^{kj}. \tag{5.25}$$

§ 5.8. СОХРАНЕНИЕ 4-ИМПУЛЬСА: ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Вот уже более ста лет закон сохранения энергии-импульса является краеугольным камнем физики. Но нигде его суть не проявлялась так ясно, как в геометрической формулировке, данной Эйнштейном (фиг. 5.3, *а*). Рассматривается четырехмерная область пространства-времени $\mathscr{V}$, ограниченная замкнутой трехмерной поверхностью $\partial\mathscr{V}$. Частицы и поля, втекая в $\mathscr{V}$ и вытекая из нее, переносят 4-импульс. Внутри $\mathscr{V}$ частицы сталкиваются, разрушаются, излучают; излучение распространяется, раскачивает частицы, рождает пары. Однако на любой стадии в этом сложном лабиринте физических процессов полная энергия-импульс остается одной и той же. Энергия-импульс, теряемая частицами, переходит к полям; энергия-импульс, теряемая полями, переходит к частицам. Итак, когда «река» 4-импульса вытекает из $\mathscr{V}$, она выносит ровно столько же энергии-импульса, сколько она туда внесла.

Интегральный закон сохранения 4-импульса: $\oint \mathbf{T}\cdot d^3\mathbf{\Sigma}=0$

Сформулируем по другому это равенство, определив полный поток 4-импульса через $\partial\mathscr{V}$ *наружу*. Вытекающий 4-импульс будем считать отрицательным. Тогда «втекает ровно столько же, сколько вытекает» означает «в сумме ничего не вытекает», т. е.

полный поток 4-импульса через замкнутую трехмерную поверхность наружу должен быть равен нулю. (5.26)

Чтобы вычислить полный поток наружу самым простым способом, аппроксимируем замкнутую 3-поверхность $\partial\mathscr{V}$ большим количеством плоских 3-объемов («пластинок»), для которых положительное направление ориентировано наружу (от $\mathscr{V}$). Тогда

$$\mathbf{p}_{\text{полный наружу}} = \sum_{\text{пластинки } A} \mathbf{T}(\ldots, \mathbf{\Sigma}_{(A)}) = 0, \tag{5.27}$$

где $\mathbf{\Sigma}_{(A)}$ есть 1-форма объема для пластинки A. В компонентных обозначениях получаем

$$p^{\mu}_{\text{полный наружу}} = \sum_{A} T^{\mu\alpha}\,\Sigma_{(A)\alpha} = 0. \tag{5.27'}$$

Немного усложнив процедуру вычисления, перейдем к пределу, когда число пластинок стремится к бесконечности, а их размеры — к нулю. В результате получим интеграл (дополнение 5.3)

$$p^{\mu}_{\text{полный наружу}} = \oint_{\partial\mathscr{V}} T^{\mu\alpha}\,d^3\Sigma_{\alpha} = 0. \tag{5.28}$$

Это равенство (подобно любому равенству, записанному в компонентах) следует представлять себе как удобную форму записи

утверждения, не зависящего от системы координат:

$$\mathbf{p}_{\text{полный наружу}} = \oint_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{T} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = 0. \tag{5.29}$$

Переходя на следующий уровень сложности (это не рекомендуется делать при первом чтении книги), при котором однако упрощаются вычисления в практических случаях, подынтегральные выражения следует интерпретировать как внешние дифференциальные формы (дополнение 5.4).

Но как бы ни проводились вычисления, как бы ни интерпретировались подынтегральные выражения, результат всегда звучит просто: полный поток 4-импульса через замкнутую 3-поверхность наружу должен быть равен нулю.

Очень поучительны некоторые частные случаи этого «интегрального закона сохранения», приведенные на фиг. 5.3. Наряду с общим случаем *а* там приведены следующие частные случаи.

Частные случаи интегрального закона сохранения

Случай *б*

Замкнутая 3-поверхность $\partial\mathscr{V}$ состоит из двух сечений, соответствующих постоянным значениям времени в некоторой лоренцевой системе, плюс времениподобные поверхности на «бесконечности», соединяющие эти сечения между собой. Бесконечно далекие поверхности не дают вклада в $\oint_{\partial\mathscr{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha$, если тензор энергии-импульса достаточно быстро убывает на бесконечности. Положительным направлением границы $\partial\mathscr{V}$ стандартным образом ориентированного 4-объема $\mathscr{V}$ по определению является направление от $\mathscr{V}$. Для этого требуется нестандартная ориентация $\mathscr{S}_1$ (положительным направлением является направление в прошлое), что отражено в выражении $\partial\mathscr{V} = \mathscr{S}_2 - \mathscr{S}_1$, и это приводит к изменению знака при вычислении интеграла по гиперповерхности:

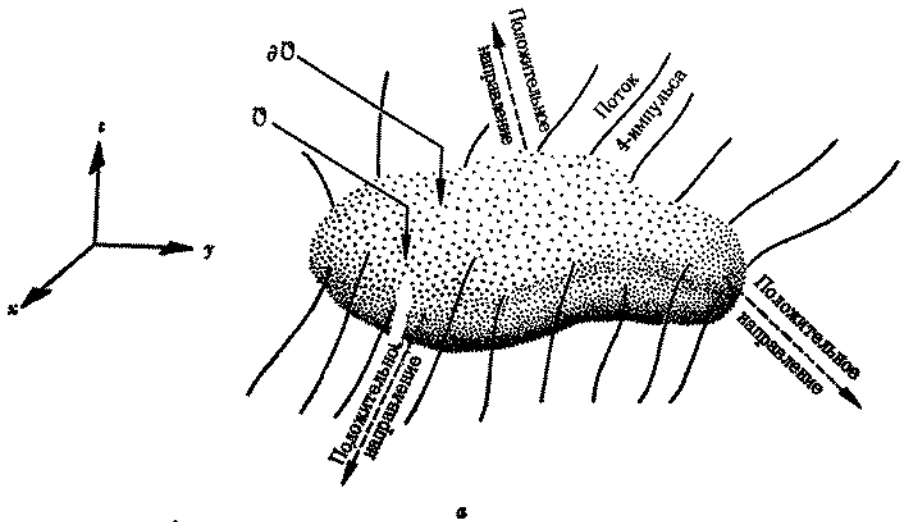
$$0 = \oint_{\partial\mathscr{V}} T^{\alpha\mu} d^3\Sigma_\mu = -\int_{\mathscr{S}_1} T^{\alpha 0}\, dx\, dy\, dz + \int_{\mathscr{S}_2} T^{\alpha 0}\, dx\, dy\, dz.$$

Поскольку $T^{\alpha 0}$ — плотность 4-импульса, это уравнение гласит

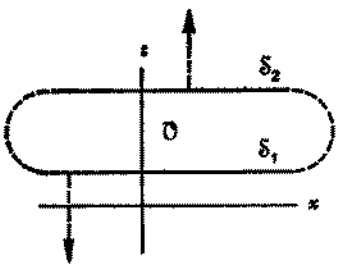
Полный 4-импульс сохраняется во времени

$$\left(\begin{array}{c}\text{полный 4-импульс во всем}\\ \text{пространстве в момент } t_1\end{array}\right) = \int_{\mathscr{S}_1} T^{\alpha 0}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{полный 4-импульс во всем}\\ \text{пространстве в момент } t_2\end{array}\right) = \int_{\mathscr{S}_2} T^{\alpha 0}\, dx\, dy\, dz. \tag{5.30}$$

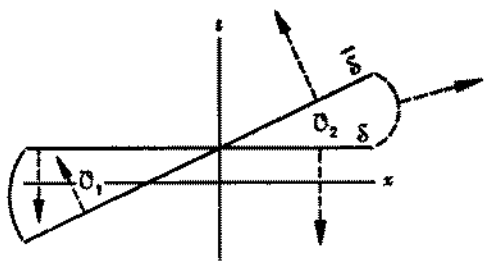


а



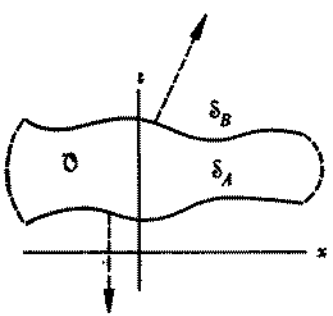
$\partial\mathcal{D} = \delta_2 - \delta_1$

б



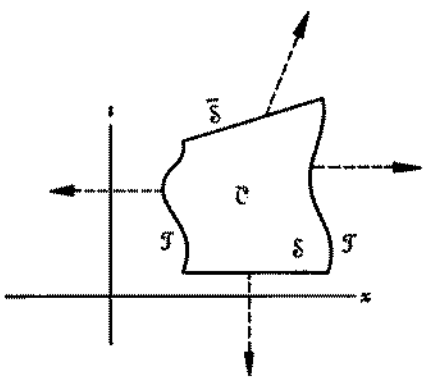
$\partial\mathcal{D} = \partial(\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1) = \delta - \delta$

в



$\partial\mathcal{D} = \delta_B - \delta_A$

г



$\partial\mathcal{D} = \bar{\delta} - \delta + \mathcal{T}$

д

ФИГ. 5.3.

а — четырехмерная область пространства-времени $\mathscr{V}$, ограниченная замкнутой трехмерной поверхностью $\partial\mathscr{V}$. Ориентация $\partial\mathscr{V}$ определена таким образом, что положительным направлением везде является направление наружу (от $\mathscr{V}$). Сохранение энергии-импульса требует, чтобы все количество 4-импульса, втекающее в $\mathscr{V}$ через $\partial\mathscr{V}$, где-то вытекало обратно; ни капли не должно теряться внутри; внутри нет «стоков». Другими словами, полный поток 4-импульса через $\partial\mathscr{V}$ в положительном направлении (наружу) должен быть равен нулю:

$$\oint_{\partial\mathscr{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha = 0.$$

б, *в*, *г*, *д* — примеры применения закона сохранения 4-импульса, которые описаны в тексте. Все символы $\mathscr{V}$ (или $\mathscr{S}$) на этих фигурах обозначают пространственно-временные объемы (или пространственные 3-объемы) со стандартной ориентацией. Пунктирные стрелки указывают положительное направление замкнутой поверхности $\partial\mathscr{V}$, используемое в тексте при обсуждении сохранения 4-импульса. Формулы под фигурами указывают, каким образом $\partial\mathscr{V}$ составлено из поверхностей $\mathscr{S}$ и $\overline{\mathscr{S}}$. Например, в случае *б* $\partial\mathscr{V} = \mathscr{S}_2 - \mathscr{S}_1$ означает, что $\partial\mathscr{V}$ получается при объединении $\mathscr{S}_2$ со стандартной ориентацией и $\mathscr{S}_1$ с противоположной ориентацией.

Случай *в*

В этом случае производится сравнение интегралов по гиперповерхностям $\mathscr{S}$ и $\overline{\mathscr{S}}$, которые представляют собой сечения постоянного значения времени $t = \text{const}$ и $\overline{t} = \text{const}$ в двух различных лоренцевых системах. Чтобы поверхность стала замкнутой, на бесконечности добавляются времениподобные гиперповерхности и предполагается, что они не дают вклада в интеграл. Ориентации сшиваются гладко и приводят к замкнутой поверхности

$$\partial\mathscr{V} = \overline{\mathscr{S}} - \mathscr{S} + \text{поверхности на бесконечности}$$

лишь при условии, что $\mathscr{V} = \mathscr{V}_2 - \mathscr{V}_1$, т. е. при условии, что 4-объем $\mathscr{V}_1$ ориентирован нестандартным образом. (О «стандартной» и «нестандартной» ориентации см. раздел А.1 дополнения 5.3.) Тогда интегральный закон сохранения дает

$$0 = \int_{\overline{\mathscr{S}}} \mathbf{T} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} - \int_{\mathscr{S}} \mathbf{T} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma},$$

или, что эквивалентно,

Полный 4-импульс одинаков во всех лоренцевых системах

$$\int_{\overline{\mathscr{S}}} \mathbf{T} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = (\text{полный 4-импульс } \mathbf{p} \text{ на } \overline{\mathscr{S}}) =$$

$$= \int_{\mathscr{S}} \mathbf{T} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = (\text{полный 4-импульс } \mathbf{p} \text{ на } \mathscr{S}). \quad (5.31)$$

Из этого соотношения следует, что наблюдатели в различных лоренцевых системах измеряют один и тот же полный 4-импульс $\mathbf{p}$. Это *не* означает, однако, что они измеряют одни и те же компоненты ($p^\alpha \neq p^{\bar\alpha}$); это означает лишь, что они измеряют один и тот же геометрический вектор

$$\mathbf{p}_{\text{на } \mathscr{S}} = p^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{p}_{\text{на } \overline{\mathscr{S}}} = p^{\bar\alpha} \mathbf{e}_{\bar\alpha},$$

вектор, компоненты которого связаны обычными формулами преобразования Лоренца

$$p^\alpha = \Lambda^\alpha{}_{\bar\beta} p^{\bar\beta}. \tag{5.32}$$

Случай *г*

Здесь весь вклад в интеграл дают две произвольные пространственноподобные гиперповерхности $\mathscr{S}_A$ и $\mathscr{S}_B$, простирающиеся через все пространство-время. Как и в случаях *а* и *б*, закон сохранения в интегральной форме гласит

$$\mathbf{p}_{\text{на } \mathscr{S}_A} = \mathbf{p}_{\text{на } \mathscr{S}_B}, \tag{5.33}$$

Полный 4-импульс не зависит от гиперповерхности, на которой его измеряют

т. е. *полный 4-импульс на пространственноподобном сечении пространства-времени не зависит от выбранного конкретного сечения* постольку, поскольку поток энергии-импульса через «гиперповерхность на бесконечности», соединяющую $\mathscr{S}_A$ и $\mathscr{S}_B$, равен нулю.

Случай *д*

В этом случае рассматривается полость, стенки которой с течением времени осциллируют и ускоряются. Трехмерная граница $\partial\mathscr{V}$ состоит из: 1) внутренности $\mathscr{S}$ полости в начальный момент времени $t = \text{const}$ в начальной лоренцевой системе полости, ориентированной нестандартным образом; 2) внутренности $\overline{\mathscr{S}}$ полости при $\bar t = \text{const}$ в ее конечной лоренцевой системе, ориентированной стандартным образом; 3) 3-объема $\mathscr{T}$, заметаемого двумерными гранями полости между начальным и конечным состояниями, положительная ориентация которого направлена наружу. Интегральный закон сохранения $\int_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{T} \cdot d^3\mathbf{\Sigma} = 0$ гласит

Изменение во времени 4-импульса в полости равно потоку 4-импульса через ее стенки

$$\begin{pmatrix}\text{полный 4-импульс}\\ \text{в полости на } \overline{\mathscr{S}}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{полный 4-импульс}\\ \text{в полости на } \mathscr{S}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{полный 4-импульс, проникающий в полость}\\ \text{через ее грани между состояниями } \mathscr{S} \text{ и } \overline{\mathscr{S}}\end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

§ 5.9. СОХРАНЕНИЕ 4-ИМПУЛЬСА: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В дополнение ко всякому «интегральному закону сохранения в плоском пространстве-времени» существует «дифференциальный закон сохранения», несущий точно такую же информацию. Переход от одного закона к другому и обратно осуществляется с помощью теоремы Гаусса.

Теорема Гаусса в четырехмерном пространстве, примененная к закону сохранения 4-импульса, превращает интеграл от $T^{\mu\alpha}$ по поверхности в интеграл от $T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$ по объему:

$$0 = \oint\limits_{\partial\mathscr{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha = \int\limits_{\mathscr{V}} T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}\, dt\, dx\, dy\, dz. \tag{5.35}$$

(Простое рассмотрение см. в дополнении 5.3; более строгий анализ — в дополнении 5.4). Если интеграл от $T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$ по любому произвольному 4-объему $\mathscr{V}$ должен быть равен нулю, то и само $T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$ должно равняться нулю повсюду в пространстве-времени:

Дифференциальный закон сохранения 4-импульса: $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$

$$T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0, \text{ т. е. } \nabla\cdot\mathbf{T} = 0 \text{ повсюду.} \tag{5.36}$$

(В уравнении $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$, не зависящем от координат, не нужно заботиться о том, по какому каналу $\mathbf{T}$ брать дивергенцию: входные каналы симметричны, и можно пользоваться любым из них.)

Уравнение $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$ представляет собой *дифференциальную формулировку закона сохранения 4-импульса*. Его называют также *уравнением движения для энергии-импульса*, поскольку оно накладывает ограничения на динамическую эволюцию тензора энергии-импульса. Исследование этих ограничений на примере простых систем позволяет постигнуть всю красоту уравнения $\nabla\cdot\mathbf{T} = 0$ и большие возможности, которые оно предоставляет.

Дополнение 5.3. ИНТЕГРАЛЫ ПО ОБЪЕМУ, ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ И ТЕОРЕМА ГАУССА В КОМПОНЕНТНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

А. Интегралы по объему в пространстве-времени

1. По аналогии с трехмерным пространством объем «гиперпараллелепипеда», ребрами которого являются векторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$, равен

$$4\text{-объем} \equiv \Omega \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta = \det \begin{Vmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \\ B^0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ C^0 & C^1 & C^2 & C^3 \\ D^0 & D^1 & D^2 & D^3 \end{Vmatrix} = {}^*(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}\wedge\mathbf{D}).$$

Здесь, как и для 3-объема, важна ориентация: перестановка любых двух ребер меняет знак Ω. *Стандартной ориентацией* любого 4-объема является

та, при которой Ω положителен; таким образом, $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ имеет стандартную ориентацию, если $\mathbf{e}_0$ направлен в будущее, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — правая тройка.

2. «Элемент объема», ребра которого в некоторой стандартным образом ориентированной лоренцевой системе имеют вид

$$A^\alpha = (\Delta t, 0, 0, 0), \quad B^\alpha = (0, \Delta x, 0, 0), \quad C^\alpha = (0, 0, \Delta y, 0), \quad D^\alpha = (0, 0, 0, \Delta z),$$

согласно приведенному выше определению, имеет 4-объем

$$\Delta^4\Omega = \varepsilon_{0123}\,\Delta t\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \Delta t\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

3. Таким образом, объемный интеграл от тензора $\mathbf{S}$ по четырехмерной области пространства-времени $\mathscr{V}$, определяемый выражением

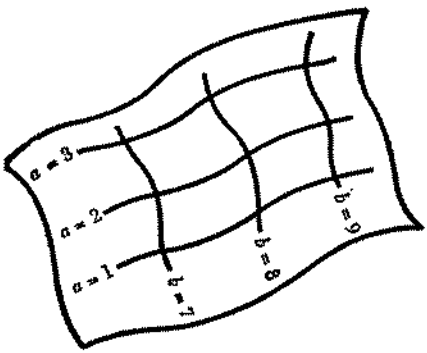
$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\substack{\text{число} \\ \text{элементарных} \\ \text{объемов} \to \infty}} \sum_{\substack{\text{элементарные} \\ \text{объемы} \\ \mathscr{A} \text{ в } \mathscr{V}}} \mathbf{S}_{\text{в центре } \mathscr{A}}\ (\text{объем } \mathscr{A}),$$

может быть вычислен в лоренцевой системе по формуле

$$M^\alpha{}_{\beta\gamma} = \int_{\mathscr{V}} S^\alpha{}_{\beta\gamma}\, d^4\Omega = \int_{\mathscr{V}} S^\alpha{}_{\beta\gamma}\, dt\, dx\, dy\, dz.$$

Б. Интегралы по 3-поверхностям в пространстве-времени

1. Введем на трехмерной поверхности произвольные координаты a, b, c. Элементарный объем, заключенный между координатными поверхностями



$$a_0 < a < a_0 + \Delta a, \quad b_0 < b < b_0 + \Delta b,$$
$$c_0 < c < c_0 + \Delta c,$$

обладает ребрами

$$A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\,\Delta a, \quad B^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial b}\,\Delta b, \quad C^\gamma = \frac{\partial x^\gamma}{\partial c}\,\Delta c,$$

и 1-форма его объема имеет вид

$$\Delta^3\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial b}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial c}\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta c.$$

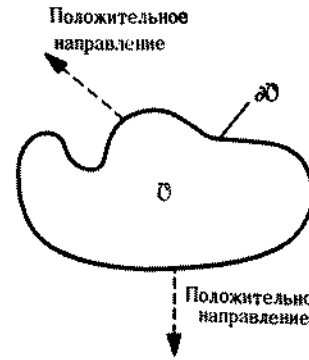
2. Тогда интеграл от тензора $\mathbf{S}$ по 3-поверхности $\mathscr{S}$ имеет следующие компоненты:

$$N^\alpha{}_\beta = \int_{\mathscr{S}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\, d^3\Sigma_\gamma = \int_{\mathscr{S}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma \varepsilon_{\gamma\mu\nu\lambda}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial a}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial b}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial c}\,da\,db\,dc.$$

Часто используется эквивалентная формула, содержащая якобиан (см. упражнение 5.5):

$$N^\alpha{}_\beta = \int_{\mathscr{S}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\,\frac{1}{3!}\,\varepsilon_{\gamma\mu\nu\lambda}\,\frac{\partial(x^\mu, x^\nu, x^\lambda)}{\partial(a, b, c)}\,da\,db\,dc.$$

В. Формулировка теоремы Гаусса



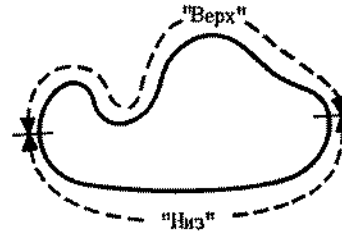
1. Рассмотрим ограниченную четырехмерную область пространства-времени $\mathcal{V}$ с замкнутой границей $\partial\mathcal{V}$. Ориентируем 1-формы объема на $\partial\mathcal{V}$ таким образом, чтобы «положительным» направлением было направление от $\mathcal{V}$.
2. Возьмем тензорное поле **S**. Проинтегрируем его дивергенцию по $\mathcal{V}$, а само поле проинтегрируем по $\partial\mathcal{V}$. Результаты должны совпасть (*теорема Гаусса*):

$$\int\limits_{\mathcal{V}} S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{,\gamma}\, d^4\Omega = \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}.$$

Г. Доказательство теоремы Гаусса

1. Индексы α и β у тензора $S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}$ являются «свободными», поэтому в процессе доказательства их можно опустить. Тогда соотношение, которое необходимо получить, принимает вид

$$\int\limits_{\mathcal{V}} S^{\gamma}{}_{,\gamma}\, dt\, dx\, dy\, dz = \oint\limits_{\partial\mathcal{V}} S^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}.$$



2. Поскольку интеграл от производной есть первоначальная функция, то интеграл от $S^0{}_{,0}$ по объему равен

$$\int\limits_{\mathcal{V}} S^0{}_{,0}\, dt\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\text{«верх»}} S^0\, dx\, dy\, dz - \int\limits_{\text{«низ»}} S^0\, dx\, dy\, dz.$$

3. Интеграл по поверхности $\int\limits_{\partial\mathcal{V}} S^0 d^3\Sigma_0$ можно свести к такому же виду:

а. В качестве координат на $\partial\mathcal{V}$ используются x, y, z. На «верхней» стороне $d^3\Sigma_0$ должно быть положительно, что обеспечивает «положительность» направления от $\mathcal{V}$, поэтому (см. пункт Б выше)

$$d^3\Sigma_0 = \varepsilon_{0\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \varepsilon_{0123}\, dx\, dy\, dz = dx\, dy\, dz.$$

б. На «нижней» стороне $d^3\Sigma_0$ должно быть отрицательно, т. е.

$$d^3\Sigma_0 = -dx\, dy\, dz.$$

в. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial\mathcal{V}} S^0 d^3\Sigma_0 = \int\limits_{\text{«верх»}} S^0\, dx\, dy\, dz - \int\limits_{\text{«низ»}} S^0\, dx\, dy\, dz.$$

4. Аналогичным образом устанавливается равенство и других компонент. Складывая различные компоненты, получаем искомый результат:

$$\int_{\mathscr{V}} S^{\nu}{}_{,\nu}\, d^4\Omega = \oint_{\partial\mathscr{V}} S^{\nu} d^3\Sigma_{\nu}.$$

Для читателей, которые ознакомились с гл. 4

Дополнение 5.4. I. ЛЮБОЙ ИНТЕГРАЛ ЕСТЬ ИНТЕГРАЛ ОТ ФОРМЫ. II. ТЕОРЕМА ГАУССА НА ЯЗЫКЕ ФОРМ

I. *Каждый интеграл*, встречающийся в гл. 5, можно интерпретировать как *интеграл от внешней дифференциальной формы*. В четырехкратных и трехкратных интегралах, например, это обстоятельство проявляется в том, что

$$d^4\Omega = \boldsymbol{\epsilon} = {}^*\mathbf{1} = \varepsilon_{0123}\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$$

и

$$d^3\Sigma_{\mu} = \varepsilon_{\mu|\alpha\beta\gamma|}\, \mathbf{d}x^{\alpha} \wedge \mathbf{d}x^{\beta} \wedge \mathbf{d}x^{\gamma}$$

представляют собой базисные 4- и 3-формы. (Напомним, что суммирование по индексам $\alpha\beta\gamma$, заключенным в вертикальные черточки, производится только по совокупности комбинаций $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant 3$.) Более подробная сводка обозначений приведена ниже в пункте В.

II. *Теорема Гаусса для интеграла от тензора* в плоском пространстве гласит

$$\int_{\mathscr{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S})\, d^4\Omega = \oint_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$$

для любого тензора, подобного $\mathbf{S} = S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} \mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta} \otimes \mathbf{e}_{\gamma}$ (запись в компонентах приведена в дополнении 5.3). Она представляет собой частный случай обобщенной теоремы Стокса (дополнение 4.1), *возможность применения которой зависит от того факта, что базисные векторы* $\mathbf{e}_{\alpha}$ *и* $\boldsymbol{\omega}^{\beta}$ *глобальной лоренцевой системы постоянны, т. е. не зависят от* x. Определения даны ниже в пункте А, а доказательства — в пункте Б.

А. В плоских пространствах, благодаря наличию постоянных базисных векторов, можно определить *интегралы, значениями которых являются тензоры*. Таким образом, для тензора с указанным рангом полагаем по определению

$$\int \mathbf{S} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta} \int S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}.$$

Вынесение базисных векторов и форм из-под знака интеграла оправдано тем, что они постоянны и не зависят от положения точки в пространстве-времени. Каждое из чисел $\int S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}$ (для $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) вычисляется подстановкой в 3-форму $S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}$ *любой* соответствующим образом ориентированной параметризации гиперповерхности, как это описано в дополнении 4.1 (в той части выкладок, где не затрагиваются «свободные индексы» α и β, допускается произвольная криволинейная параметризация). Другими словами, под $\mathbf{S} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta} \otimes S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}$

понимается «тензорнозначная 3-форма». Под знаком интеграла она свертывается с элементом гиперплоскости, касательным к 3-поверхности $\mathscr{B}$ $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ интегрирования, в результате чего получается интеграл

$$\int \mathbf{S}\cdot d^3\mathbf{\Sigma} = \int \left\langle \mathbf{S}\cdot d^3\mathbf{\Sigma},\ \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial\lambda^1} \wedge \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial\lambda^2} \wedge \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial\lambda^3} \right\rangle d\lambda^1\, d\lambda^2\, d\lambda^3 =$$

$$= \mathbf{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta \int S^\alpha{}_\beta{}^\gamma \varepsilon_{\gamma|\lambda\mu\nu|} \underbrace{\frac{\partial(x^\lambda, x^\mu, x^\nu)}{\partial(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)}}_{\text{якобиан}} d\lambda^1\, d\lambda^2\, d\lambda^3.$$

Хотя здесь и существенно то, что базисные векторы $\mathbf{e}_\alpha$, $\boldsymbol{\omega}^\beta$, соответствующие прямоугольным координатам, постоянны, тем не менее *можно пользоваться параметризацией гиперповерхности самого общего вида*.

Б. *Доказательство теоремы Гаусса* сводится к несложным выкладкам:

$$\oint_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{S}\cdot d^3\mathbf{\Sigma} = \mathbf{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta \oint_{\partial\mathscr{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma \quad (\mathbf{e}_\alpha,\ \boldsymbol{\omega}^\beta \text{ постоянны})$$

$$= \mathbf{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta \int_{\mathscr{V}} \mathbf{d}\left(S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma\right) \quad \text{(теорема Стокса)}$$

$$= \mathbf{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta \int_{\mathscr{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{,\gamma} {}^*1 \quad \text{(см. ниже)}$$

$$= \int_{\mathscr{V}} (\nabla\cdot\mathbf{S})\, d^4\Omega \quad \text{(простое изменение обозначений)}.$$

Выше в выкладках опущено звено

$$\mathbf{d}\left(S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\, d^3\Sigma_\gamma\right) = \left(\partial S^\alpha{}_\beta{}^\gamma/\partial x^\rho\right) \mathbf{d}x^\rho \wedge d^3\Sigma_\gamma = \left(\partial S^\alpha{}_\beta{}^\gamma/\partial x^\gamma\right) {}^*1.$$

Здесь сначала использовано $\mathbf{d}\left(d^3\Sigma_\gamma\right) = 0$ (это следствие того, что $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = \text{const}$ в плоском пространстве-времени), а затем учтено, что

$$\mathbf{d}x^\rho \wedge d^3\Sigma_\gamma = \delta^\rho{}_\gamma {}^*1.$$

(Запишем левую часть этого тождества в виде $\varepsilon_{\gamma|\mu\nu\lambda|}\, \mathbf{d}x^\rho \wedge \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\lambda$. Единственный отличный от нуля член в сумме по $\mu\nu\lambda$ соответствует комбинации чисел $\mu < \nu < \lambda$, каждое из которых отлично от ρ. Значение этого члена и выписано в правой части тождества.)

В. *Сводка обозначений*. 3-форма плотности заряда:

$$^*\mathbf{J} = J^\mu d^3\Sigma_\mu = \mathbf{J}\cdot d^3\mathbf{\Sigma} = \underbrace{J^\mu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}}_{(^*J)_{\alpha\beta\gamma}} \underbrace{\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma/3!}_{d^3\Sigma_\mu}.$$

2-формы Максвелла и Фарадея:

$$*\mathbf{F} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} d^3 S_{\mu\nu},$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu.$$

Базисные 2-формы:

$\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$ (один способ обозначения),

$d^2 S_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu|\alpha\beta|}\, \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$ (дуальный способ обозначения).

3-форма плотности энергии-импульса:

$$\mathbf{T} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} \equiv \mathbf{e}_\mu T^{\mu\nu} d^3 \Sigma_\nu \equiv *\mathbf{T}.$$

дуальность по последнему индексу, $(*T)^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = T^{\mu\nu} e_{\nu\alpha\beta\gamma}$.

3-форма плотности момента импульса:

$$\boldsymbol{J} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} \equiv \frac{1}{2} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \overset{\gamma}{\gamma}{}^{\mu\nu\alpha} d^3 \Sigma_\alpha \equiv *\boldsymbol{J}; \quad (*\overset{j}{\gamma})^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \overset{j}{\gamma}{}^{\mu\nu\lambda} e_{\lambda\alpha\beta\gamma}.$$

§ 5.10. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$

Ньютоновская жидкость характеризуется $|v^j| \ll 1$, $p \ll \rho$

Уравнение движения $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$, примененное к почти ньютоновской жидкости, приводит к классическим (ньютоновским) уравнениям гидродинамики. Такая жидкость характеризуется низкими скоростями по отношению к используемой лоренцевой системе $|v^j| \ll 1$, и в ее системе покоя давление жидкости мало по сравнению с плотностью энергии-массы $p/\rho = p/\rho c^2 \ll 1$.

Например, воздух в урагане имеет следующие параметры: $|v^j| \sim 100$ км/час $\sim 3\,000$ см/с $\sim 10^{-7}\, c = 10^{-7} \ll 1$,

$$\frac{p}{\rho} \sim \frac{1 \text{ атм}}{10^{-3} \text{ г/см}^3} \sim \frac{10^6 \text{ дин/см}^2}{10^{-3} \text{ г/см}^3} = 10^9 \frac{\text{см}^2}{\text{с}^2} \sim 10^{-12} c^2 = 10^{-12} \ll 1.$$

Тензор энергии-импульса и уравнение движения для ньютоновской жидкости

Тензор энергии-импульса такой жидкости имеет компоненты

$$T^{00} = (\rho + p)\, u^0 u^0 - p \approx \rho, \tag{5.37а}$$

$$T^{0j} = T^{j0} = (\rho + p)\, u^0 u^j \approx \rho v^j, \tag{5.37б}$$

$$T^{jk} = (\rho + p)\, u^j u^k + p\delta^{jk} \approx \rho v^j v^k + p\delta^{jk}; \tag{5.37в}$$

компонентами уравнения движения $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ являются

$$T^{00}{}_{,0} + T^{0j}{}_{,j} = \partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \text{ («уравнение непрерывности»)} \tag{5.38а}$$

и

$$T^{j0}{}_{,0} + T^{jk}{}_{,k} = \partial\,(\rho v^j)/\partial t + \partial\,(\rho v^j v^k)/\partial x^k + \partial p/\partial x^j = 0,$$

или, что эквивалентно (в совокупности с уравнением непрерывности)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad \text{(«уравнение Эйлера»)}. \tag{5.38б}$$

В дополнении 5.5 эти результаты выводятся и анализируются с ньютоновской точки зрения.

Применение уравнения $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ к электрически заряженному, колеблющемуся резиновому бруску

В качестве еще одного применения уравнения $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ рассмотрим составную систему: резиновый брусок, в который вделаны электрически заряженные бусины, взаимодействующие с электромагнитным полем. Резиновый брусок колеблется; бусины при этом испытывают ускорения и излучают электромагнитные волны. В то же время падающие электромагнитные волны подталкивают бусины, изменяя картину колебаний бруска. Взаимодействия передают 4-импульс от бруска с бусинами электромагнитному полю и обратно. Ни 4-импульс бруска, ни 4-импульс поля не сохраняются; ни $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{бруска}}$, ни $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{э. м. поля}}$ не равны нулю. Но полный 4-импульс должен сохраняться, т. е.

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}_{\text{бруска}} + \mathbf{T}_{\text{э. м. поля}}) \text{ должно быть равно нулю.} \tag{5.39}$$

Для электромагнитного поля самого общего вида, взаимодействующего с произвольным источником, $\nabla \cdot \mathbf{T}_{\text{э. м. поля}}$ имеет вид

$$T^{\mu\nu}{}_{\text{э. м. поля, }\nu} = -F^{\mu\alpha}J_{\alpha}. \tag{5.40}$$

(Это получено в упражнении 3.18 из выражения для $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$, выражения (5.22) для электромагнитного тензора энергии-импульса и уравнений Максвелла.) В случае нашего бруска с бусинами $\mathbf{J}$ представляет собой 4-ток, связанный с колеблющимися заряженными бусинами, а $\mathbf{F}$ — тензор электромагнитного поля. Временная компонента уравнения (5.40) имеет вид

$$T^{0\nu}{}_{\text{э. м. поля, }\nu} = -F^{0k}J_k = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} =$$

$$= -\left(\begin{array}{c}\text{скорость, с которой электрическое поле } \boldsymbol{E} \\ \text{совершает работу над единицей объема} \\ \text{заряженных бусин}\end{array}\right). \tag{5.41}$$

Для сравнения заметим, что $T^{00}_{\text{бруска, }0}$ есть скорость изменения во времени плотности энергии бруска, а $-T^{0j}_{\text{бруска, }j}$ — вклад в эту скорость изменения плотности энергии, обусловленный потоком энергии самого бруска, и, следовательно, их разность $T^{0\nu}_{\text{бруска, }\nu}$ имеет следующий смысл:

$$T^{0\nu}_{\text{бруска, }\nu} = \left(\begin{array}{c}\text{скорость, с которой возрастает масса-} \\ \text{энергия единицы объема бруска} \\ \text{благодаря воздействиям, отличным} \\ \text{от внутренних механических сил} \\ \text{между различными частями бруска}\end{array}\right). \tag{5.42}$$

Следовательно, закон сохранения

$$(T^{0\nu}_{\text{э. м. поля}} + T^{0\nu}_{\text{бруска}})_{,\nu} = 0$$

гласит, что масса-энергия бруска возрастает с точно той же скоростью, с которой электрическое поле совершает работу над бусинами. Аналогичный результат получается и для импульса:

$$T^{k\nu}_{\text{э. м. поля},\,\nu\mathbf{e}_k} = -F^{k\nu}J_{\nu\mathbf{e}_k} = -(J^0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}) =$$

$$= -\begin{pmatrix}\text{сила Лоренца, действующая}\\ \text{на единицу объема бусин}\end{pmatrix}, \tag{5.43}$$

$$T^{k\nu}_{\text{бруска},\,\nu\mathbf{e}_k} = \begin{pmatrix}\text{скорость, с которой возрастает импульс}\\ \text{единицы объема бруска благодаря воз-}\\ \text{действиям, отличным от его собственных}\\ \text{напряжений}\end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

Таким образом, закон сохранения

$$(T^{k\nu}_{\text{э. м. поля}} + T^{k\nu}_{\text{бруска}})_{,\nu} = 0$$

гласит, что скорость изменения импульса бруска равна силе, действующей на его бусины со стороны электромагнитного поля.

Дополнение 5.5. ОБЗОР НЬЮТОНОВСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассмотрим классическую нерелятивистскую идеальную жидкость. Применим закон Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ к «частице жидкости», т. е. к малой фиксированной массе жидкости, за которой ведется наблюдение по мере того, как она перемещается в пространстве:

$$\frac{d}{dt}(\text{импульс единицы массы}) = (\text{сила на единицу массы}) =$$

$$= \frac{(\text{сила на единицу объема})}{(\text{плотность})} = \frac{-(\text{градиент давления})}{(\text{плотность})},$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{1}$$

Переходя от скорости изменения во времени при наблюдении за элементом жидкости к скорости изменения во времени, измеренной в данном месте, получим

$$\begin{pmatrix}\text{скорость изменения во времени при наблюдении за жидкостью}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{скорость изменения во времени в данном месте}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{скорость жидкости}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{скорость изменения в пространстве}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_{l,k} v_k = -\frac{1}{\rho} p_{,l}.$$

(Латинские индексы пробегают значения от 1 до 3; используется правило суммирования Эйнштейна; в плоском пространстве не делается различия между верхними и нижними индексами, соответствующими пространственным измерениям.) Это не что иное, как *фундаментальное уравнение Эйлера*, описывающее гидродинамику идеальной жидкости.

Но для полного описания идеальной жидкости необходимы еще два уравнения. Одно из них отражает отсутствие переноса тепла — требует постоянства удельной энтропии (энтропии единицы массы) для каждой «частицы» жидкости:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (v \cdot \nabla) s = 0. \tag{3}$$

Последнее уравнение выражает сохранение массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \tag{4}$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0;$$

оно во всех отношениях аналогично уравнению, которое выражает сохранение заряда в электродинамике и носит то же название *уравнение непрерывности*.

Ньютоновский тензор энергии-импульса, подобно своему релятивистскому аналогу, связан с сохранением импульса и массы. Обратимся к скорости изменения во времени плотности импульса жидкости ρv_l — импульса единицы объема; для нее имеем

$$\partial (\rho v_l)/\partial t = -(\rho v_l v_k)_{,k} - p_{,l}. \tag{5}$$

Импульс втекает в малый элемент объема слева («сила равна скорости изменения импульса во времени») и вытекает справа; то же самое и для других граней. Поэтому правая часть (5) должна представлять дивергенцию этого потока импульса:

$$\partial (\rho v_l)/\partial t = -T_{lk,k}. \tag{6}$$

Следовательно, в качестве самого потока импульса мы можем принять

$$T^{ik} = T_{ik} = \underbrace{\rho v_i v_k}_{\text{«конвекция»}} + \underbrace{\delta_{ik} p}_{\text{«усилие»}}. \tag{7}$$

Ньютоновское значение плотности импульса равно

$$T^{0i} = T^{i0} = \rho v_i. \tag{8}$$

В этих обозначениях уравнение изменения импульса во времени принимает вид

$$\partial T^{i\mu}/\partial x^\mu = 0; \tag{9}$$

если положить $T^{00} = \rho$, то уравнение непрерывности запишется в виде

$$\partial T^{0\mu}/\partial x^\mu = 0. \tag{10}$$

Теперь можно сделать вывод: такое ньютоновское рассмотрение приводит к разумной аппроксимации релятивистского тензора энергии-импульса:

$$\left\| \begin{array}{c|c} \rho & \rho v^j \\ \hline \rho v^i & \rho v^i v^j + \delta^{ij} p \end{array} \right\| \approx \left\| \begin{array}{c|c} (p+\rho)\, u^0 u^0 - p & (p+\rho)\, u^0 u^j \\ \hline (p+\rho)\, u^0 u^i & (p+\rho)\, u^i u^j + \delta^{ij} p \end{array} \right\| \tag{11}$$

§ 5.11. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Определение момента импульса и вывод его интегрального закона сохранения

Симметрия тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ позволяет определить момент импульса $J^{\alpha\beta}$ — сохраняющуюся величину, аналогичную импульсу p^α. Момент импульса определяется по отношению к некоторой произвольной начальной точке — событию $\mathcal{A}$ с координатами

$$x^\alpha(\mathcal{A}) = a^\alpha \tag{5.45}$$

в некоторой лоренцевой системе. Момент импульса относительно $\mathcal{A}$ определяется с помощью тензора

$$\mathfrak{y}^{\alpha\beta\gamma} = (x^\alpha - a^\alpha)\, T^{\beta\gamma} - (x^\beta - a^\beta)\, T^{\alpha\gamma}. \tag{5.46}$$

(Отметим, что $x^\alpha - a^\alpha$ есть вектор, отделяющий «точку поля» x^α от «начальной точки» $\mathcal{A}$; здесь $T^{\alpha\gamma}$ вычисляется в «точке поля».)

Поскольку тензор $\mathbf{T}$ симметричен, дивергенция $\mathfrak{y}^{\alpha\beta\gamma}$ равна нулю:

$$\mathfrak{y}^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma T^{\beta\gamma} + (x^\alpha - a^\alpha) \underbrace{T^{\beta\gamma}{}_{,\gamma}}_{0} - \delta^\beta{}_\gamma T^{\alpha\gamma} - (x^\beta - a^\beta) \underbrace{T^{\alpha\gamma}{}_{,\gamma}}_{0} =$$

$$= T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0. \tag{5.47}$$

Следовательно, интеграл от этого тензора по любой замкнутой 3-поверхности равен нулю:

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathfrak{y}^{\alpha\beta\gamma} d^3\Sigma_\gamma = 0 \tag{5.48}$$

(*интегральная форма закона сохранения момента импульса*).

Интеграл по пространственноподобной поверхности постоянного значения времени t равен

$$J^{\alpha\beta} = \int \mathfrak{y}^{\alpha\beta 0}\, dx\, dy\, dz = \int [(x^\alpha - a^\alpha)\, T^{\beta 0} - (x^\beta - a^\beta)\, T^{\alpha 0}]\, dx\, dy\, dz. \tag{5.49}$$

Вспомнив, что $T^{\beta 0}$ есть плотность импульса, сразу видим, что (5.49) по форме совпадает с выражением $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ ньютоновской теории. Отсюда и название для $J^{\alpha\beta}$ — «полный момент импульса». Различные аспекты определенного таким образом сохраняющегося момента импульса, включая связь с аналогичным понятием в ньютоновской теории, исследуются в дополнении 5.6.

УПРАЖНЕНИЯ

5.2. Сохранение заряда

Из упражнения 3.16 известно, что 4-вектор заряда-тока $\mathbf{J}$ удовлетворяет дифференциальному закону сохранения $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Запишите соответствующий интегральный закон сохранения и дайте интерпретацию этому закону для четырех замкнутых поверхностей, изображенных на фиг. 5.3.

5.3. Рождение частиц

В недрах массивных звезд на поздних стадиях эволюции температура столь высока, что происходит непрерывное рождение и аннигиляция электронно-позитронных пар. Пусть $\mathbf{S}$ — вектор числа-потока электронов и позитронов, а его дивергенцию обозначим посредством

$$\varepsilon \equiv \nabla \cdot \mathbf{S}. \tag{5.50}$$

Используя теорему Гаусса, покажите, что ε есть число частиц, родившихся в единичном четырехмерном объеме пространства-времени (минус число аннигилировавших частиц).

5.4. Инертная масса единицы объема

Рассмотрим среду, в которой есть напряжения и которая движется с обычной скоростью $|\boldsymbol{v}| \ll 1$ по отношению к некоторой лоренцевой системе.

а. Применив преобразования Лоренца, покажите, что пространственные компоненты плотности импульса имеют вид

$$T^{\overline{0}\overline{j}} = \sum_{\overline{k}} m^{\overline{j}\overline{k}} v^{\overline{k}}, \tag{5.51}$$

где

$$m^{\overline{j}\overline{k}} = T^{\overline{0}\overline{0}} \delta^{\overline{j}\overline{k}} + T^{\overline{j}\overline{k}}, \tag{5.52}$$

а $T^{\overline{\mu}\overline{\nu}}$ — компоненты тензора энергии-импульса в системе покоя среды. В Солнечной системе повсюду $T^{\overline{0}\overline{0}} \gg |T^{\overline{j}\overline{k}}|$ (см., например, об урагане в § 5.10), поэтому мы привыкли писать $T^{\overline{0}\overline{j}} = T^{\overline{0}\overline{0}} v^{\overline{j}}$, т. е. (плотность импульса) = (плотность массы покоя) × (скорость). Но внутри нейтронной звезды $T^{\overline{0}\overline{0}}$ может быть того же порядка, что и $T^{\overline{j}\overline{k}}$, поэтому уравнение (плотность импульса) = (плотность массы покоя) × (скорость) следует заменить при малых скоростях уравнениями (5.51) и (5.52).

б. Получите уравнения (5.51) и (5.52) в рамках ньютоновского рассмотрения, использовав принцип эквивалентности массы и энергии. (*Указание*: полная энергия-масса, проносимая мимо наблюдателя объемом среды V включает как массу покоя $T^{\overline{0}\overline{0}}V$, так

и работу, совершаемую силами, которые действуют на грани этого объема и «проталкивают» его с одного места на другое.)

в. Как следует из уравнения (5.51), сила на единицу объема, сообщающая нагруженной среде ускорение dv^k/dt (среда покоится относительно наблюдателя, прилагающего силу), равна

$$F^j = dT^{0j}/dt = \sum_k m^{jk}\, dv^k/dt. \tag{5.53}$$

Из этого уравнения напрашивается вывод, что m^{jk} можно назвать «инертной массой единицы объема» покоящейся нагруженной среды. В общем случае m^{jk} представляет собой симметричный 3-тензор. Во что он переходит в частном случае идеальной жидкости?

г. Рассмотрите изолированное нагруженное покоящееся тело, находящееся в равновесии ($T^{\alpha\beta}{}_{,\,0} = 0$) в лабораторной системе. Покажите, что его полная инертная масса, определяемая соотношением

$$M^{ij} = \int\limits_{\substack{\text{нагруженное}\\ \text{тело}}} m^{ij}\, dx\, dy\, dz, \tag{5.54}$$

изотропна и равна массе покоя этого тела

$$M^{ij} = \delta^{ij} \int T^{00}\, dx\, dy\, dz. \tag{5.55}$$

5.5. Детерминанты и якобианы

а. Выпишите в явном виде сумму, которой определяется d^2S_{01} в

$$d^2S_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial b}\, da\, db.$$

Убедитесь при этом, что верна формула

$$d^2S_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu|\alpha\beta|}\, \frac{\partial (x^\alpha, x^\beta)}{\partial (a, b)}\, da\, db = \frac{1}{2!}\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \frac{\partial (x^\alpha, x^\beta)}{\partial (a, b)}\, da\, db.$$

(Выражения, подобные этому, должны встречаться только под знаком интеграла. В этом упражнении можно либо везде, где необходимо, поставить $\int \ldots$, либо интерпретировать дифференциалы по правилам внешнего исчисления, $dadb \to \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}b$; см. дополнение 5.4.) Для якобианов здесь использовано обозначение

$$\frac{\partial (f, g)}{\partial (a, b)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a} & \dfrac{\partial f}{\partial b} \\ \dfrac{\partial g}{\partial a} & \dfrac{\partial g}{\partial b} \end{vmatrix}.$$

б. Рассмотрите подобным же образом частный случай и покажите, что

$$d^3\Sigma_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial b}\, \frac{\partial x^\gamma}{\partial c}\, dadb\, dc = \frac{1}{3!}\, \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, \frac{\partial (x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)}{\partial (a, b, c)}\, da\, db\, dc.$$

в. Приведите точное определение значения детерминанта как суммы членов (с соответствующими знаками), каждый из которых есть произведение, содержащее по одному множителю из каждой строки и в то же время по одному множителю из каждого столбца. Покажите, что это определение можно представить (в частном случае 4×4, который очевидным образом обобщается на случай $p \times p$) в виде

$$\det A \equiv \det \| A^{\lambda}{}_{\rho} \| = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^{\alpha}{}_{0} A^{\beta}{}_{1} A^{\gamma}{}_{2} A^{\delta}{}_{3}.$$

г. Покажите, что

$$\det A = \frac{1}{4!} \delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta} A^{\alpha}{}_{\mu} A^{\beta}{}_{\nu} A^{\gamma}{}_{\rho} A^{\delta}{}_{\sigma}$$

(определение $\delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ см. в упражнениях 3.13 и 4.12).

д. Использовав свойства δ-символа, покажите, что элементы $(A^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}$ матрицы A^{-1}, обратной матрице A, даются выражением

$$(A^{-1})^{\mu}{}_{\alpha} (\det A) = \frac{1}{3!} \delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta} A^{\beta}{}_{\nu} A^{\gamma}{}_{\rho} A^{\delta}{}_{\sigma}.$$

е. С помощью «индексной техники» выведите из формулы для $\det A$ в пункте «г» следующее выражение для производной логарифма детерминанта:

$$\mathbf{d} \ln |\det A| = \mathrm{Sp}\,(A^{-1}\, \mathbf{d}A).$$

Здесь $\mathbf{d}A$ — матрица $\| \mathbf{d}A^{\alpha}{}_{\mu} \|$, элементами которой являются 1-формы.

5.6. Центроиды и размеры

Рассмотрим изолированную систему с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, полным 4-импульсом P^{α}, величиной 4-импульса $M = -(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P})^{1/2}$, тензором собственного момента импульса $S^{\alpha\beta}$ и вектором собственного момента импульса S^{α} (см. дополнение 5.6). Наблюдатель с 4-скоростью u^{α} определяет *центроид* системы в своей лоренцевой системе отсчета в момент своего лоренцевого времени $x^0 = t$ из соотношения

$$X^{j}_{\mathbf{u}}(t) = (1/P^0) \int_{x^0=t} x^j T^{00} d^3x \,; \tag{5.56}$$

в лоренцевой системе отсчета, где $\mathbf{u} = \partial/\partial x^0$. Этот центроид зависит 1) от конкретной системы, которая изучается, 2) от 4-скорости наблюдателя $\mathbf{u}$ и 3) от момента времени t, в который наблюдается система.

а. Покажите, что центроид движется с постоянной скоростью

$$dX^{j}_{\mathbf{u}}/dt = P^j/P^0, \tag{5.57}$$

соответствующей 4-скорости

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}/M. \tag{5.57'}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Отметим, что эта «4-скорость центроида» не зависит от 4-скорости $\mathbf{u}$, используемой при определении центроида.

б. Центроид в системе отсчета, где изучаемая система покоится (т. е. центроид, для которого $\mathbf{u} = \mathbf{U}$), называется центром масс; см. дополнение 5.6. Пусть $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}$ — вектор, соединяющий произвольное событие на мировой линии центра масс с произвольным событием на мировой линии центроида, определенного для 4-скорости $\mathbf{u}$; тогда компоненты $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}$ в произвольной системе координат задаются выражением

$$\xi^{\alpha}_{\mathbf{u}} = X^{\alpha}_{\mathbf{u}} - X^{\alpha}_{\mathbf{U}}. \tag{5.58}$$

Покажите, что $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}$ удовлетворяет уравнению

$$[(\xi^{\alpha}_{\mathbf{u}} P^{\beta} - P^{\alpha} \xi^{\beta}_{\mathbf{u}}) - S^{\alpha\beta}]\, u_{\beta} = 0. \tag{5.59}$$

(*Указание*: проведите выкладки в лоренцевой системе отсчета, где $\mathbf{u} = \partial/\partial x^0$.)

в. Покажите, что при наблюдении из системы отсчета, где изучаемая система покоится, в любой заданный момент времени приведенное выше уравнение сводится к трехмерному эвклидовому уравнению

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{S})/M, \tag{5.59'}$$

где $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}/u^0$ — обычная скорость системы отсчета, в которой определен центроид.

г. Предположим, что плотность энергии, измеряемая произвольным наблюдателем в произвольном месте пространства-времени, неотрицательна ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \gg 0$ для любого времениподобного $\mathbf{u}$). В системе отсчета, где изучаемая система покоится, построим минимальный возможный цилиндр, который параллелен $\boldsymbol{S}$ и содержит всю систему ($T_{\alpha\beta} = 0$ повсюду вне цилиндра). Покажите, что радиус r_0 этого цилиндра ограничен соотношением

$$r_0 \geqslant |\,\boldsymbol{S}\,|/M. \tag{5.60}$$

Таким образом, для систем с данным собственным моментом импульса $\boldsymbol{S}$ и данной массой M имеется минимальный возможный размер $r_{0\,\text{мин}} = |\,\boldsymbol{S}\,|/M$, измеренный в системе отсчета, где изучаемая система покоится.

Дополнение 5.6. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

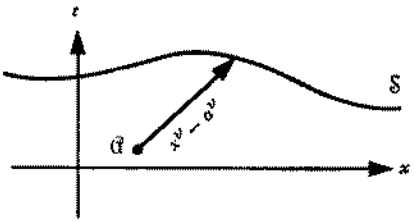
А. Определение момента импульса

а. Возьмем произвольную пространственноподобную гиперповерхность $\mathscr{S}$ и произвольное событие $\mathscr{A}$ с координатами $x^{\alpha}(\mathscr{A}) \equiv a^{\alpha}$. (Повсюду используется глобальная инерциальная система координат.)

б. Определим «полный момент импульса на $\mathscr{S}$ относительно $\mathscr{A}$» как

$$J^{\mu\nu} \equiv \int_{\mathscr{S}} {}^{\mathscr{A}}y^{\mu\nu\alpha}\, d^3\Sigma_\alpha,$$

$${}^{\mathscr{A}}y^{\mu\nu\alpha} \equiv (x^\mu - a^\mu)\, T^{\nu\alpha} - (x^\nu - a^\nu)\, T^{\mu\alpha}.$$



в. Если $\mathscr{S}$ — гиперповерхность постоянного значения времени t, то это определение принимает вид

$$J^{\mu\nu} = \int {}^{\mathscr{A}}y^{\mu\nu 0}\, dx\, dy\, dz.$$

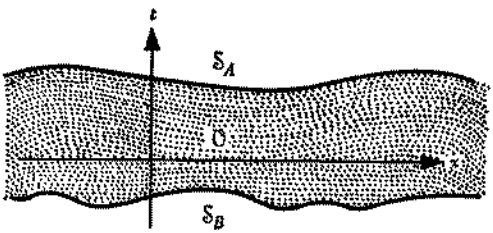
Б. Сохранение момента импульса

а. Из $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ следует ${}^{\mathscr{A}}y^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$.

б. Это означает, что $J^{\mu\nu}$ *не зависит от гиперповерхности* $\mathscr{S}$, *на которой его вычисляют* (теорема Гаусса):

$$J^{\mu\nu}(\mathscr{S}_A) - J^{\mu\nu}(\mathscr{S}_B) =$$

$$= \int_{\partial\mathscr{V}^0} {}^{\mathscr{A}}y^{\mu\nu\alpha}\, d^3\Sigma_\alpha = \int_{\mathscr{V}^0} {}^{\mathscr{A}}y^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}\, d^4x = 0.$$



[*Примечание*: $\partial\mathscr{V}$ (граница $\mathscr{V}$) включает $\mathscr{S}_A$, $\mathscr{S}_B$ и времениподобные поверхности на пространственной бесконечности; вклад последних не учитываем, так как источник локализован.]

В. Изменение точки, относительно которой определяется момент импульса

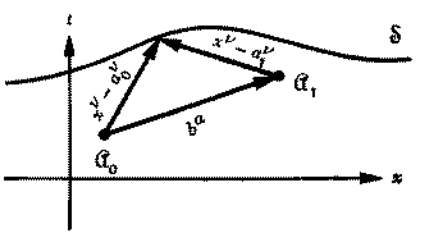
Пусть b^α — вектор, соединяющий $\mathscr{A}_0$ с $\mathscr{A}_1$: $b^\alpha = a_1^\alpha - a_0^\alpha$. Тогда

$$J^{\mu\nu} \text{ (относительно } \mathscr{A}_1) -$$

$$- J^{\mu\nu} \text{ (относительно } \mathscr{A}_0) =$$

$$= -b^\mu \int_{\mathscr{S}} T^{\nu\alpha}\, d^3\Sigma_\alpha + b^\nu \int_{\mathscr{S}} T^{\mu\nu}\, d^3\Sigma_\alpha =$$

$$= -b^\mu P^\nu + b^\nu P^\mu,$$



где P^μ — полный 4-импульс.

Г. Собственный момент импульса

а. Перейдем на некоторое время в систему отсчета, где изучаемая физическая система покоится; тогда

$$P^0 = M, \quad P^j = 0, \quad x^j_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int x^j T^{00}\, d^3x \text{ — положение центра масс.}$$

Собственным моментом импульса по определению называется момент импульса относительно произвольного события $(a^0, x^j_{\text{цм}})$ на мировой линии центра масс. Его компоненты обозначаются $S^{\mu\nu}$ и оказываются равными

$$S^{0j} = 0, \qquad S^{jh} = \varepsilon^{jhl} S^l,$$

где

$$[\boldsymbol{S} \equiv \int (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\text{цм}}) \times (\textbf{плотность импульса})\, d^3x \equiv$$

$$\equiv \text{вектор собственного момента импульса.}$$

б. «4-вектором собственного момента импульса» S^μ назовем по определению такой 4-вектор, который в системе покоя имеет компоненты $(0, \boldsymbol{S})$; тогда приведенные выше уравнения дают

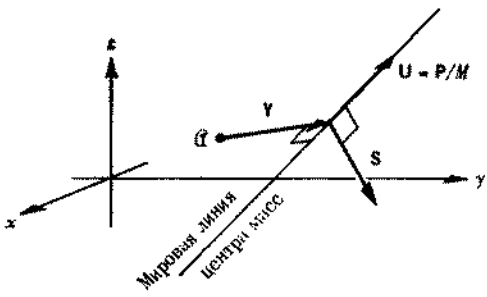
$$S^{\mu\nu} = U_\alpha S_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu},$$

$$U_\beta \equiv P_\beta / M = \text{4-скорость центра масс.}$$

$$U_\beta S^\beta = 0.$$

Д. Разложение момента импульса на собственную и орбитальную составляющие

а. Возьмем произвольное событие $\mathcal{A}$, которое смещено перпендикулярно мировой линии центра масс на величину $-Y^\alpha$, т. е.



$$U_\beta Y^\beta = 0.$$

б. Тогда, согласно пункту В, момент импульса относительно $\mathcal{A}$ равен

$$J^{\mu\nu} = \underbrace{U_\alpha S_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}}_{S^{\mu\nu}\,(\text{собственный})} + \underbrace{Y^\mu P^\nu - Y^\nu P^\mu}_{L^{\mu\nu}\,(\text{орбитальный})}.$$

в. Зная момент импульса относительно $\mathcal{A}$ и 4-импульс (а следовательно, и 4-скорость), можно найти вектор между $\mathcal{A}$ и мировой линией центра масс

$$Y^\mu \equiv -J^{\mu\nu} P_\nu / M^2$$

и собственный момент импульса

$$S_\rho = \frac{1}{2} U^\sigma (J^{\mu\nu} - Y^\mu P^\nu + Y^\nu P^\mu)\, \varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho}.$$

6. УСКОРЕННЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ

В объективном мире ничего не происходит,
в нем все просто существует. Лишь по мере того,
как взор моего сознания скользит вверх по линии жизни
(мировой линии) моего тела,
для меня оживает часть этого мира,
подобно мгновенному изображению в пространстве,
которое непрерывно меняется во времени.

ГЕРМАН ВЕЙЛЬ [113]

§ 6.1. УСКОРЕННЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ МОГУТ БЫТЬ ИЗУЧЕНЫ В РАМКАХ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

При изучении гравитации полезно рассмотреть ситуацию, когда тяготение имитируется ускорением. Сконцентрируем внимание на области, столь далекой от любой материи и столь свободной от возмущений, что (с некоторой предполагаемой степенью точности) пространство-время в ней можно считать плоским и имеющим лоренцеву геометрию. Пусть наблюдатель, либо благодаря привязанным к его ногам ракетным соплам, либо благодаря тому, что он находится в космическом корабле с ракетным двигателем, испытывает ощущение, будто на него действует поле тяготения. Какова будет физика с его точки зрения?

Можем ли мы дать ответ на этот вопрос? Не слишком ли мало мы знаем о физике гравитации на таком раннем этапе ознакомления с книгой, чтобы предсказывать физические эффекты, которые измерит наблюдатель, полагающий, что он находится в гравитационном поле, хотя на самом деле он лишь находится в ускоряющемся космическом корабле? Вовсе нет, специальная теория относительности как раз и была создана, чтобы описывать физику ускоренных объектов,— например, излучение ускоренного заряда. Даже фантастические ускорения

Ускоренное движение и ускоренные наблюдатели могут быть изучены в рамках специальной теории относительности

$$a_{\text{ядерн}} \sim v^2/r \sim 10^{31}\text{см}^2/\text{с}^2 \sim 10^{28} \text{ «земных ускорений»},$$

испытываемые нейтронами в ядрах, и даже еще большие ускорения, встречающиеся при рассеянии частиц высоких энергий,

совершенно точно описываются в рамках специальной теории относительности. Теоретика, который уверенно применяет законы специальной теории относительности к аннигиляции антипротонов и к резонансам странных частиц, не испугают какие-то иллюзии пассажира в ракете, легко поверившего брошюрам, рекламирующим «земное притяжение на всем пути». Пока пространство-время плоское, как бы вы ни двигались, специальная теория относительности справится с задачей. (Она может справиться и с более сложными задачами, см. дополнение 6.1.) *Как* специальная теория относительности справляется с такой задачей, кратко изложено в дополнении 6.2 для читателей, которых интересует лишь курс 1, и которые могут опустить остальную часть главы; это дополнение поможет также и читателям курса 2, для которых оно будет хорошей базой при чтении остального материала главы.

Дополнение 6.1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНА НА ОСНОВЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Турист в разгоняющейся межпланетной ракете ощущает «тяготение». Может ли физик, исходя из локальных эффектов, убедить его, что это «тяготение» мнимое? Нет,— отвечает эйнштейновский принцип локальной эквивалентности тяготения и ускорений. Но тогда физик не сделает ошибки, если будет считать истинное тяготение локальной иллюзией, причиной которой являются ускорения. Находясь в таком заблуждении, он может пойти дальше и решать задачи по гравитации с помощью специальной теории относительности; и если он достаточно искусен и может разбить каждую задачу на совокупность локальных задач, каждая из которых может быть решена при таком заблуждении, то он сможет рассчитать все проявления любого гравитационного поля. При этом необходимо руководствоваться лишь тремя основными принципами: физикой специальной теории относительности, принципом эквивалентности и локальным характером физических законов. Эти принципы просты и понятны. Однако их применение связано с необходимостью решения двоякой проблемы: 1) разбить пространство-время на локально плоские области (где эти принципы применимы) и 2) снова соединить эти области в единую разумную картину. Такое разбиение на области, а затем восстановление цельной картины, неизбежно дающее искривленное динамическое пространство-время, и вывод вытекающих отсюда физических следствий и составляют общую теорию относительности.

Дополнение 6.2. УСКОРЕННЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ (КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ)

Ускоренный наблюдатель может иметь с собой часы и линейки и с их помощью ввести в своей окрестности систему отсчета (систему координат).

Его часы, если они выбраны таким образом, что их структура практически не меняется под действием ускорения (например, атомные часы), будут идти в том же темпе, что и неускоренные часы, движущиеся в данный момент вместе

с наблюдателем:

$$\Delta\tau \equiv \begin{pmatrix}\text{интервал времени отсчитанный часами наблюдателя, когда он продвинулся вдоль своей мировой линии на векторное смещение } \boldsymbol{\xi}\end{pmatrix} = [-\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})]^{1/2}.$$

И его линейки, если они выбраны достаточно жесткими, отмерят те же длины, как и неускоренные линейки, движущиеся вместе с ним. (Более подробное рассмотрение см. в § 16.4 и в дополнениях 16.2 и 16.4.)

Пусть система координат наблюдателя представляет собой декартову решетку из линеек и часов, начало которой всегда находится на его мировой линии. Наблюдатель должен следить, чтобы размеры этой решетки были ограничены:

$$l \equiv \begin{pmatrix}\text{пространственный размер решетки}\end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix}\text{ускорение, измеренное по его акселерометрам}\end{pmatrix}^{-1} \equiv \frac{1}{g}.$$

На расстоянии l от его мировой линии с его решеткой происходят странные явления безразмерной величины gl: например, ускорение, измеряемое акселерометрами, отличается от g на относительную величину $\sim gl$ (упражнение 6.7); часы, первоначально синхронизованные с часами на его мировой линии, выбиваются из ритма (идут с другими скоростями) на относительную величину $\sim gl$ (упражнение 6.6). (Заметим, что ускорению, равному «ускорению земного притяжения», соответствует

$$g^{-1} \sim 10^{-2}\text{с}^2/\text{см} \sim 10^{18}\text{ см} \sim 1\text{ световой год},$$

т. е. условие $l \ll 1/g$, как правило, не накладывает очень жестких ограничений.)

Чтобы установить результаты экспериментов и наблюдений, выполненных ускоренным наблюдателем, их можно сначала исследовать в геометрических терминах, свободных от координат, а затем спроектировать результаты на базисные векторы ускоренной системы. С другой стороны, можно проанализировать эксперименты и наблюдения в лоренцевой системе, а затем преобразовать их в ускоренную систему.

Согласно такого рода анализу, результаты экспериментов, поставленных локально (при $l \ll 1/g$) ускоренным наблюдателем, отличаются от результатов тех же экспериментов, выполненных в лоренцевой системе, лишь в трех отношениях:

1. Имеются непростые отличия относительной величины порядка $gl \ll 1$, о которых упоминалось выше и которые можно сделать пренебрежимо малыми, уменьшив соответствующим образом размеры ускоренной системы отсчета.
2. Имеются силы Кориолиса точно того же типа, что и в ньютоновской теории (упражнение 6.8). Наблюдатель может от них избавиться, если он тщательным образом исключит вращение своей координатной решетки: например, прикрепив ее к гироскопам, которые ускоряются вместе с ним посредством сил, приложенных к центрам масс (нет крутящего момента!). Такая невращающаяся решетка обладает базисными векторами, получающимися

в результате «переноса Ферми — Уолкера» (§ 6.5):

$$\frac{d\mathbf{e}_{\alpha'}}{d\tau} = \mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_{\alpha'}) - \mathbf{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{\alpha'}), \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — 4-скорость, а $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau$ — 4-ускорение.

3. Имеются силы инерции точно того же типа, что и в ньютоновской теории (упражнение 6.8). Они обусловлены ускорением наблюдателя, и от них можно избавиться, лишь прекратив ускорение.

**Остальная часть этой главы относится к курсу 2.
Ее содержание не зависит от предыдущего материала курса 2.
Она нужна в качестве подготовительного материала
1) для математического анализа гироскопов в искривленном пространстве-времени (упражнение 19.2, § 40.7) и
2) для математической теории собственных систем отсчета ускоренного наблюдателя (§ 13.6). Она будет полезна во многих приложениях теории тяготения (гл. 18—40).**

§ 6.2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Приступим к изучению пассажира ракеты, который ощущает «тяготение», поскольку он ускоряется в плоском пространстве-времени. Начнем с описания его движения по отношению к инерциальной системе отсчета. Его 4-скорость удовлетворяет условию $\mathbf{u}^2 = -1$. Фиксированное значение 4-скорости эквивалентно тому, что 4-ускорение

$$\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau \tag{6.1}$$

ортогонально 4-скорости:

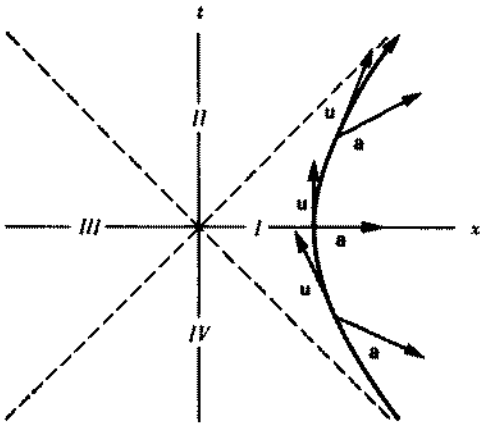
$$0 = (d/d\tau)(-{}^1/_2) = (d/d\tau)\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\right) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}. \tag{6.2}$$

Из этого уравнения следует, что в системе покоя пассажира (в такой лоренцевой системе, где в интересующий нас момент $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$) $a^0 = 0$; в этой системе пространственные компоненты a^μ сводятся к обычному определению ускорения $a^i = d^2x^i/dt^2$. По виду компонент $a^\mu = (0; a^i)$ в системе покоя мы можем сказать, что величина ускорения в системе покоя представляет собой простой инвариант

$$\mathbf{a}^2 = a^\mu a_\mu = (d^2x/dt^2)^2_{\text{измеренное в системе покоя}}.$$

Рассмотрим для простоты наблюдателя, который все время ощущает постоянное ускорение g. Пусть ускорение направлено вдоль оси x^1 некоторой инерциальной системы, а $x^2 = x^3 = 0$. Уравнения движения наблюдателя в этой инерциальной системе принимают вид

$$\frac{dt}{d\tau} = u^0, \quad \frac{dx}{d\tau} = u^1; \quad \frac{du^0}{d\tau} = a^0, \quad \frac{du^1}{d\tau} = a^1. \tag{6.3}$$



ФИГ. 6.1.
Гиперболическое движение. Мировая линия объекта (или наблюдателя), который все время испытывает постоянное ускорение g по отношению к инерциальной системе, сопутствующей в данный момент (в разные моменты эти инерциальные системы разные!). 4-ускорение $\mathbf{a}$ везде ортогонально (лоренцева геометрия!) 4-скорости $\mathbf{u}$.

Запишем три алгебраических уравнения

$$u^\mu u_\mu = -1,$$
$$u^\mu a_\mu = -u^0 a^0 + u^1 a^1 = 0,$$
$$a^\mu a_\mu = g^2.$$

Разрешая их относительно ускорения, находим

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = gu^1, \quad a^1 = \frac{du^1}{d\tau} = gu^0. \tag{6.4}$$

Эти линейные дифференциальные уравнения легко решаются. При соответствующем выборе начала отсчета решение имеет вид

$$t = g^{-1} \operatorname{sh} g\tau, \quad x = g^{-1} \operatorname{ch} g\tau. \tag{6.5}$$

На пространственно-временном чертеже равномерно ускоренный наблюдатель движется по гиперболе

Отметим, что $x^2 - t^2 = g^{-2}$. На пространственно-временном чертеже мировая линия является гиперболой («гиперболическое движение», фиг. 6.1). Некоторые интересные аспекты этого движения рассмотрены в упражнениях. Пусть постоянное ускорение g равно по величине гравитационному ускорению $g = 980$ см/с^2 на поверхности Земли: $g \approx (10^3 \text{ см/с}^2)/(3 \cdot 10^{10} \text{ см/с})^2 = (3 \cdot 10^7 \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с})^{-1} = (1 \text{ световой год})^{-1}$. Таким образом, наблюдатель достигает релятивистских скоростей, поддерживая это ускорение в течение приблизительно года своего собственного времени. Он может опередить фотон, если стартует впереди него на один световой год или более.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Путешествие к ядру Галактики

Найдите собственное время, необходимое пассажирам космического корабля, чтобы преодолеть расстояние $\sim 30\,000$ световых лет от Земли до центра Галактики. Примите, что в первой половине пути они разгоняются с ускорением «земного притяжения» (10^3 см/с^2), а во второй половине — так же замедляются.

6.2. Полезная нагрузка ракеты

Какую долю от начальной массы ракеты может составлять полезная нагрузка в путешествии, рассмотренном в упражнении 6.1? Считайте, что ракета идеальная, т. е. что в ней масса покоя превращается в излучение, которое полностью отбрасывается назад с коэффициентом полезного действия 100% и совершенной системой коллимации.

6.3. Парадокс близнецов

а. Покажите, что из всех времениподобных мировых линий, соединяющих два события $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, наибольший промежуток собственного времени протекает вдоль неускоренной мировой линии. (Указание: проведите выкладки в инерциальной системе, связанной с неускоренной мировой линией.)

б. Один из близнецов предпочитает добираться из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$ вдоль неускоренной мировой линии. Покажите, что другой близнец с помощью соответствующего выбора ускорений может добраться от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ за сколь угодно малое собственное время.

в. За какой наименьший промежуток собственного времени второй близнец может пройти путь от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, если он предпочитает путешествовать с комфортом, когда испытываемое им ускорение нигде не превышает земное ускорение тяжести g? Ответ выразите через g и промежуток собственного времени $\Delta\tau$, протекший у неускоренного близнеца.

г. Получите численные значения результата для нескольких интересных случаев.

6.4. Радиолокационный индикатор скорости

Радиолокационная установка измеряет скорость, испуская сигнал на стандартной частоте и сравнивая эту частоту с частотой сигнала, отраженного от другого объекта. Измеренное таким образом красное смещение затем преобразуется с помощью обычных формул специальной теории относительности в соответствующее значение скорости, которое и появляется на выходе радиолокационной установки. Насколько полезной окажется такая

радиолокационная установка в качестве инструмента для измерения скорости в случае равномерно ускоренного наблюдателя?

а. Рассмотрите эту задачу сначала в частном случае, когда объект и радиолокационная установка покоятся по отношению друг к другу в момент отражения радиолокационного импульса. Определите красное смещение $1 + z = \omega_e/\omega_0$, измеряемое установкой в этом случае, и получающуюся в результате (неправильную) скорость. Упростите выкладки, воспользовавшись симметрией задачи.

б. Рассмотрите теперь ситуацию, когда объект имеет ненулевую скорость в мгновенной системе покоя наблюдателя в момент времени, когда этот объект отражает радиолокационный импульс. Определите отношение истинного значения относительной скорости к скорости, которую показывает радиолокационная установка.

6.5. Радиолокационный индикатор расстояния

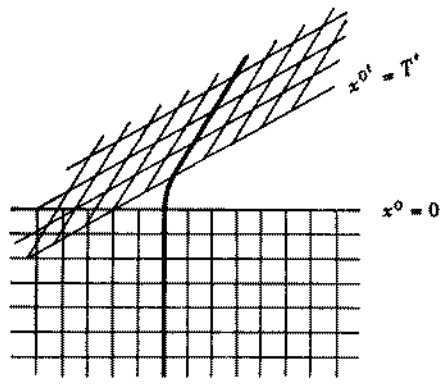
Используем радиолокатор в качестве устройства, измеряющего расстояние. Радиолокационная установка измеряет свое собственное время τ между моментом испускания ею импульса и последующим моментом приема отраженного импульса. Затем выполняется простейшая вычислительная операция $L_0 = \tau/2$, и на выход в качестве «расстояния» подается L_0. Какова точность показаний радиолокационной установки при измерении истинного расстояния L до объекта равномерно ускоренным наблюдателем? (L определяется как расстояние в мгновенной системе покоя наблюдателя в момент отражения импульса, который приходится на середину промежутка собственного времени наблюдателя между испусканием и приемом импульса.) Приведите правильную формулу, связывающую $L_0 \equiv \tau/2$ с истинным расстоянием L. Покажите, что показание радиолокатора L_0 стремится к бесконечности, когда L приближается к g^{-1}, где g — ускорение наблюдателя, измеренное по его собственному акселерометру.

---

§ 6.3. ОГРАНИЧЕНИЯ НА РАЗМЕРЫ УСКОРЕННОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Трудности в построении «системы координат ускоренного наблюдателя»

Очень легко соединить слова в выражении «система координат ускоренного наблюдателя», однако гораздо труднее отыскать понятие, которому оно могло бы соответствовать. Самое разумное, что можно сразу же сказать про это выражение, это то, что при серьезном рассмотрении оно оказывается противоречивым. Можно предположить, что это выражение относится к некоторой особой системе координат, естественным образом связанной с каким-то определенным ускоренным наблюдателем, подобным тому, мировая



ФИГ. 6.2.
Мировая линия наблюдателя, ускорявшегося в течение короткого промежутка времени. На каждом этапе движения с постоянной скоростью можно ввести инерциальную систему координат. Однако эти координаты невозможно согласовать в области перекрытия (которая начинается на расстоянии g^{-1} слева от участка ускорения).

линия которого задается уравнениями (6.5). Если система координат действительно естественна, то можно ожидать, что достаточно искусный наблюдатель сможет определить координаты любого события, посылая и принимая световые сигналы. Но из фиг. 6.1 ясно, что события, составляющие четверть всего пространства-времени (зона III), не могут ни послать световые сигналы к выбранному наблюдателю, ни принять их от него. Две другие зоны, составляющие половину всего пространства-времени, менее ограничены в этом отношении: из зоны II невоаможно послать сигналы к наблюдателю, в зоне IV невозможно принять их от него. Трудно себе представить, как наблюдатель может определить каким-либо естественным образом систему координат, охватывающую события, с которыми у него нет никаких причинных связей, которые он не может увидеть и из которых его нельзя увидеть.

Нарушение связи между наблюдателем и событиями на расстоянии $i_4 > (\text{ускорение})^{-1}$

Трудности возникают и тогда, когда рассматривается наблюдатель, который сначала покоится в некоторой системе, затем в течение некоторого времени ускоряется, после чего движется с постоянной скоростью, т. е. покоится в какой-то другой инерциальной системе координат. Можно ли исходя из его движения определить каким-либо естественным образом систему координат? Если да, то эта система координат 1) должна совпадать с инерциальной системой x^μ, в которой наблюдатель покоился в моменты времени x^0 меньше 0, и 2) должна совпадать с другой инерциальной системой в момент времени $x^{0'} > T'$, когда он покоился уже относительно этой второй системы. Ясно, что нужны какие-то дополнительные соображения, чтобы решить, как определить координаты в областях, где оба эти условия не выполняются (фиг. 6.2).

Однако еще более озадачивает тот факт, что эти два условия несовместимы в той области пространства-времени, где одновременно выполняются неравенства $x^0 < 0$ и $x^{0'} > T'$. В обоих примерах ускоренного движения (фиг. 6.1 и 6.2) серьезные трудности при попытке определить систему координат возникают лишь на конечном расстоянии g^{-1} от мировой линии ускоренного наблюдателя. Проблема явно неразрешима на расстояниях от мировой линии, превышающих g^{-1}. Но она естественным бразом решается в непосредственной окрестности наблюдателя. Это решение известно под названием «ортонормированная тетрада, переносимая переносом Ферми — Уолкера». Основную идею легко проиллюстрировать на примере гиперболического движения, чему и посвящен следующий параграф.

Естественные координаты несовместимы на расстоянии $l >$ (ускорение)$^{-1}$

§ 6.4. ТЕТРАДА, ПЕРЕНОСИМАЯ РАВНОМЕРНО УСКОРЕННЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ

Ортонормированная тетрада базисных векторов, переносимых равномерно ускоренным наблюдателем

Бесконечно малая система координат строится с помощью «тетрады», или «подвижной системы» («подвижного репера» Картана), или совокупности базисных векторов $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ (индекс обозначает номер вектора, а не номер компоненты вектора!). За ось времени примем ось времени сопутствующей инерциальной системы, в которой наблюдатель в данный момент покоится. Тогда нулевой базисный вектор тождественно совпадает с его 4-скоростью: $\mathbf{e}_{0'} = \mathbf{u}$. Преобразования Лоренца в направлении оси 1 не влияют на пространственные оси $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Поэтому выберем в качестве $\mathbf{e}_{2'}$ и $\mathbf{e}_{3'}$ единичные базисные векторы всеобъемлющей лоренцевой системы, по отношению к которой ранее в уравнениях (6.5) описывалось гиперболическое движение наблюдателя: $\mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3$. Оставшийся базисный вектор $\mathbf{e}_{1'}$, ортогональный трем другим, параллелен вектору ускорения: $\mathbf{e}_{1'} = g^{-1}\mathbf{a}$ [см. уравнение (6.4)]. Эту движущуюся систему можно охарактеризовать в более удовлетворительной форме: ось времени $\mathbf{e}_{0'}$ совпадает с 4-скоростью наблюдателя, поэтому в этой системе он всегда покоится; три других вектора $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ выбираются таким образом, чтобы они были 1) ортогональны и 2) не вращались. Эти базисные векторы имеют вид

$$\begin{aligned}
(e_{0'})^\mu &= (\operatorname{ch} g\tau;\ \operatorname{sh} g\tau,\ 0,\ 0);\\
(e_{1'})^\mu &= (\operatorname{sh} g\tau;\ \operatorname{ch} g\tau,\ 0,\ 0);\\
(e_{2'})^\mu &= (0;\ 0,\ 1,\ 0);\\
(e_{3'})^\mu &= (0;\ 0,\ 0,\ 1).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Существует простое правило получения этих четырех базисных векторов. Берем четыре базисных вектора $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ начальной глобальной лоренцевой системы отсчета и применяем к ним простой

буст (преобразование Лоренца с конечным значением скорости) в направлении оси 1 с таким параметром скорости, чтобы вектор $\mathbf{e}_{0'}$ совпал с 4-скоростью наблюдателя. Тот факт, что все эти векторы ортогональны друг другу и имеют единичную длину, формально выражен в соотношении

$$\mathbf{e}_{\mu'} \cdot \mathbf{e}_{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'}. \tag{6.7}$$

§ 6.5. ТЕТРАДА, ПЕРЕНОСИМАЯ ПЕРЕНОСОМ ФЕРМИ — УОЛКЕРА НАБЛЮДАТЕЛЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УСКОРЕНИЕМ

Теперь перейдем от наблюдателя (или объекта), совершающего гиперболическое движение, к наблюдателю (или объекту), ускорение которого, оставаясь всегда конечным, произвольным образом изменяется во времени. Здесь мы тоже наложим на движущуюся бесконечно малую систему отсчета, или тетраду, три условия: 1) базисные векторы тетрады $\mathbf{e}_{\mu'}$ должны быть ортонормированы [соотношение (6.7)], 2) в каждый момент времени базисные векторы должны образовывать систему покоя наблюдателя ($\mathbf{e}_{0'} = \mathbf{u}$) и 3) тетрада должна быть «невращающейся».

Ортонормированная тетрада произвольно ускоренного наблюдателя должна быть «невращающейся»

Последнее условие требует пояснений. Базисные векторы тетрады в каждый момент собственного времени τ должны быть связаны преобразованием Лоренца $\mathbf{e}_{\mu'}(\tau) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}(\tau)\mathbf{e}_{\nu}$ с базисными векторами $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некоторой заданной инерциальной системы. Тогда базисные векторы тетрады в два последовательных момента времени также должны быть связаны друг с другом преобразованием Лоренца. Но преобразование Лоренца можно представить себе как «вращение» в пространстве-времени; 4-скорость $\mathbf{u}$, величина которой всегда равна единице, меняет свое направление. Поэтому уже само понятие ускорения подразумевает «вращение» вектора 4-скорости. Как же тогда следует понимать требование, чтобы тетрада была невращающейся? Потребуем, чтобы от момента к моменту тетрада $\mathbf{e}_{\mu'}(\tau)$ изменялась ровно настолько, насколько этого требует изменение $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{0'}$ без всякого дополнительного произвольного вращения. Другими словами, 1) допустим неизбежное псевдовращение во времениподобной плоскости, определяемой 4-вектором скорости и ускорением, но 2) исключим все обычные повороты трех пространственных векторов.

Термин «невращающаяся» означает наличие вращения лишь во времениподобной плоскости 4-скорости и 4-ускорения

В нерелятивистской физике поворот вектора (компоненты v_i) описывается с помощью вектора мгновенной угловой скорости (компоненты ω_i). Эта угловая скорость появляется в выражении для скорости изменения v_i

$$(dv_i/dt) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j v_k. \tag{6.8}$$

Математическое описание вращения в 3-пространстве

Имея в виду обобщение на четырехмерное пространство-время, полезно представить себе, что вращение происходит в плоскости,

перпендикулярной вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому перепишем (6.8) в виде

$$dv_i/dt = -\Omega_{ik}v_k, \tag{6.9}$$

где

$$\Omega_{jk} = -\Omega_{kj} = \omega_l e_{ljk} \tag{6.10}$$

имеет ненулевые компоненты только в плоскости вращения. Другими словами, полезней говорить о «вращении в (1, 2)-плоскости», чем о вращении вокруг 3-оси. Понятие «плоскости вращения» переносится на случай четырех измерений. Там вращение в (1, 2)-плоскости оставляет неизменной не только компоненту скорости v_3, но также и v_0. Четырехмерное определение вращения имеет вид

Математическое описание вращения в пространстве-времени

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu}v_\nu, \quad \text{где} \quad \Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu}. \tag{6.11}$$

Для проверки справедливости этого определения обобщенного вращения, или бесконечно малого (инфинитезимального) преобразования Лоренца, убедимся, что оно оставляет инвариантной длину 4-вектора:

$$d(v_\mu v^\mu)/d\tau = 2v_\mu (dv^\mu/d\tau) = -2\Omega^{\mu\nu}v_\mu v_\nu = 0. \tag{6.12}$$

Последнее выражение в цепочке равенств равно нулю, так как тензор $\Omega^{\mu\nu}$ антисимметричен, тогда как $v_\mu v_\nu$ симметрично. Отметим также, что антисимметричный тензор $\Omega^{\mu\nu}$ («матрица вращения», «инфинитезимальное преобразование Лоренца») обладает $4 \times 3/2 = 6$ независимыми компонентами. Это число совпадает с числом компонент конечного преобразования Лоренца (три параметра пространственных вращений плюс три параметра компонент буста). В нашем случае «инфинитезимальное преобразование Лоренца» должно: 1) генерировать соответствующее преобразование Лоренца во времениподобной плоскости, натянутой на 4-скорость и 4-ускорение, и 2) исключать вращение в любой другой плоскости, в частности в любой пространственноподобной плоскости. Этим требованиям можно удовлетворить единственным образом с помощью преобразования

$$\Omega^{\mu\nu} = a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu, \text{ т. е. } \Omega = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u}. \tag{6.13}$$

Применим это преобразование вращения к пространственноподобному вектору $\mathbf{w}$, ортогональному $\mathbf{u}$ и $\mathbf{a}$ ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 0$ и $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w} = 0$). Сразу же получаем $\Omega^{\mu\nu}w_\nu = 0$, откуда следует отсутствие пространственного вращения. Теперь проверим правильность нормировки $\Omega^{\mu\nu}$ в уравнении (6.13). Применим инфинитезимальное преобразование Лоренца к вектору 4-скорости наблюдателя $\mathbf{u}$. Для этого подставляем $v^\mu = u^\mu$ в (6.11), откуда получаем

$$du^\mu/d\tau \equiv a^\mu = u^\mu(a^\nu u_\nu) - a^\mu(u^\nu u_\nu) = a^\mu.$$

Этот результат представляет собой тождество, поскольку $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ и $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = 0$.

Закон Ферми — Уолкера переноса «невращающейся тетрады» базисных векторов, перемещающихся с ускоренным наблюдателем

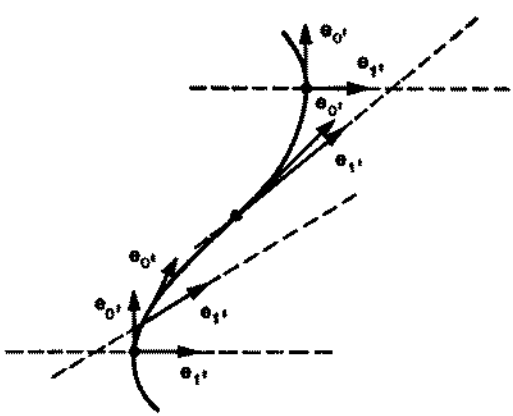
О векторе $\mathbf{v}$, который подвергается действию указанного инфинитезимального преобразования Лоренца

$$dv^\mu/d\tau = (u^\mu a^\nu - u^\nu a^\mu)\, v_\nu, \tag{6.14}$$

говорят, что он испытывает «перенос Ферми — Уолкера» вдоль мировой линии наблюдателя. *Естественная движущаяся система отсчета, связанная с ускоренным наблюдателем, состоит из четырех ортонормированных векторов, каждый из которых испытывает перенос Ферми — Уолкера вдоль мировой линии и одним из которых является* $\mathbf{e}_{0'} = \mathbf{u}$ (4-скорость наблюдателя). На практике перенос Ферми — Уолкера пространственных базисных векторов $\mathbf{e}_{j'}$ можно осуществить, связав их с гироскопами (см. дополнение 6.2 и упражнение 6.9).

§ 6.6. ЛОКАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ УСКОРЕННОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ

Перейдем от этой движущейся, или «бесконечно малой», системы координат к «локальной системе координат», покрывающей конечную область. В таких локальных координатах невозможно избежать всех тех проблем, с которыми пришлось столкнуться при «гиперболическом движении» (фиг. 6.1) и при «движении с коротким участком ускорения» (фиг. 6.2). Поэтому локальную систему координат следует ограничить областью в пределах расстояния g^{-1} от наблюдателя, где эти проблемы не возникают. Фиг. 6.3 иллюстрирует построение локальных координат $\xi^{\mu'}$. В любой за-



ФИГ. 6.3.
Построение пространственноподобных гиперплоскостей (штриховые прямые), ортогональных мировой линии (жирная кривая) ускоренной частицы в избранные моменты на этой мировой линии. Обратите внимание на пересечение гиперплоскостей на расстоянии $g^{-1}(\tau)$ (ускорение зависит от времени!) от мировой линии.

данный момент собственного времени τ наблюдатель находится в определенном событии $\mathcal{P}(\tau)$ на своей мировой линии. Пусть $\mathbf{z}(\tau)$ — вектор, соединяющий начало первоначальной инерциальной системы отсчета с положением наблюдателя $\mathcal{P}(\tau)$. В $\mathcal{P}(\tau)$ наблюдатель располагает тремя пространственноподобными базисными векторами $\mathbf{e}_{1'}(\tau)$, $\mathbf{e}_{2'}(\tau)$, $\mathbf{e}_{3'}(\tau)$. Точка $\mathcal{P}(\tau)$ в совокупности с этими базисными векторами определяет пространственноподобную гиперплоскость. Произвольную точку этой гиперплоскости можно представить в виде

Использование тетрады для построения «локальной системы координат ускоренного наблюдателя»

$$\mathbf{x} = \xi^{1'}\mathbf{e}_{1'}(\tau) + \xi^{2'}\mathbf{e}_{2'}(\tau) + \xi^{3'}\mathbf{e}_{3'}(\tau) + \mathbf{z}(\tau) =$$

$$= (\text{вектор из начала первоначальной инерциальной системы}). \quad (6.15)$$

Здесь три числа $\xi^{k'}$ играют роль эвклидовых координат на гиперплоскости. По мере течения собственного времени эта гиперплоскость перемещается вперед. Рано или поздно гиперплоскость пересечет событие $\mathcal{P}_0$, которому мы хотим приписать координаты. *В качестве координат этого события зададим числа* $\xi^{0'} = \tau$ *и* $\xi^{k'}$, *определяемые из* (6.15). *Назовем эти четыре числа «координатами по отношению к ускоренному наблюдателю».* Четыре координаты определяются из четырех уравнений

$$x^\mu = \xi^{k'}\,[e_{k'}(\tau)]^\mu + z^\mu(\tau), \quad (6.16)$$

в которых x^μ считаются известными, а координаты τ, $\xi^{k'}$ — неизвестными.

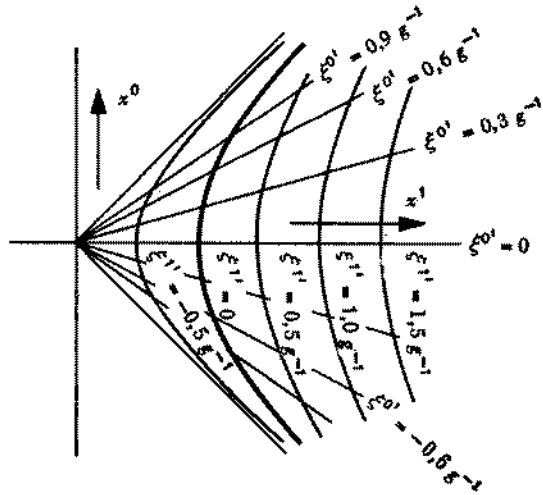
На некотором расстоянии от ускоренной мировой линии пространственноподобные гиперплоскости, взятые в последовательные моменты времени, вместо того, чтобы перемещаться вперед с ростом τ, движутся в обратном направлении. На этом и на бо́льших расстояниях, понятие «координат по отношению к ускоренному наблюдателю» становится неоднозначным, и от него следует отказаться. Чтобы определить это расстояние, заметим, что любой, достаточно короткий участок мировой линии можно аппроксимировать гиперболой («гиперболическим движением с ускорением g»), где зависящее от времени ускорение $g(\tau)$ задается соотношением $g^2 = a^\mu a_\mu$.

Применим сформулированное выше общее правило к гиперболическому движению; в результате получим уравнения

Локальная система координат равномерно ускоренного наблюдателя

$$\begin{aligned} x^0 &= (g^{-1} + \xi^{1'})\,\mathrm{sh}\,(g\xi^{0'}), \\ x^1 &= (g^{-1} + \xi^{1'})\,\mathrm{ch}\,(g\xi^{0'}), \\ x^2 &= \xi^2, \\ x^3 &= \xi^3. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Поверхности постоянных значений $\xi^{0'}$ представляют собой гиперплоскости $x^0/x^1 = \mathrm{th}\, g\xi^{0'}$, показанные на фиг. 6.4. Подставляя выражения (6.17) в формулу Минковского для линейного элемента,



ФИГ. 6.4.
Локальная система координат, связанная с наблюдателем, находящимся в состоянии гиперболического движения (жирная мировая линия). Локальная система координат становится неприемлемой при $\xi^{1'}$ меньших, чем $-g^{-1}$.

получаем

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu = -(1+g\xi^{1'})^2(d\xi^{0'})^2 + (d\xi^{1'})^2 + (d\xi^{2'})^2 + (d\xi^{3'})^2. \tag{6.18}$$

Коэффициенты при $d\xi^{\mu'}\,d\xi^{\nu'}$ в этом выражении не совпадают с обычными лоренцевыми компонентами метрики. И понятно почему: величины $\xi^{\mu'}$ не образуют инерциальной системы координат. Однако в том месте, где расположен наблюдатель, $\xi^{1'} = 0$, и коэффициенты приобретают обычный вид. Следовательно, эти «локальные координаты» аппроксимируют лоренцеву систему координат в непосредственной окрестности наблюдателя.

УПРАЖНЕНИЯ

6.6. Сопоставление хода часов и координатного времени в ускоренных координатах

Предположим, что в каждом узле решетки $(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'}) = \text{const}$ локальной системы координат ускоренного наблюдателя находятся часы. Для простоты будем считать, что наблюдатель совершает гиперболическое движение. Используя выражение (6.18), покажите, что собственное время, измеренное по часам решетки, отличается от координатного времени в той точке решетки, где находятся часы:

$$d\tau/d\xi^{0'} = 1 + g\xi^{1'}.$$

(Вблизи наблюдателя, при $\xi^{1'} \ll g^{-1}$, это отличие, конечно, пренебрежимо мало.)

6.7. Ускорение точек решетки в ускоренных координатах

Допустим, что в каждой точке решетки локальных координат наблюдателя в состоянии гиперболического движения находится акселерометр. Найдите величину ускорения, которое покажет акселерометр в точке $(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'})$.

6.8. Наблюдатель с вращающейся тетрадой

Наблюдатель, движущийся вдоль произвольно ускоренной мировой линии, выбирает для своей ортонормированной тетрады перенос, отличный от переноса Ферми — Уолкера: он допускает вращение тетрады. Антисимметричный тензор вращения $\boldsymbol{\Omega}$, который входит в закон переноса, используемый наблюдателем,

$$d\mathbf{e}_{\alpha'}/d\tau = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_{\alpha'} \tag{6.19}$$

расщепляется на составляющую Ферми — Уолкера и составляющую, соответствующую пространственному вращению:

$$\Omega^{\mu\nu} = \underbrace{a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu}_{\Omega^{\mu\nu}_{\Phi У}} + \underbrace{u_\alpha \omega_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}}_{\Omega^{\mu\nu}_{пв}} \tag{6.20}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор, ортогональный 4-скорости $\mathbf{u}$.

а. Наблюдатель выбирает в качестве своего временно́го базисного вектора $\mathbf{e}_{0'} = \mathbf{u}$. Покажите, что этот выбор не противоречит закону переноса (6.19), (6.20).

б. Покажите, что поворот, описываемый $\Omega^{\mu\nu}_{пв}$, происходит в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$, т. е.

$$\boldsymbol{\Omega}_{пв}\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \boldsymbol{\Omega}_{пв}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0. \tag{6.21}$$

в. Предположим, что с ускоренным наблюдателем связана вторая ортонормированная тетрада $\mathbf{e}_{\alpha''}$, которая испытывает перенос Ферми — Уолкера. Покажите, что пространственные векторы его первой тетрады вращаются по отношению к пространственным векторам второй тетрады с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. *Указание.* Покажите, что в момент, когда тетрады совпадают (в трехмерных обозначениях, относящихся к 3-пространству, ортогональному мировой линии наблюдателя):

$$d(\mathbf{e}_{j'} - \mathbf{e}_{j''})/d\tau = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_{j'}\,. \tag{6.22}$$

г. Используя для вращающейся тетрады то же правило, что и для тетрады Ферми — Уолкера уравнения (6.16)], наблюдатель вводит локальные координаты. Возьмем событие $\mathscr{Q}$ на мировой линии наблюдателя, положим в нем $\tau = 0$ и выберем первоначальную инерциальную систему, фигурирующую в (6.16), таким образом, чтобы 1) она сопутствовала ускоренному наблюдателю в $\mathscr{Q}$, 2) событие $\mathscr{Q}$ служило ее началом и 3) ее оси совпадали с уско-

УПРАЖНЕНИЯ

ренными осями в $\mathcal{Q}$. Покажите, что эти условия записываются в виде

$$x^{\mu}(0)=0, \quad \mathbf{e}_{\alpha'}(0)=\mathbf{e}_{\alpha}. \tag{6.23}$$

д. Покажите, что вблизи $\mathcal{Q}$ уравнения (6.16) для вращающейся ускоренной системы координат сводятся к

$$\begin{aligned} x^0 &= \xi^{0'}+a_{k'}\xi^{k'}\xi^{0'}+O\left([\xi^{\alpha'}]^3\right); \\ x^j &= \xi^{j'}+\frac{1}{2}a^j[\xi^{0'}]^2+\varepsilon^{jkl}\omega^k\xi^{l'}\xi^{0'}+O\left([\xi^{\alpha'}]^3\right). \end{aligned} \tag{6.24}$$

е. Через событие $\mathcal{Q}$ пролетает частица, свободно движущаяся с обычной скоростью v, измеренной в инерциальной системе. Преобразовав ее прямую мировую линию $x^j = v^j x^0$ к ускоренным вращающимся координатам, покажите, что ее координатная скорость и ускорение получаются при этом равными

$$\begin{aligned} (d\xi^{j'}/d\xi^{0'})_{\text{в }\mathcal{Q}} &= v^j, \\ (d^2\xi^{j'}/d\xi^{0'2})_{\text{в }\mathcal{Q}} &= \underbrace{-a^j}_{\text{ускорение инерции}} \underbrace{-2\varepsilon^{jkl}\omega^k v^l}_{\text{ускорение Кориолиса}} \underbrace{+2v^j a^k v^k}_{\text{релятивистская поправка к ускорению инерции}}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

6.9. Прецессия Томаса

Рассмотрим вращающееся тело (гироскоп, электрон, ...), которое ускоряется под действием сил, приложенных к его центру масс. Такие силы не дают крутящего момента, поэтому они не изменяют вектор $\mathbf{S}$ собственного момента импульса тела, если исключить единственное вращение в плоскости $\mathbf{u} \wedge \mathbf{a}$, необходимое для сохранения ортогональности $\mathbf{S}$ и 4-скорости $\mathbf{u}$. Выражаясь математическим языком, момент импульса тела переносится в соответствии с правилом переноса Ферми — Уолкера (в любой плоскости, отличной от $\mathbf{u} \wedge \mathbf{a}$, вращение отсутствует):

$$d\mathbf{S}/d\tau = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{a})\cdot\mathbf{S}. \tag{6.26}$$

Этот закон переноса применим к вращающемуся электрону, движущемуся по круговой орбите радиуса r вокруг атомного ядра. Для наблюдателя из лабораторной системы электрон движется в плоскости x, y с постоянной угловой скоростью ω. В момент времени $t = 0$ электрон находится в $x = r$, $y = 0$, а его спин (в классическом рассмотрении) имеет компоненты

$$S^0=0, \quad S^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar, \quad S^y=0, \quad S^z=\frac{1}{2}\hbar.$$

Найдите $S^{\mu}(t)$ — поведение спина в последующие моменты лабораторного времени. *Ответ*:

$$\begin{aligned} S^x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\,(\cos\omega t\cos\omega\gamma t+\gamma\sin\omega t\sin\omega\gamma t),\\ S^y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\,(\sin\omega t\cos\omega\gamma t-\gamma\cos\omega t\sin\omega\gamma t),\\ S^z &= \frac{1}{2}\hbar,\quad S^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar v\gamma\sin\omega\gamma t,\\ v &= \omega r,\quad \gamma=(1-v^2)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Перепишем зависящую от времени пространственную часть этих выражений в виде

$$S^x+iS^y=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[e^{-i(\gamma-1)\omega t}+i(1-\gamma)\sin(\omega\gamma t)\,e^{i\omega t}\right]. \tag{6.28}$$

Первый член описывает равномерное вращение в обратном направлении с угловой скоростью

$$\omega_{\text{Томаса}}=(\gamma-1)\,\omega\approx\frac{1}{2}v^2\omega\ll\omega,\ \text{если}\ v\ll 1. \tag{6.29}$$

Это вращение носит название прецессии Томаса. Второй член описывает вращение в правую сторону на одном участке орбиты ($0<\omega\gamma t<\pi$) и в левую сторону на остальном ее участке ($\pi<\omega\gamma t<2\pi$). При усреднении по времени оно исчезает. Более того, в атоме оно чрезвычайно мало ($\gamma-1\ll 1$). Это вращение, наложенное на прецессию Томаса, должно присутствовать, чтобы выполнялись условия

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}=S\cdot u-S^0u^0=0 \tag{6.30}$$

и

$$\mathbf{S}^2=S^2-(S^0)^2=3\hbar^2/4=\text{const}. \tag{6.31}$$

Оно происходит в правую сторону, когда $S\cdot u$ отрицательно, обращается в нуль при $S\cdot u=0$ и вновь появляется, но уже в левую сторону, когда $S\cdot u$ становится положительным.

Прецессию Томаса можно также истолковать как пространственное вращение, получающееся в результате целого ряда последовательных бустов в мало отличающихся направлениях. (См., например, упражнение 103 в книге [81].) Другой вывод прецессии Томаса (6.29) из «спинорного формализма» см. в § 41.4.

2

7. НЕСОВМЕСТИМОСТЬ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**Эта глава целиком относится к курсу 2.
Ее содержание не зависит от предыдущего материала курса 2.
Она не нужна в качестве подготовительного материала для какой-либо из последующих глав, однако пригодится при изучении гл. 18 (слабые гравитационные поля), а также гл. 38 и 39 (экспериментальные тесты и другие теории гравитации).**

§ 7.1. ПОПЫТКИ ОБЪЕДИНИТЬ ТЕОРИЮ ТЯГОТЕНИЯ И СПЕЦИАЛЬНУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

До сих пор при обсуждении специальной теории относительности последовательно предполагалось, что гравитационные поля отсутствуют. Почему мы должны отказаться от рассмотрения тяготения в специальной теории относительности? Эта глава посвящена трудностям, возникающим в основах специальной теории относительности при попытке учесть в ней гравитационные поля. Только при столкновении с этими трудностями можно в полной мере оценить методы геометрии искривленного пространства-времени, введенные Эйнштейном для их преодоления.

Начнем с того, что нам уже известно о тяготении,— с ньютоновской формулировки его законов:

$$d^2x^i/dt^2 = -\partial\Phi/\partial x^i, \tag{7.1}$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \tag{7.2}$$

Ньютоновские законы тяготения должны быть модифицированы и четырехмерной геометрической форме

Эти уравнения в той форме, как они здесь написаны, нельзя включить в специальную теорию относительности. Уравнение движения частицы (7.1) записано в трехмерной, а не в четырехмерной форме; его надо преобразовать в четырехмерное векторное уравнение для $d^2x^\mu/d\tau^2$. Подобным же образом уравнение поля (7.2) не лоренц-инвариантно: в нем вместо четырехмерного оператора д'Аламбера стоит трехмерный оператор Лапласа, а это означает, что потенциал Φ в данной точке мгновенно «откликается» на изменения плотности ρ, которые происходят как угодно далеко.

Короче говоря, ньютоновские гравитационные поля распространяются с бесконечной скоростью.

Столкнувшись с этими трудностями впервые, можно подумать, что их довольно просто преодолеть. В упражнениях в конце этого параграфа изучаются некоторые относительно простые обобщения уравнений (7.1) и (7.2), когда гравитационный потенциал Ф берется сначала в виде скалярного, затем в виде векторного и, наконец, симметричного тензорного полей. В каждой из этих теорий есть существенные недостатки, и ни одна из них не согласуется с наблюдениями. Наилучшей из них является тензорная теория (упражнение 7.3, дополнение 7.1), которая, однако, внутренне противоречива и не допускает точных решений. Сравнительно недавно многие авторы [114—121] пытались преодолеть это затруднение. Они показали, как можно модифицировать тензорную теорию для плоского пространства в духе современной релятивистской теории поля, чтобы избежать этих противоречий. Методы теории поля в данном случае (раздел 5 дополнения 17.2) однозначно приводят к классической общей теории относительности, сформулированной в 1915 г. Только получив этот результат, осознаешь, наконец,— уже из математической формы уравнений,— что теория, которая сначала представлялась как теория тяготения в плоском пространстве, является на самом деле теорией Эйнштейна, где кривизна пространства-времени проявляется в виде тяготения. В этой книге мы будем следовать ходу рассуждений Эйнштейна, поскольку при этом на передний план выступает физика.

Ни одна из простых модификаций не является удовлетворительной

Наилучшая модификация (тензорная теория в плоском пространстве) внутренне противоречива; если ее исправить, то получится общая теория относительности

Упражнения по гравитационным теориям в плоском пространстве-времени

УПРАЖНЕНИЯ

Три следующих упражнения являются серьезным испытанием. К счастью, методы решения всех трех подобны, а решение наиболее трудного из них (упражнения 7.3) приведено в дополнении 7.1. Поэтому разумно поступить следующим образом. а. Возьмитесь либо за упражнение 7.1 (скалярная теория тяготения), либо за упражнение 7.2 (векторная теория тяготения). Если возникают трудности, просмотрите бегло, не вдаваясь в детали, упражнение 7.3 и дополнение 7.1 (тензорная теория тяготения) только для того, чтобы наметить схему и метод решения. б. Ознакомьтесь с результатами другого упражнения (7.2 или 7.1), обсудив его с кем-либо, кто детально его проработал. в. Тщательно изучите приведенное в дополнении 7.1 решение упражнения 7.3 и сравните его с результатами, полученными для двух других теорий. г. Развивайте свои способности к выкладкам, проверяя частично подробные вычисления в дополнении 7.1.

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Скалярное гравитационное поле Ф

А. Рассмотрите вариационный принцип $\delta I = 0$, где

$$I = -m \int e^{\Phi} \left(-\eta_{\alpha\beta} \frac{dz^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dz^{\beta}}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \tag{7.3}$$

Здесь m — масса покоя, а $z^{\alpha}(\lambda)$ — параметрическое задание мировой линии пробной частицы в скалярном гравитационном поле Ф. Варьируя мировую линию частицы, выведите дифференциальные уравнения, описывающие движение этой частицы. Запишите их, используя в качестве параметра для траектории собственное время частицы

$$d\tau = \left(-\eta_{\alpha\beta} \frac{dz^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dz^{\beta}}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda,$$

так что $u^{\alpha} = dz^{\alpha}/d\tau$ удовлетворяет условию $u^{\alpha}u^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = -1$.

Б. Получите уравнение поля для Ф ($\mathbf{x}$), вытекающее из вариационного принципа $\delta I = 0$, где $I = \int \mathscr{L}\, d^4x$, а

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{8\pi G} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\beta}} - \int m e^{\Phi} \delta^4 [\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)]\, d\tau. \tag{7.4}$$

Покажите, что второй член здесь приводит к тому же интегралу, который фигурирует в пункте А [уравнение (7.3)].

Обсуждение. Полученные уравнения поля описывают генерацию скалярного поля одиночной частицей массы m. Если имеется много частиц, то для каждой из них надо включить в $\mathscr{L}$ член $-\int m e^{\Phi} \delta^4 [\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)]\, d\tau$.

В. Решите уравнение поля пункта Б в предположении, что источником является лишь одна покоящаяся частица. Предположите также, что равенство $e^{\Phi} = 1$ является хорошим приближением в окрестности частицы. Используя полученное решение, проверьте это предположение, т. е. найдите из вашего решения значение e^{Φ} на поверхности Земли. (Везде используется система единиц, в которой $c = 1$; при желании можно положить также $G = 1$.)

Г. Рассмотрите теперь статическое, сферически симметричное поле Ф, полученное в пункте В, как поле Солнца, которое является заданным внешним полем в вариационном принципе пункта А, и изучите движение планеты, определяемое этим вариационным принципом. Интегралы движения определяются из сферической симметрии и независимости от времени подынтегрального выражения. Используйте сферические координаты и считайте, что движение происходит в одной плоскости. Выведите формулу для прецессии перигелия планеты.

Д. В уравнениях движения пункта А перейдите к пределу частицы с нулевой массой покоя. Для этого используйте параметр λ, отличный от собственного времени и выбранный таким образом, что $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ есть вектор энергии-импульса, и перейдите к пределу $m \to 0$, оставляя величину $k^0 = \gamma m = E$ конечной (тогда $u^0 = \gamma \to \infty$). Исходя из полученных уравнений, покажите, что величины $q^\mu = k^\mu e^\Phi$ являются интегралами движения, откуда сделайте вывод, что в данной скалярной теории луч света не отклоняется полем тяготения Солнца.

7.2. Векторное гравитационное поле Φ_μ

А. Убедитесь, что вариационный принцип $\delta I = 0$ приводит к уравнениям Максвелла при варьировании A_μ и к выражению для силы Лоренца при варьировании $z^\mu(\tau)$, если

$$I = \frac{-1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x + \frac{1}{2}m\int \frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau + e\int \frac{dz^\mu}{d\tau}A_\mu(z)\,d\tau. \tag{7.5}$$

Здесь $F_{\mu\nu}$ — сокращенное обозначение для $A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. *Указание.* Чтобы проварьировать $A_\mu(\mathbf{x})$, перепишите последний член в виде интеграла по пространству-времени, введя для этого дельта-функцию $\delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)]$ подобно тому, как это сделано в пунктах А и Б упражнения 7.1.

Б. Аналогично предыдущему дайте определение векторного гравитационного поля Φ_μ с $G_{\mu\nu} \equiv \Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}$, используя вариационный принцип, где

$$I = +\frac{1}{16\pi G}\int G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}d^4x + \frac{1}{2}m\int \frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau + m\int \Phi_\mu \frac{dz^\mu}{d\tau}d\tau. \tag{7.6}$$

Примечание: Если имеется много частиц, то для каждой частицы нужно добавить к I члены вида $\frac{1}{2}m\int (dz^\mu/d\tau)(dz_\mu/d\tau)\,d\tau + m\int \Phi_\mu (dz^\mu/d\tau)\,d\tau$.] Получите выражение для «закона Кулона» в этой теории и убедитесь, что коэффициенты перед слагаемыми в вариационном принципе выбраны правильно.

В. Рассчитайте прецессию перигелия в этой теории.

Г. Рассчитайте для этой теории отклонение луча света (т. е. рассеяние ультрарелятивистской частицы $u^0 = \gamma \to \infty$) при прохождении его около Солнца, обусловленное полем тяготения Солнца Φ_μ.

Д. Получите выражение для полной энергии поля, которая соответствует лагранжиану, введенному неявно в пункте Б. Используйте обычную для гамильтоновой механики процедуру,

когда

$$I_{\text{поля}} = \frac{1}{16\pi G}\int G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}d^4x \equiv \int \mathscr{L}d^4x;$$

$\mathscr{L}$ — плотность функции Лагранжа, $L \equiv \int \mathscr{L}d^3x$ — функция Лагранжа. Соответствующая плотность функции Гамильтона (плотность энергии) имеет вид

$$\mathscr{H} \equiv \sum_{\mu} \Phi_{\mu,0}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_{\mu,0}} - \mathscr{L}.$$

Покажите, что волны векторного гравитационного поля переносят отрицательную энергию.

7.3. Симметричное тензорное гравитационное поле $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$

В этом случае, как и в случае векторного поля, принцип наименьшего действия записывается в виде $\delta I = 0$, где $I = I_{\text{поля}} + I_{\text{частицы}} + I_{\text{взаимодействия}}$. Здесь $I_{\text{частицы}}$ имеет тот же вид, что и в случае векторного поля:

$$I_{\text{частицы}} = \frac{1}{2}m\int \frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau, \tag{7.7}$$

но $I_{\text{поля}}$ и $I_{\text{взаимодействия}}$ уже другие:

$$I_{\text{поля}} = \int \mathscr{L}_f d^4x, \tag{7.8а}$$

$$\mathscr{L}_f = \frac{-1}{32\pi G}\left(\frac{1}{2}h_{\nu\beta,\,\alpha}\bar{h}^{\nu\beta,\,\alpha} - \bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\,\beta}\right) \tag{7.8б}$$

(одно h здесь не есть $\bar{h}$), где

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma}; \tag{7.8в}$$

$$I_{\text{взаимодействия}} = \frac{1}{2}\int h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}d^4x. \tag{7.9}$$

Здесь $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса всего присутствующего вещества и всех полей, отличных от гравитационного. Для совокупности точечных частиц (используемых на протяжении всего этого упражнения)

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \int m\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)]\,d\tau. \tag{7.10}$$

А. Получите уравнения движения частицы, варьируя $z^\mu(\tau)$ в $\delta(I_{\text{частицы}} + I_{\text{взаимодействия}}) = 0$. Полученный результат выразите с помощью «поля силы тяготения»

$$\Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\,\beta} + h_{\nu\beta,\,\alpha} - h_{\alpha\beta,\,\nu}), \tag{7.11}$$

полученного из тензорного гравитационного потенциала $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$.

Б. Получите уравнения поля из $\delta(I_{\text{поля}} + I_{\text{взаимодействия}}) = 0$; выразите их через

$$-H^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv \overline{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \overline{h}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - \overline{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \overline{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}. \tag{7.12}$$

Рассмотрите калибровочную инвариантность и условие $\overline{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$.

В. Найдите тензорный гравитационный потенциал Солнца (считая его точечной массой) $h_{\mu\nu}$.

Г. Рассчитайте прецессию перигелия.

Д. Рассчитайте отклонение луча света.

Е. Рассмотрите гравитационную волну

$$\overline{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha). \tag{7.13}$$

Какие условия накладывают уравнения поля? Условие калибровки

$$\overline{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0? \tag{7.14}$$

Покажите, что с помощью дополнительных преобразований калибровки

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}, \tag{7.15}$$

сохраняющих ограничение $\overline{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$, можно наложить дополнительные условия

$$u_\alpha \overline{h}^{\alpha\mu} = 0, \quad \overline{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = 0, \tag{7.16}$$

где u^α — фиксированный времениподобный вектор. Достаточно рассмотреть лишь случай, который реализуется при подходящем выборе системы отсчета, где $u^\alpha = (1; 0, 0, 0)$ и $k^\alpha = (\omega; 0, 0, \omega)$.

Ж. Исходя из плотности гамильтониана

$$\mathscr{H} \equiv \dot{h}_{\mu\nu}(\partial\mathscr{L}/\partial\dot{h}_{\mu\nu}) - \mathscr{L} \tag{7.17}$$

для поля, покажите, что плотность энергии волн, рассмотренных в пункте Е, положительна.

З. Найдите значение $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ для тензора энергии-импульса частиц $T^{\mu\nu}$, который входит в интеграл действия I. Равно ли $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ нулю (например, для Земли, движущейся по орбите вокруг Солнца)? Почему? Покажите, что объединенная система уравнений для полей и частиц, полученная из условия $\delta I = 0$, не имеет решений.

Дополнение 7.1. ПОПЫТКА ОПИСАТЬ ГРАВИТАЦИЮ С ПОМОЩЬЮ ПОЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ (РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЯ 7.3)

Попытки описать гравитацию в рамках специальной теории относительности естественно было бы начать с рассмотрения случаев, когда гравитационное поле является скалярным (упражнение 7.1), как в ньютоновской теории, или вектор-

ным (упражнение 7.2) по аналогии с электромагнетизмом. И лишь удостоверившись в непригодности обеих теорий (например, отсутствие отклонения лучей света в них; отрицательная энергия волн в векторной теории), приходится обратиться к гравитационному потенциалу в виде симметричного тензора $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ с бо́льшим числом индексов и более сложными выкладками.

Основы наиболее удовлетворительной из всех тензорных теорий тяготения в плоском пространстве-времени изложены в начале упражнения 7.3. Сделанный там выбор лагранжиана [выражения (7.8)] продиктован условиями, чтобы $h_{\mu\nu}$ было «лоренц-ковариантным полем со спином два и массой нуль». Смысл этих условий и методы специальной теории относительности, с помощью которых их можно перевести в совокупность уравнений поля, изложены в обычных пособиях по физике элементарных частиц и квантовой теории поля; см., например, [119, 122, 123]. Фирц и Паули [124] впервые написали этот лагранжиан и исследовали вытекающую из него теорию. Выводы этой теории изложены ниже в виде решения упражнения 7.3.

А. Уравнение движения пробной частицы (упражнение 7.3, А)

Выполним интегрирование в уравнении (7.9), пользуясь тензором энергии-импульса частицы, задаваемым выражением (7.10); в результате получаем

$$I_{\text{ч+вз}} \equiv I_{\text{частицы}} + I_{\text{взаимодействия}} = \frac{1}{2} m \int (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \dot{z}^{\mu} \dot{z}^{\nu} \, d\tau, \tag{1}$$

где

$$\dot{z}^{\mu} \equiv dz^{\mu}/d\tau.$$

Затем находим $\delta I_{\text{ч+вз}}$ и убеждаемся, что коэффициент при произвольной вариации траектории δz^{μ} равен нулю тогда и только тогда, когда

$$(d/d\tau)[(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \dot{z}^{\nu}] - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\,\mu} \dot{z}^{\alpha} \dot{z}^{\beta} = 0.$$

Переписываем это уравнение движения в виде

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \ddot{z}^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha\beta} \dot{z}^{\alpha} \dot{z}^{\beta} = 0, \tag{2}$$

где $\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ определяются выражением (7.11).

Б. Уравнения поля (упражнение 7.3, Б)

Используем $I_{\text{поля}}$ и $I_{\text{взаимодействия}}$ в виде, задаваемом выражениями (7.8) и (7.9); однако в целях более быстрого и менее запутанного вывода *не* будем привлекать обычных уравнений Эйлера — Лагранжа. Вместо этого прямо находим изменение $\delta \mathscr{L}_f$ в первом порядке, обусловленное малой вариацией поля $\delta h_{\alpha\beta}$. Относительно второго члена в $\mathscr{L}_f$ можно сразу сказать (при соответствующем обозначении немых индексов), что варьирование каждого из множителей приведет к одному и тому же результату; следовательно, два слагаемых, образующихся при варьировании произведения, объединяются:

$$\delta\left(\overline{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha} \overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\right) = 2\overline{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta} \delta \overline{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}.$$

Подобный результат можно получить и для первого члена в $\mathscr{L}_f$, если принять во внимание тождество $a_{\mu\nu}\bar{b}^{\mu\nu} = \bar{a}_{\mu\nu}b^{\mu\nu}$, которое имеет место для операции, определенной в (7.8); каждая сторона тождества равна $\alpha_{\mu\nu}b^{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^{\mu}{}_{\mu}b^{\nu}{}_{\nu}$. Тогда

$$-(32\pi G)\,\delta\mathscr{L}_f = \bar{h}^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta,\alpha} - 2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}. \tag{3}$$

Используем затем это выражение в $\delta I_{\text{поля}}$ и, извлекая $\delta h_{\mu\nu}$ из-под знака производной с помощью интегрирования по частям, получаем

$$\delta I_{\text{поля}} = (32\pi G)^{-1}\int [\bar{h}^{\nu\beta,\alpha}{}_{,\alpha}\delta h_{\nu\beta} - 2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}{}^{,\alpha}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}]\,d^4x.$$

Чтобы найти в этом выражении коэффициент при $\delta h_{\mu\nu}$, воспользуемся соотношением [вытекающим из (7.8в)]

$$\delta\bar{h}_{\alpha\beta} = (\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu})\,\delta h_{\mu\nu};$$

переставляя и переобозначая немые индексы (по которым производится суммирование), имеем

$$\delta I_{\text{поля}} = (32\pi G)^{-1}\int [\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{,\alpha} - 2\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\nu} + \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}]\,\delta h_{\mu\nu}d^4x.$$

Складывая это выражение с $\delta I_{\text{взаимодействия}} = \frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu}\,d^4x$ и используя симметрию $\delta h_{\mu\nu} = \delta h_{\nu\mu}$, получаем

$$-\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{,\alpha} - \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\nu} + \bar{h}^{\nu\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\mu} = 16\pi G T^{\mu\nu}. \tag{4}$$

Определение, данное в (7.12), позволяет нам переписать это соотношение в виде

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi G T^{\mu\nu}. \tag{4'}$$

Б′. Калибровочная инвариантность (продолжение упражнения 7.3, Б)

Из соотношений симметрии

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} = H^{[\mu\alpha][\nu\beta]} = H^{\nu\beta\mu\alpha}$$

для $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ вытекает тождество

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta\nu} = H^{\mu\alpha[\nu\beta]}{}_{,\alpha(\beta\nu)} \equiv 0,$$

аналогичное тождеству $F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} \equiv 0$ в электромагнетизме.

Таким образом, для источников требуется выполнение условия $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, точно так же, как в электромагнетизме требуется выполнение условия $J^{\mu}{}_{,\mu} = 0$ (упражнение 3.16). Эти тождества приводят к тому, что из уравнения поля (4′) нельзя полностью определить $h_{\mu\nu}$. В частности, непосредственной подстановкой в уравнения (4) нетрудно убедиться, что к любому решению можно добавить калибровочное поле

$$\begin{aligned} h^{\text{калибровки}}_{\mu\nu} &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}, \\ \bar{h}^{\text{калибровки}}_{\mu\nu} &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}, \end{aligned} \tag{5}$$

не изменяя при этом $T^{\mu\nu}$.

Пусть ξ_μ обращаются в нуль вне некоторого конечного пространственно-временного объема, а в остальном произвольны. Тогда $h_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\text{калибровки}}$ оба удовлетворяют уравнению источников (4) при одном и том же источнике $T^{\mu\nu}$ и одних и тех же граничных условиях на бесконечности. Естественно ожидать поэтому, что они физически эквивалентны.

Выбирая определенную калибровку аналогично «лоренцеву» выбору $A^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ в электромагнетизме [уравнение (3.58а), упражнение 3.17], налагаем условие

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \tag{6}$$

При этом уравнения поля (4) принимают простой вид

$$\Box \bar{h}^{\mu\nu} \equiv \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{,\alpha} = -16\pi T^{\mu\nu} \tag{7}$$

(см. упражнение 18.2). Здесь и ниже мы полагаем $G = 1$ («геометрические единицы»).

В. Поле точечной массы (упражнение 7.3, В)

В случае статического источника волновое уравнение (7) сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}.$$

Тензор энергии-импульса для статической точечной массы [выражение (7.10)] есть $T^{00} = M\delta^3(x)$ и $T^{\mu k} = 0$. Подставляем его в уравнение Лапласа, решая которое, находим $\bar{h}_{\mu\nu}$, а затем, использовав соотношение (7.8в), получаем $h_{\mu\nu}$. В результате имеем

$$h_{00} = 2M/r, \quad h_{0k} = 0, \quad h_{ik} = \delta_{ik}(2M/r) \tag{8}$$

[см. уравнение (18.15а)].

Г. Прецессия перигелия (упражнение 7.3, Г)

Непосредственная подстановка потенциала (8) в уравнения движения (2) утомительна и мало чему может научить. Вариационные принципы именно потому и применяются в механике, что они упрощают подобные выкладки. Возвратимся к основному вариационному принципу $\delta I_{\text{ч+вз}} = 0$ (1) и подставим в него потенциал (8) для Солнца. Перейдем к сферическим координатам, ориентированным таким образом, что орбита лежит в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$):

$$I_{\text{ч+вз}} = \int L\, d\tau, \tag{9}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left[-(1 - 2Mr^{-1})\dot{t}^2 + (1 + 2Mr^{-1})(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \right]. \tag{10}$$

Из отсутствия явной зависимости L от t, ϕ и τ заключаем, что должно существовать три интеграла движения: канонические импульсы

$$P_t \equiv -m\gamma = \partial L/\partial \dot{t}$$

(это определение γ) и

$$P_\phi \equiv ma = \partial L/\partial \dot{\phi}$$

(это определение α) и гамильтониан

$$H = \dot{x}^\mu (\partial L/\partial \dot{x}^\mu) - L,$$

который можно сделать равным $-m/2$ с помощью соответствующей нормировки параметра траектории τ. Эти три интеграла движения позволяют найти уравнение орбиты. Для этого 1) находим $H = -m/2$, выраженный через r, $\dot{r}$, $\dot{\phi}$ и $\dot{t}$; 2) с помощью постоянных α и γ исключаем $\dot{t}$ и $\dot{\phi}$; 3) как и в ньютоновских задачах по нахождению орбиты, вводим $u = M/r$ и пишем

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = -\frac{M\dot{r}}{r^2\dot{\phi}} = -\frac{M}{\alpha}(1+2u)\dot{r};$$

4) с помощью написанного выражения для $du/d\phi$ исключаем $\dot{r}$ из H, а r выражаем через u; 5) разрешаем относительно $du/d\phi$. В результате получаем

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = (\gamma^2 - 1 + 2u)\frac{M^2}{\alpha^2}\left[\frac{1+2u}{1-2u}\right]. \tag{11}$$

Пренебрегая в этом уравнении третьей и более высокими степенями $u = GM/c^2r \sim \sim (1-\gamma^2)$, находим смещение перигелия. (Подробное описание этого метода можно найти в упражнении 40.4, в котором γ и α данного дополнения обозначены через $\tilde{E}$ и $\tilde{L}$, а γ и β следует положить равными 1 и 0.) В результате получаем, что за один оборот перигелий смещается на

$$\Delta\phi = 8\pi M/r_0 + O([M/r_0]^2). \tag{12}$$

Это значение в $^4/_3$ раза превышает значение, предсказываемое общей теорией относительности, и расходится с данными наблюдений Меркурия (см. дополнение 40.3).

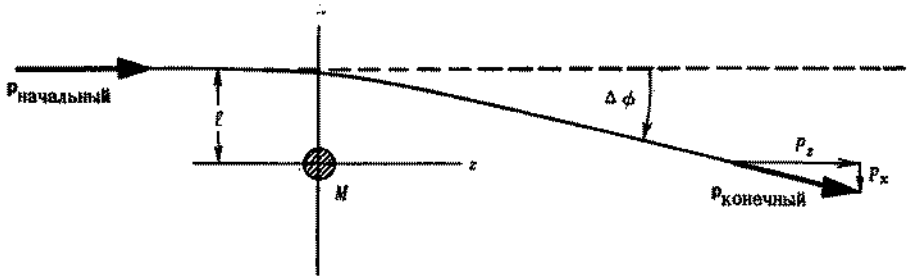
Д. Отклонение луча света (упражнение 7.3, Д)

Угол отклонения луча света, проходящего мимо Солнца, из соображений размерности должен быть малым: $\Delta\phi \sim M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}$; поэтому мы с самого начала делаем приближения, основанные на этой малости. На схеме траектории фотона в плоскости x, z видно, что при начальном движении, параллельном оси z, угол отклонения может быть выражен через конечный импульс: $\Delta\phi = p_x/p_z$. Найдем конечное значение p_x с помощью интеграла по траектории

$$p_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (dp_x/dz)\, dz,$$

считая p_z постоянным. Для этого требуется обобщить уравнение движения (2) на случай нулевой массы покоя. Чтобы осуществить предельный переход $m \to 0$, введем новый параметр $\lambda = \tau/m$; тогда $p^\mu = m(dz^\mu/d\tau) = dz^\mu/d\lambda$. Введем также $P_\mu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})p^\nu$, поскольку эта величина простым образом входит в уравнение (2) и сводится к p_μ в пределе $r \to \infty$, где и нужно ее определить. Тогда уравнение (2) для любой массы m, включая $m = 0$, принимает вид

$$\frac{dP_\mu}{d\lambda} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu} p^\alpha p^\beta.$$



Поскольку $h_{\alpha\beta,\mu}$ малы, в правую часть достаточно подставить p^μ в грубом приближении: $p^1 = p^2 = 0$, $p^0 = p^3 = dz/d\lambda = \omega = \text{const}$. Таким образом,

$$\frac{dP_1}{d\lambda} = \frac{1}{2}(h_{00} + 2h_{03} + h_{33})_{,1}\,\omega^2$$

и

$$\frac{1}{p_3}\frac{dP_1}{dz} = \frac{1}{2}(h_{00} + 2h_{03} + h_{33})_{,1}.$$

Для Солнца (8)

$$h_{00} = h_{33} = 2M/r, \quad \text{а} \quad h_{03} = 0,$$

следовательно,

$$\Delta\phi = -\left(\frac{p_1}{p_3}\right)_{\text{конечное}} = -\left(\frac{p_1}{p_3}\right)_{\text{конечное}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2M l\,dz}{(l^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2M}{l}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{3/2}} = \frac{4M}{l}. \quad (13)$$

В случае луча, касающегося края Солнца, $l = R_\odot$; откуда $\Delta\phi = 4M_\odot/R_\odot$ радиан $= 1''{,}75$, что совпадает с предсказанием общей теории относительности и согласуется с наблюдениями (см. дополнение 40.1).

Е. Гравитационные волны (упражнение 7.3, Е)

Уравнения поля (4) и условия калибровки (5) данной теории в плоском пространстве-времени совпадают с аналогичными уравнениями «линеаризованной теории» Эйнштейна. Таким образом, здесь применимо рассмотрение гравитационных волн, проведенное в рамках линеаризованной теории в § 18.2, 35.3 и 35.4.

Ж. Положительность энергии волн (упражнение 7.3, Ж)

Проводить выкладки с выражением для $\mathscr{H}$ общего вида (7.17) довольно утомительно, да и не обязательно. Достаточно лишь рассмотреть частный случай плоской волны [выражение (7.13)] или, что еще проще, плоской волны, у которой имеется лишь $h_{12} = h_{21} = f(z - t)$. Любую гравитационную волну можно представить в виде суперпозиции таких плоских волн. Сначала найдем лагранжиан для этого случая. Согласно выражению (7.8), он равен

$$\mathscr{L}_f = (32\pi)^{-1}[(h_{12,0})^2 - (h_{12,3})^2].$$

Все содержание формулы (7.17), служащей определением $\mathscr{H}$, можно довольно точно выразить следующим образом: берем лагранжиан; сохраняем все члены, квадратичные относительно производных по времени; опускаем все члены, линейные относительно производных по времени; меняем знак у всех членов, не содержащих производных по времени. В результате получаем выражение

$$\mathscr{H} = (32\pi)^{-1}[(h_{12,0})^2 + (h_{12,3})^2], \tag{14}$$

которое положительно.

3. Внутренняя противоречивость теории (упражнение 7.3, 3)

Из соотношения (7.10) находим

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = m\int \frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)]\,d\tau.$$

Функция $\delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{z})$ зависит только от разности $x^\mu - z^\mu$; поэтому при дифференцировании δ-функции вместо $\partial/\partial x^\nu$ можно поставить $-\partial/\partial z^\nu$. Замечая, что

$$\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial z^\nu}\delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)] = \frac{d}{d\tau}\delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)],$$

переписываем $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ в виде

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -m\int \dot{z}^\mu (d/d\tau)\,\delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)]\,d\tau = +m\int \ddot{z}^\mu \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)]\,d\tau.$$

(Последнее выражение получено с помощью интегрирования по частям.) Таким образом, равенство $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ выполняется *в том и только в том случае, если* $\ddot{z}^\mu = 0$. Но условие $\ddot{z}^\mu = 0$ означает, что гравитационные поля не влияют на движение частицы. Однако это противоречит уравнению движения (2), которое вытекает из вариационного принципа теории. Таким образом, данная тензорная теория тяготения внутренне противоречива. (Если сформулировать кратко, то уравнение (4) требует $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, тогда как уравнение (2) этого не допускает.)

Тот факт, что в данной теории гравитация не действует на гравитирующие тела, справедлив и для тел с произвольным тензором энергии-импульса (например, резиновых мячей или Земли). Поскольку все тела являются источником тяготения, поскольку из уравнений поля следует $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ и поскольку из этого «уравнения движения для энергии-импульса» вытекает сохранение полного 4-импульса тела $P^\mu = \int T^{\mu 0}\,d^3x$, ни одно тело не может ускоряться под действием гравитации. Солнце не может притягивать Землю, и она должна улететь в межзвездное пространство!

Попытки избавить данную теорию от этого противоречия без существенных усложнений неизбежно приводят к общей теории относительности (см. дополнение 17.2, п. 5). Приняв в качестве истинной теории тяготения общую теорию относительности, можно использовать данную теорию как приближение к ней («линеаризованная общая теория относительности», рассматриваемая в гл. 18, 19 и 35; в особенности см. обсуждение в конце § 18.3).

§ 7.2. ВЫВОД ГРАВИТАЦИОННОГО КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ ИЗ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Эйнштейн утверждал, что не существует никакой идеальной прямолинейной системы отсчета, подобной той, которая вводится в ньютоновской теории. Он подчеркивал, что ни один объект в естественном состоянии движения — даже фотон — никогда не позволит доказать существование или определить положение таких идеальных прямых линий.

Вывод гравитационного красного смещения из энергетических соображений

Исходя из закона сохранения энергии, примененного в рамках ньютоновской теории тяготения, Эйнштейн [49] показал, что гравитационное поле должно оказывать воздействие на фотон. Пусть частица с массой покоя m, в начальный момент покоившаяся в точке $\mathscr{A}$, свободно падает в гравитационном поле g вплоть до точки $\mathscr{B}$, отстоящей от $\mathscr{A}$ на расстояние h. Она приобретает кинетическую энергию mgh. Ее полная энергия, включая массу покоя, становится равной

$$m + mgh. \tag{7.18}$$

Пусть теперь в точке $\mathscr{B}$ частица испытывает аннигиляцию, при которой ее полная энергия, включающая энергию массы покоя и кинетическую энергию, превращается в фотон с той же полной энергией. Пусть далее этот фотон летит вверх в гравитационном поле к точке $\mathscr{A}$. Если он не взаимодействует с полем тяготения, то в точке $\mathscr{A}$ его энергия будет иметь первоначальное значение. В этой точке с помощью соответствующей аппаратуры он может быть превращен в другую частицу (которая может затем повторить весь процесс сначала) с массой покоя, равной m плюс избыточная энергия mgh, приобретенная без всяких затрат. Выход из этого противоречия с принципом сохранения энергии, который можно сформулировать и на чисто классическом языке, Эйнштейн видел в том, что фотон должен испытывать красное смещение. По мере подъема в гравитационном поле энергия фотона должна уменьшаться точно так же, как уменьшается энергия частицы. Следовательно, значения энергии фотона в верхней и нижней точках его траектории в гравитационном поле должны быть связаны соотношением

$$E_{\text{нижн}} = E_{\text{верхн}}(1 + gh) = E_{\text{верхн}}(1 + g_{\text{обычн}}h/c^2). \tag{7.19}$$

Уменьшение энергии из-за работы, совершенной против сил тяготения, приводит к уменьшению частоты и увеличению длины волны (красное смещение; обычно выражается через параметр красного смещения $z = \Delta\lambda/\lambda$); таким образом,

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{верхн}}}{\lambda_{\text{нижн}}} = \frac{h\nu_{\text{нижн}}}{h\nu_{\text{верхн}}} = \frac{E_{\text{нижн}}}{E_{\text{верхн}}} = 1 + gh. \tag{7.20}$$

Красное смещение, предсказываемое этой формулой, было подтверждено экспериментально с точностью 1% Паундом и Снайдером [125, 126], усовершенствовавшими эксперимент Паунда и Ребки [127].

§ 7.3. ИЗ ГРАВИТАЦИОННОГО КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ СЛЕДУЕТ КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

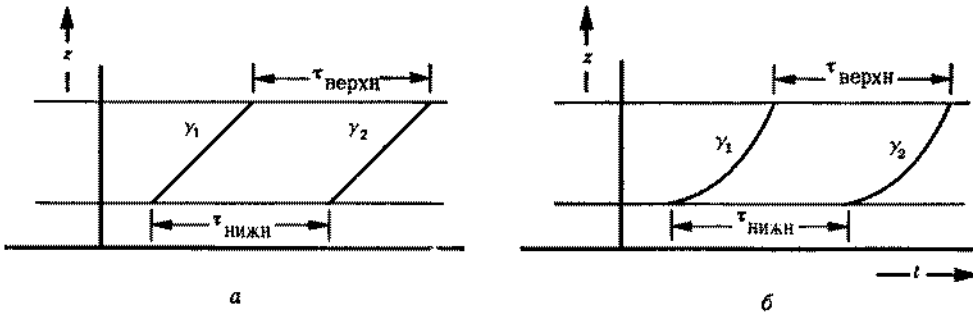
Доводы, развитые Шилдом [26, 128, 129], приводят к важному выводу: существование гравитационного красного смещения показывает, что в рамках специальной теории относительности нельзя построить самосогласованной теории тяготения.

Предположим, что тяготение описывается некоторым полем в плоском пространстве-времени...

В отличие от доводов Эйнштейна (которые приведены в предыдущем параграфе), сформулированных в рамках ньютоновской теории, доводы Шилда формулируются в рамках специальной теории относительности. При этом проводится анализ экспериментов по гравитационному красному смещению в поле Земли с помощью глобальной лоренцевой системы, связанной с центром Земли. Не требуется, чтобы свободные частицы, первоначально покоившиеся в этой глобальной лоренцевой системе, и дальше оставались покоящимися (за исключением далеких от Земли областей, где тяготение пренебрежимо мало). Напротив, требуется, чтобы свободные частицы ускорялись по отношению к лоренцевой системе гравитационным полем Земли. Доводы Шилда не зависят от математической природы этого поля (скалярного, векторного, тензорного, ...), но они требуют, чтобы гравитационные ускорения находились в согласии с экспериментом. И, конечно, используется тот факт, что собственные длины и времена описываются метрикой специальной теории относительности.

Доводы Шилда состоят в следующем. Рассмотрим двух наблюдателей, один из которых покоится на поверхности Земли на высоте z_1, а другой — над поверхностью Земли на высоте $z_2 = z_1 + h$ (фиг. 7.1). Наблюдатели могут убедиться в том, что они покоятся по отношению друг к другу и по отношению к лоренцевой системе Земли, например с помощью радиолокации свободных частиц, покоящихся в системе Земли вдали от ее гравитационного поля. Нижний экспериментатор испускает электромагнитный сигнал фиксированной стандартной частоты $\omega_{\text{нижн}}$, принимаемый наблюдателем наверху. Для определенности положим, что сигнал представляет собой импульс, содержащий точно N колебаний. Тогда интервал времени $\delta\tau_{\text{нижн}}$, в течение которого испускается импульс, задается выражением $2\pi N = \omega_{\text{нижн}}\delta\tau_{\text{нижн}}$. Верхний наблюдатель должен принять те же N колебаний электромагнитного волнового импульса и измерить время $\delta\tau_{\text{верхн}}$, которое для этого требуется [1]). Согласно определению «частоты», имеем $2\pi N =$

[1]) Для обоих наблюдателей собственное время равно лоренцеву координатному времени, поскольку они покоятся в лоренцевой системе Земли.



а *б*

ФИГ 7.1.
Последовательные импульсы света, распространяющиеся вверх от уровни z_1 до уровня $z_2 = z_1 + h$ в поле тяготения Земли. Траектории γ_1 и γ_2 должны быть в точности конгруэнтны друг другу независимо от того, наклонены ли они под углом 45° (слева), или их наклон переменен (справа).

$= \omega_{\text{верхн}}\delta\tau_{\text{верхн}}$. Эффект красного смещения, установленный экспериментально (для нас) или из закона сохранения энергии (для Эйнштейна), свидетельствует о том, что $\omega_{\text{верхн}} < \omega_{\text{нижн}}$; следовательно, интервалы времени имеют разную длительность: $\delta\tau_{\text{верхн}} > \delta\tau_{\text{нижн}}$. Перенесем эту информацию на пространственно-временную диаграмму, описывающую эксперимент с точки зрения специальной теории относительности (фиг. 7.1). Электромагнитные волны есть не что иное, как лучи света, поэтому их распространение на пространственно-временном чертеже можно изобразить нулевыми линиями, наклоненными под углом 45° (фиг. 7.1, *а*). В таком упрощенном и не совсем верном варианте доказательства мы приходим к противоречию, замечая, что получили *параллелограмм* в пространстве-времени Минковского с двумя противоположными ребрами, которые не равны друг другу, $\tau_{\text{верхн}} > \tau_{\text{нижн}}$, тогда как в плоском пространстве-времени Минковского противоположные стороны параллелограмма должны быть всегда равны друг другу. Отсюда вытекает, что *специальная теория относительности не может быть справедлива* в достаточно протяженной области. Глобально пространство-время перестает быть плоским, о чем свидетельствуют траектории лучей света и пробных частиц (части III и IV данной книги), хотя локально физика прекрасно описывается плоской геометрией Лоренца — Минковского.

Это предположение несовместимо с гравитационным красным смещением

На фиг. 7.1, *б* принято во внимание, что гравитационное поле влияет на распространение света, и тем самым исправлена ошибка, допущенная при излишнем упрощении доказательства. Поэтому фотоны могут двигаться не по прямым линиям, т. е. мировые линии γ_1 и γ_2 последовательных импульсов будут кривыми. Однако гравитационное поле статично, а экспериментаторы неподвижны. Поэтому ничто в условиях эксперимента не меняется со временем. Какова бы ни была траектория γ_1, траектория γ_2 должна быть

конгруэнтна ей, т. е. должна иметь точно ту же форму и быть просто смещенной во времени. На основе этой конгруэнтности и того факта, что наблюдатели движутся по параллельным мировым линиям, заключаем опять, что при условии справедливости плоской геометрии Минковского $\tau_{\text{нижн}} = \tau_{\text{верхн}}$, что противоречит экспериментально обнаруженному красному смещению. Экспериментаторы не обязательно должны знать, как свет распространяется в гравитационном поле. Им нужно лишь использовать свою радиолокационную аппаратуру, чтобы убедиться в том, что они покоятся друг относительно друга и относительно источника гравитационного поля. Они знают, что какое бы влияние ни оказывало гравитационное поле на их радиолокационную аппаратуру, это влияние не зависит от времени. Более того, им не нужно знать, как находить расстояние между собой, чтобы удостовериться в том, что это расстояние остается постоянным. Им необходимо лишь убедиться, что время, требуемое для того, чтобы радиолокационный импульс дошел до соседа и вернулся обратно, остается всегда одним и тем же, когда бы его ни измеряли.

Доводы Шилда, основанные на красном смещении, не позволяют сказать, какого рода кривизна должна существовать, и должна ли кривизна существовать в окрестности экспериментальной установки или на некотором расстоянии от нее. Они позволяют, однако, совершенно однозначно установить, что плоское пространство-время специальной теории относительности неприменимо для описания исследуемой ситуации, и, следовательно, должны побудить читателя рассмотреть математическую теорию кривизны, которой посвящена часть III.

Вывод: пространство-время искривлено

§ 7.4. ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ГРАВИТАЦИОННОГО КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ

Эйнштейн [49, 130] возвел идею универсальности гравитационных взаимодействий в ранг фундаментального *принципа эквивалентности, согласно которому все проявления однородного гравитационного поля тождественны проявлениям равномерного ускорения системы координат*. Этот принцип явился обобщением результата ньютоновской теории тяготения, в которой равномерное ускорение системы координат, согласно уравнению (7.1), приводит к появлению дополнительного однородного гравитационного поля. Однако в ньютоновской теории этот результат вытекает только для механики частиц. Эйнштейновский принцип эквивалентности утверждает, что подобное соответствие должно выполняться для всех законов физики, включая уравнения Максвелла для электромагнитного поля.

Принцип эквивалентности: однородное гравитационное поле неотличимо от равномерного ускорения системы отсчета

Правила игры — «научный метод» — требуют, чтобы для каждой новой теории или принципа было найдено экспериментальное подтверждение, и Эйнштейн мог рассматривать гравитационное

красное смещение как эквивалент экспериментального подтверждения своего принципа эквивалентности. Такое подтверждение состоит из двух этапов: во-первых, теория или принцип должны предсказывать какой-то эффект (в следующем абзаце показано, как из принципа эквивалентности следует существование красного смещения); во-вторых, предсказанный эффект должен быть обнаружен экспериментально. Что касается второго этапа, то после экспериментов Паунда — Ребки — Снайдера мы сейчас находимся в гораздо лучшем положении, чем когда-то Эйнштейн. Эйнштейн вместо прямого экспериментального подтверждения должен был удовлетвориться экспериментами, обосновывающими общий принцип сохранения энергии, и необходимостью красного смещения для того, чтобы закон сохранения энергии всегда выполнялся.

Вывод гравитационного красного смещения из принципа эквивалентности

Существование гравитационного красного смещения можно вывести из принципа эквивалентности, рассмотрев двух экспериментаторов в ракете, движущейся с постоянным ускорением g. Пусть расстояние между двумя наблюдателями в направлении ускорения равно h. Для определенности предположим, что в момент, когда нижний наблюдатель послал фотон, ракета покоилась в некоторой инерциальной системе координат. Чтобы достигнуть верхнего наблюдателя, фотону потребуется время $t = h$. За это время верхний наблюдатель приобретет скорость $v = gt = gh$. Поэтому он зарегистрирует фотон с доплеровским красным смещением $z = v = gh$. Полученный результат совпадает с соотношением (7.20). Из принципа эквивалентности следует, что если это красное смещение наблюдается в эксперименте, выполненном в условиях равномерного ускорения и отсутствия гравитационных полей, то точно такое же красное смещение должно наблюдаться в эксперименте, выполненном в однородном гравитационном поле при отсутствии ускорения. Следовательно, с помощью принципа эквивалентности можно вывести соотношение (7.20) для ситуации с гравитационным полем.

§ 7.5. ЛОКАЛЬНО ПЛОСКОЕ, ГЛОБАЛЬНО ИСКРИВЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Принцип эквивалентности помогает понять природу кривизны пространства-времени, существование которой вытекает из доводов Шилда. В ускоренной системе физика явлений точно такая же, как и в лаборатории, связанной с поверхностью Земли. Таким образом, связанную с Землей лабораторию можно считать ускоряющейся вверх с ускорением g по отношению к лоренцевым системам в ее окрестности [1]). Аналогично все лоренцевы системы

[1]) Направленное вверх ускорение лаборатории в совокупности с уравнением (6.18) для линейного элемента в ускоренной системе координат объясняет неравенство нижнего и верхнего ребер параллелограмма на фиг. 7.1.

должны ускоряться вниз по отношению к лаборатории и поверхности Земли. Но направления вниз (по радиусу) различны для разных значений широты и долготы. Следовательно, локальные лоренцевы системы, первоначально покоившиеся по отношению друг к другу по разные стороны Земли, впоследствии падают по направлению к центру и движутся, пересекая друг друга. Ясно, что их нельзя «сшить» в единую глобальную лоренцеву систему, связанную с Землей, как это предполагалось в рассуждениях Шилда. Подобно невозможности сшить локальные декартовы координаты на искривленной 2-поверхности, невозможность сшить локальные лоренцевы системы есть очевидное проявление кривизны пространства-времени.

Принцип эквивалентности приводит к тому, что локальные лоренцевы системы у Земли не могут быть сшиты (кривизна пространства-времени!)

С подобными же проблемами сталкиваются географы при составлении карты земной поверхности. На участках небольшой площади (в пределах города или района) можно без всяких осложнений использовать обычную прямоугольную систему координат. Однако, если имеются карты двух довольно протяженных областей, на каждой из которых одна из осей указывает на север, то мы обнаруживаем, что края карт совпадают друг с другом наилучшим образом тогда, когда мы совмещаем их под небольшим углом друг к другу (пространственно-временной аналог: относительная скорость двух локальных лоренцевых систем, пересекающихся в центре Земли). Гораздо легче начать с картины сферического глобуса, и уж затем говорить о том, как небольшие плоские карты могут быть использованы в качестве хорошей аппроксимации для отдельных его частей, чем начать с огромного скопления небольших карт и пытаться соединить их в единую карту глобуса. Поэтому в данной книге при изложении геометрии пространства-времени используется первый подход. Теперь, когда читатель видит, что проблема состоит в том, чтобы объединить локальные описания физических явлений в плоском пространстве-времени во всеобщую картину мира, он может в следующей главе перейти к общему изучению геометрии. С этой более удобной точки зрения можно затем рассмотреть проблему взаимосвязи локальных инерциальных систем координат, соответствующих двум близким областям со слегка различными гравитационными полями.

Невозможность сшить локальные лоренцевы системы побуждает к изучению геометрии

Фактически геометрия входит в общую теорию относительности двумя различными путями. Один из них — геометрия длин и углов в четырехмерном пространстве-времени, унаследованная от метрической структуры ds^2 специальной теории относительности. Уже доводы Шилда показывают (не обращаясь непосредственно к принципу эквивалентности), что представления о длинах и углах специальной теории относительности нуждаются в модификации. Такая модификация метрической структуры приводит к римановой геометрии, которая рассматривается в главах 8 и 13. Однако геометрия входит в общую теорию относительности и благодаря принципу эквивалентности. Принцип эквива-

Два типа геометрии, связанной с пространством-временем

Риманова геометрия (длины и углы)

лентности может быть сформулирован уже в ньютоновской теории тяготения, где нет понятия метрики *пространства-времени*, а есть лишь эвклидова метрическая структура трехмерного *пространства*. Основанный на принципе эквивалентности подход к ньютоновской теории также требует, чтобы локальная система отсчета была связана с частицами в состоянии свободного падения. Это требование побуждает нас изучать геометрию *пространства-времени*, в которой искривленные мировые линии свободно падающих частиц по определению являются локально прямыми. В геометрии искривленного пространства-времени они играют ту же роль, какую прямые линии играют в плоском пространстве-времени. Изучению этой «аффинной геометрии» посвящены главы 10—12. Аффинная геометрия позволяет количественно сформулировать такие понятия, как «ковариантная производная», «кривизна» и даже «кривизна ньютоновского пространства-времени»!

Аффинная геометрия («прямые линии» и кривизна)

ЧАСТЬ III

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В которой читатель, не устояв против обаяния новой искусительницы — Современной Дифференциальной Геометрии, — принимает решение: продлить знакомство с ней на восемь глав либо, утолив жажду, ускользнуть после первой же

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ОБЩИЙ ОБЗОР

Я все более и более прихожу к убеждению,
что необходимость нашей геометрии не может быть доказана,
по крайней мере ни с помощью, ни для человеческого разума.
... геометрию следует сравнивать не с арифметикой,
которая чисто априорна, а с механикой.

Мы должны смиренно признать, что если число есть продукт одного только разума, то пространство обладает реальностью, выходящей за пределы разума,
законы которой нам в полной мере не известны.

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС

§ 8.1. КРАТКИЙ ОБЗОР ЧАСТИ III

Тяготение есть проявление кривизны пространства-времени, а о кривизне мы узнаем по отклонению одной геодезической от другой близкой геодезической («относительное ускорение пробных частиц»). Основной вопрос, которому посвящена данная часть книги, ясен: *Каким образом можно количественно описать «разделение», а также «скорость изменения разделения» двух «геодезических» в «искривленном» пространстве-времени?* Ясный и точный ответ требует введения новых понятий.

Понятия, изучаемые в части III:

Под «разделением» геодезических будет подразумеваться «вектор». Но понятие вектора, употребляемое в плоском лоренцевом пространстве-времени (билокальный объект: точка острия и точка основания), при переходе к искривленному пространству-времени должно быть усовершенствовано и превращено в локальное понятие *касательного вектора*. Это сделано в гл. 9, где выясняется также, какое влияние переход к искривленному пространству-времени оказывает на 1-формы и тензоры.

Касательный вектор

Чтобы строго определить «разделение» как вектор, нужны одни математические средства (векторы в криволинейной геометрии, гл. 9), чтобы сравнивать разделяющие векторы в соседних точках и дать определение «скорости изменения разделения», нужны другие средства (параллельный перенос в искривленном пространстве-времени; гл. 10). Если нет переноса, то невозможно сравнивать; если нельзя сравнивать, то выражение «скорость изменения» теряет смысл! Представление о параллельном переносе наиболее четко выражается в понятии *геодезической* — мировой линии свободно падающей частицы. Особые математические

Геодезическая

свойства геодезических исследуются в гл. 10. В этой главе геодезические используются для определения параллельного переноса, параллельный перенос используется для определения *ковариантной производной*, а ковариантная производная, замыкая круг, используется для описания геодезических.

Ковариантная производная

Отклонение геодезических

Кривизна пространства-времени

В гл. 11 рассматривается основной вопрос — *отклонение геодезических* («скорость изменения разделяющего вектора между двумя геодезическими») и его роль в определении *кривизны* пространства-времени.

Но недостаточно дать определение кривизны. Тот, кто хочет глубоко проникнуть в суть гравитации, должен также увидеть кривизну в действии, как она приводит к относительным ускорениям частиц в ньютоновском пространстве времени (гл. 12); он должен понять, как в эйнштейновском пространстве-времени расстояния (метрика) полностью определяют кривизну и закон параллельного переноса (гл. 13); он должен овладеть мощным аппаратом, созданным для вычисления кривизны (гл. 14); он должен уловить геометрический смысл алгебраической и дифференциальной симметрии кривизны (гл. 15).

К сожалению, для достижения такого глубокого понимания требуется время, гораздо большее, чем то, которым можно располагать в пределах десяти- или пятнадцатинедельного курса; гораздо большее, чем желал бы потратить читатель, изучающий предмет самостоятельно, при первом чтении книги. Для тех, кто не имеет времени, в данной главе дан обзор основных математических средств, относящийся к курсу 1 (§§ 8.4—8.7). Он дает возможность правильно, но не очень глубоко понять кривизну пространства-времени, приливные гравитационные силы и математический аппарат искривленного пространства-времени. Этот обзор предназначен также и для читателя курса 2: он позволит ему составить представление о том, что излагается в последующих главах. У читателя с повышенными запросами может также возникнуть желание обратиться к другим начальным пособиям по дифференциальной геометрии (см. дополнение 8.1).

Данная глава: обзор дифференциальной геометрии, относящийся к курсу 1

Дополнение 8.1. КНИГИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ [1])

Имеется несколько математических пособий, к которым можно обратиться для более подробного и исчерпывающего изучения современной дифференциальной геометрии в том духе, в котором она излагается здесь. В качестве первого укажем [131]. Из двух современных стандартных учебников [15, 132] первый можно рекомендовать для аспирантов, а второй — для студентов, причем во втором рассматривается большинство тех же разделов, но не предполагается, что читатель

[1]) Советским читателям можно рекомендовать доступную монографию П. К. Рашевского «Риманова геометрия и тензорный анализ» (изд-во «Наука», 1967 г.), предназначенную для изучающих специальную и общую теории относительности. — *Прим. перев.*

легко воспринимает современный стиль, принятый математиками. Несколько более высокий уровень изложения принят в книге [133], доступной тем не менее для читателей, которые больше привыкли к дифференциальным уравнениям, чем к гомоморфизмам. Легко читается книга [134], но в ней перед читателем не ставится никаких проблем и изложение мало соответствует современному математическому стилю. Пособия [19, 32, 135] в некоторых отношениях подобны данной книге, но в них мало внимания уделяется чертежам; они тоже предназначены для студентов, изучающих теорию относительности. Книга [102] доступна и полезна в качестве введения в теорию внешних дифференциальных форм и содержит много примеров приложения к широкому кругу проблем физики и техники.

§ 8.2. СРАВНЕНИЕ КУРСА 1 С КУРСОМ 2: РАЗЛИЧНЫЙ КРУГОЗОР, РАЗЛИЧНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

Предварительные замечания, касающиеся изложения дифференциальной геометрии в курсе 2

Наиболее замечательной особенностью связи, которая существует между эйнштейновской теорией тяготения и ньютоновской теорией, как показал Эли Картан [136, 137], является то обстоятельство, что обе эти теории можно описать с помощью понятия кривизны, что в обеих этих теориях кривизна определяется плотностью массы-энергии и что эту кривизну можно определить и измерить, совершенно не прибегая к понятию метрики. Различие же между двумя теориями проявляется в следующем: в эйнштейновской теории в конце концов (или с самого начала — в зависимости от того, как ее излагать!) дается определение интервала между каждыми двумя близкими событиями; в ньютоновской теории этого не только не делается, но даже утверждается, что любая попытка рассмотрения *пространственно-временных* интервалов приводит к нарушению законов Ньютона. Ввиду этого обстоятельства в курсе 2 в течение некоторого времени (гл. 9—12) совершенно не используется метрика пространства-времени («интервал Эйнштейна»). В этой части курса исчерпываются все возможности описания кривизны пространства-времени, свободного от метрики (вся теория Ньютона, важные разделы теории Эйнштейна).

Отклонение геодезических позволяет дать определение и измерить кривизну, но при этом запрещается сводить векторное описание разделения событий к численному значению расстояния (на этом этапе изложения метрика отсутствует),— казалось бы, невероятная ситуация! Тем не менее это как раз та ситуация, рассмотрению которой посвящены гл. 9—12,— как изучать геометрию, не пользуясь метрикой. Выражаясь физическим языком, на данном этапе мы забудем, что геометрия физического мира всегда и везде локально лоренцева и наделена световым конусом, но зато в полной мере используем принцип эквивалентности Галилея — Эйнштейна: в любом месте можно найти систему отсчета, в которой каждая нейтральная пробная частица с произвольной скоростью не испытывает ускорения. Траектории таких нейтральных пробных частиц определяют геодезические данной геометрии.

Геодезические — это инструмент, с помощью которого удается сделать многое: дать определение параллельного переноса (гл. 10), дать определение ковариантной производной (гл. 10), количественно описать отклонение геодезических (гл. 11), дать определение кривизны пространства-времени (гл. 11) и исследовать ньютоновское тяготение (гл. 12). Лишь после того, как будут исчерпаны все возможности геодезических, свободных от метрики, в курсе 2 опять появится эйнштейновская метрика (гл. 13—15).

С чем читатель курса 1 не сможет познакомиться

Но отказаться от метрики — такая роскошь, которую нельзя позволить в рамках курса 1, поскольку при этом останется слишком мало времени для релятивистских звезд, космологии, черных дыр, гравитационных волн, экспериментальных тестов и динамики геометрии. Поэтому в приведенном в данной главе обзоре, относящемуся к курсу 1, везде используется метрика Эйнштейна. Однако при этом приходится поступиться многим, а именно: 1) отказаться от возможности проследить за действием кривизны в ньютоновском пространстве-времени (гл. 12); 2) отказаться от возможности сравнить и противопоставить геометрические структуры ньютоновского пространства-времени (гл. 12) и эйнштейновского пространства-времени (гл. 13), а следовательно, отказаться от возможности в полной мере понять ньютоновское обоснование уравнений поля Эйнштейна (гл. 17); 3) отказаться от возможности в полной мере понять математическую взаимосвязь понятий «геодезическая», «параллельный перенос», «ковариантная производная», «кривизна» и «метрика» (гл. 9—11, 13); 4) отказаться от возможности ввести математические предметы «дифференциальная топология» (геометрия без метрики и ковариантных производных, гл. 9) и «аффинная геометрия» (геометрия с ковариантными производными, но без метрики, гл. 10 и 11) — предметы, которые находят широкое применение в современной аналитической механике (см., например, [138], а также упражнение 4.11 в этой книге), в теории групп Ли, глубоко проникнувшей в физику элементарных частиц (см., например, [139], а также упражнения 9.12, 9.13, 10.16 и 11.12 в этой книге), в теории и при решении уравнений в частных производных (см., например, [140]) и, конечно, в теории тяготения.

§ 8.3. ГЕОМЕТРИЯ В ТРЕХ АСПЕКТАХ: НА ЧЕРТЕЖАХ, В АБСТРАКТНОЙ ФОРМЕ, В КОМПОНЕНТНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Ознакомление с § 8.4 и гл. 9 позволит приобрести навык в обращении с касательными векторами, 1-формами, тензорами в искривленном пространстве-времени; ознакомление с § 8.5 и гл. 10— навык в использовании параллельного переноса векторов, дифференцировании векторов и в обращении с геодезическими; в § 8.7 и гл. 11 эти навыки будут использованы при рассмотрении

отклонения геодезических, при определении кривизны;... . Однако эти навыки станут по-настоящему прочными лишь тогда, когда читатель сможет с одинаковым успехом пользоваться тремя различными представлениями: наглядным представлением (на чертежах), абстрактными обозначениями и компонентными обозначениями (дополнение 8.3). Картан (дополнение 8.2) сформулировал новый взгляд на ньютоновскую теорию тяготения (гл. 12) и на принципиальную геометрическую простоту эйнштейновских уравнений поля (гл. 15) лишь благодаря тому, что он с одинаковым мастерством оперировал в дифференциальной геометрии всеми тремя методами. В наши дни свободное общение с коллегами в этой области обязательно подразумевает умение выражаться на всех трех языках. Этим объясняется и взаимосвязь трех форм выражения в последующей части изложения.

Геометрия с трех точек зрения: на чертежах, в абстрактной форме, в компонентных обозначениях

Как показывает приводимый в учебниках анализ скорости и ускорения планеты, совершающей кеплеровское движение вокруг Солнца, переход с одного языка на другой и обратно далеко не нов. Скорость планеты записывается в виде

Орбита планеты как пример трех точек зрения

$$v = v^{\hat{r}} e_{\hat{r}} + v^{\hat{\phi}} e_{\hat{\phi}}, \tag{8.1}$$

$e_{\hat{r}}$ и $e_{\hat{\phi}}$ — единичные векторы. Ускорение равно

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv^{\hat{r}}}{dt} e_{\hat{r}} + \frac{dv^{\hat{\phi}}}{dt} e_{\hat{\phi}} + v^{\hat{r}} \frac{de_{\hat{r}}}{dt} + v^{\hat{\phi}} \frac{de_{\hat{\phi}}}{dt}. \tag{8.2}$$

Единичные векторы поворачиваются (фиг. 8.1) с угловой скоростью $\omega = d\phi/dt$, откуда

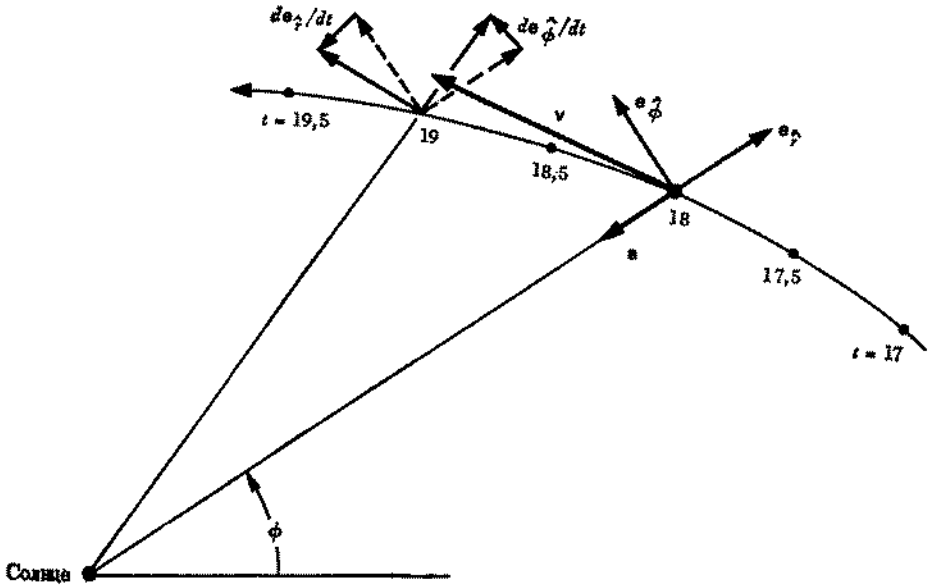
$$\begin{aligned} \frac{de_{\hat{r}}}{dt} &= \omega e_{\hat{\phi}} = \frac{d\phi}{dt} e_{\hat{\phi}}, \\ \frac{de_{\hat{\phi}}}{dt} &= -\omega e_{\hat{r}} = -\frac{d\phi}{dt} e_{\hat{r}}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Таким образом, компоненты ускорения имеют значения

$$a^{\hat{r}} = \frac{dv^{r}}{dt} - v^{\hat{\phi}} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2, \tag{8.4а}$$

$$a^{\hat{\phi}} = \frac{dv^{\hat{\phi}}}{dt} + v^{\hat{r}} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r \frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt}. \tag{8.4б}$$

Здесь ускорение представлено в компонентных обозначениях, через a ускорение было обозначено на абстрактном языке, а на фиг. 8.1 ускорение обозначено стрелкой. В следующих параграфах и главах каждый из этих трех способов выражения получит естественное обобщение из двумерного плоского пространства



ФИГ. 8.1.
Кеплеровская орбита в поле тяготения Солнца, изучаемая в рамках обычной ньютоновской теории тяготения в эвклидовом пространстве. Базисные векторы на орбите меняются от точки к точке [уравнения (8.3)]. Эта фигура служит иллюстрацией для дифференциальной геометрии в наглядном представлении — на чертежах и рисунках. Ниже (упражнение 8.5) она послужит иллюстрацией для понятий «ковариантная производная» и «коэффициенты связности».

(с криволинейными координатами) на четырехмерное искривленное пространство-время, а из пространства-времени на многообразия более общего вида (о многообразиях см. § 9.7).

Теперь перейдем к обзору дифференциальной геометрии в курсе 1.

Дополнение 8.2. ЭЛИ КАРТАН, 1869—1951 гг.

Эли Картан — одна из самых выдающихся фигур в истории современной математики. Из некролога [141] мы узнаем, что он родился в семье кузнеца на юге Франции и, подтвердив значение правительственных стипендий, прошел путь до профессора в Сорбонне, которым он стал в 1912 г., когда ему было 43 года. В возрасте 32 лет он создал внешнее дифференцирование [142], которое использовал в основном в теории дифференциальных уравнений и в теории групп Ли, куда успел уже внести значительный вклад. Ему было около пятидесяти, когда он начал применять внешнее дифференцирование в геометрии, и шестьдесят, когда он специально приступил к исследованиям в римановой геометрии, создав

труд [6], который и по сей день переиздается и рекомендуется для изучения. Однако, хотя его работы и получили всемирное признание, они были не очень популярны у читателей вплоть до 1940 г. В это время во Франции новое поколение математиков, выразителем которого явилась группа Бурбаки, начало создавать новую концептуальную базу в математике, и в частности для методов и подхода Картана. Сделанное Картаном стало доступным для понимания и изложения, чего нельзя было сказать про его собственные работы, и к моменту его смерти в возрасте 82 лет в 1951 г. его влияние было явно доминирующим в революционных преобразованиях, захвативших к тому времени все разделы математики (теорию групп Ли, дифференциальные уравнения и дифференциальную геометрию), в которых он работал.

Современный абстрактный, свободный от координат, подход в геометрии, широко используемый в этой книге, во многом обязан Эли Картану. Им найден также геометрический подход к ньютоновской теории тяготения, развиваемый и используемый в гл. 12.

Дополнение 8.3. ТРИ УРОВНЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Представление геометрии с помощью *одних только чертежей*: касательный вектор представляется в виде разделения двух точек в пределе, когда эти точки бесконечно близки друг к другу;
   векторы складываются и вычитаются локально так же, как и в плоском пространстве;
   векторы в разных точках сравниваются с помощью параллельного переноса из одной точки в другую;
   этот параллельный перенос выполняется с помощью «лестницы Шилда», построенной из геодезических (дополнение 10.2);
   чертежи — да, алгебра — нет;
   с точки зрения основных концепций это представление геометрии настолько тесно связано с пробными частицами и измерениями, насколько это вообще возможно.
2. *Абстрактная* дифференциальная геометрия:
   предполагает, что касательный вектор существует сам по себе, и нет необходимости разлагать его на компоненты:

$$\mathbf{A} = A^0\mathbf{e}_0 + A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3,$$

   подобно тому, как мы уже привыкли оперировать с вектором электрического поля $\boldsymbol{E}$, не выписывая его компонент; подобный же подход используется при дифференцировании (ср. оператор градиента $\boldsymbol{\nabla}$ простейшего векторного анализа и зависящие от координат части этого оператора: $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и т. д.);
   является математической схемой, которая из всех известных схем позволяет

самым быстрым и простым образом получать общие результаты в дифференциальной геометрии.

3. Дифференциальная геометрия, представленная на языке *компонент*:
незаменима при составлении больших программ для численных расчетов в общей теории относительности;
удобна, а иногда и необходима, когда дело доходит, пусть даже на простейшем алгебраическом уровне, до самых несложных приложений общей теории относительности, от фридмановской расширяющейся вселенной до кривизны в окрестности статического тяготеющего центра.

§ 8.4. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Тензорная алгебра:

Чтобы увидеть кривизну пространства-времени в действии, нужно рассмотреть приливные силы тяготения (отклонение геодезических); чтобы определить эти силы, нужно провести измерения в лаборатории конечного размера. Но стоит уменьшить лабораторию до бесконечно малых размеров, как все эффекты, связанные с кривизной пространства-времени, станут бесконечно малыми; физик уже не сможет сказать, находится ли он в плоском или в искривленном пространстве-времени. Математик тоже не сможет, если область, на которой он сосредоточил свое внимание, сжимается в пределе до одного события $\mathcal{P}_0$.

1) действует в бесконечно малой окрестности события

В событии $\mathcal{P}_0$ (в бесконечно малой лаборатории) как физик, так и математик могут свободно говорить о векторах, 1-формах, тензорах; каково бы ни было значение кривизны пространства-времени, их обсуждение не будет по форме отличаться от аналогичного обсуждения в плоском пространстве-времени. Частица в $\mathcal{P}_0$ обладает 4-импульсом $\mathbf{p}$, квадрат величины которого равен

2) в искривленном пространстве та же, что и в плоском

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = -m^2.$$

Как обычно, для вычисления квадрата длины нужно ввести $\mathbf{p}$ в оба входных канала линейной машины — метрики $\mathbf{g}$ в событии $\mathcal{P}_0$. Частица обладает в $\mathcal{P}_0$ также 4-ускорением $\mathbf{a}$, и если частица заряжена и движется свободно, то $\mathbf{a}$ создается тензором электромагнитного поля $\mathbf{F}$:

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{F}(\ldots, \mathbf{u}).$$

Кривизна никак не может влиять на эти локальные, не зависящие от координат соотношения. Она не может также помешать ввести локально лоренцеву систему в $\mathcal{P}_0$ и произвести в ней стандартные манипуляции с индексами, обычные для плоского пространства:

$$\mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \qquad \mathbf{p}^2 = p^\alpha p^\beta \eta_{\alpha\beta} = p^\alpha p_\alpha, \qquad ma^\alpha = eF^{\alpha\beta}u_\beta.$$

Но того, кто собирается оперировать в искривленном пространстве-времени, локально лоренцевы системы не могут удовле-

творить. Нелоренцевы системы (с неортонормированными базисными векторами $\{\mathbf{e}_\alpha\}$) часто упрощают выкладки. К счастью, чтобы овладеть «индексной техникой» в произвольном базисе в фиксированном событии $\mathcal{P}_0$, не требуется никаких усилий. Правила здесь точно такие же, как и в плоском пространстве-времени, за следующими исключениями: 1) ковариантные лоренцевы компоненты метрики $\eta_{\alpha\beta}$ следует заменить на

3) правила оперирования с компонентами почти не изменяются при использовании неортонормированного базиса

Компоненты метрики

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta); \tag{8.5}$$

2) контравариантные компоненты $\eta^{\alpha\beta}$ следует заменить на $g^{\alpha\beta}$, где

$$\| g^{\alpha\beta} \| \equiv \| g_{\alpha\beta} \|^{-1} \text{ (обратная матрица)}, \tag{8.6}$$

т. е.

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma; \tag{8.6'}$$

3) матрицу преобразования Лоренца $\| \Lambda^{\alpha'}{}_\beta \|$ и обратную ей матрицу $\| \Lambda^\beta{}_{\alpha'} \|$ следует заменить на произвольную, но не сингулярную матрицу преобразования $\| L^{\alpha'}{}_\beta \|$ и обратную ей матрицу $\| L^\beta{}_{\alpha'} \|$:

Преобразование базиса

$$\mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta, \qquad p^\beta = L^\beta{}_{\alpha'} p^{\alpha'}, \tag{8.7}$$

$$\| L^\beta{}_{\alpha'} \| = \| L^{\alpha'}{}_\beta \|^{-1}; \tag{8.8}$$

4) в частном случае «координатных базисов», $\mathbf{e}_\alpha = \partial\mathcal{P}/\partial x^\alpha$, $\mathbf{e}_{\beta'} = \partial\mathcal{P}/\partial x^{\beta'}$,

$$L^{\alpha'}{}_\beta = \partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta, \qquad L^\beta{}_{\alpha'} = \partial x^\beta/\partial x^{\alpha'}; \tag{8.9}$$

5) тензор Леви-Чивиты $\boldsymbol{\varepsilon}$, подобно метрическому тензору, имеет компоненты, которые зависят от того, насколько базисные векторы отличаются от ортонормированных (см. упражнение 8.3): если $\mathbf{e}_0$ направлен в будущее, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — правая тройка, то

Компоненты тензора Леви-Чивиты

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (-g)^{1/2} [\alpha\beta\gamma\delta], \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} &= g^{-1} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -(-g)^{-1/2} [\alpha\beta\gamma\delta], \end{aligned} \tag{8.10a}$$

где $[\alpha\beta\gamma\delta]$ — совершенно антисимметричный символ

$$[\alpha\beta\gamma\delta] \equiv \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha\beta\gamma\delta \text{ четная перестановка } 0\ 1\ 2\ 3, \\ -1, & \text{если } \alpha\beta\gamma\delta \text{ нечетная перестановка } 0\ 1\ 2\ 3, \\ 0, & \text{если не все } \alpha\beta\gamma\delta \text{ различны}, \end{cases} \tag{8.10б}$$

и где через g обозначен детерминант матрицы $\| g_{\alpha\beta} \|$

$$g \equiv \det \| g_{\alpha\beta} \| = \det \| \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \|. \tag{8.11}$$

В дополнении 8.4 дано полное рассмотрение и доказательства; упражнение 8.1 позволит лучше понять и овладеть материалом.

В проведенном выше обсуждении есть несколько опасных мест. В плоском пространстве-времени мы часто не говорим, где расположен вектор, 1-форма или тензор. Не задумываясь, мы сво-

бодно перемещаем геометрические объекты от события к событию. При этом, конечно, неявно подразумевается правило переноса: при перемещении все длины и направления остаются фиксированными, т. е. фиксированы все компоненты в лоренцевой системе, или объект перемещается «параллельным переносом». Однако в искривленном пространстве-времени не существует глобальной лоренцевой системы, в которой можно было бы фиксировать компоненты; а объекты, первоначально параллельные, после «параллельного переноса» вдоль различных кривых перестают быть параллельными («отклонение геодезических»; земные меридианы, параллельные на экваторе, пересекаются на Северном и Южном полюсах). Таким образом, в искривленном пространстве-времени нельзя беспечно перемещать объекты из точки в точку, не описав тщательным образом, как и по какому пути они переносятся. У каждого локального геометрического объекта есть свое официальное местоположение (событие $\mathcal{P}_0$); он может взаимодействовать с другими объектами, расположенными там же (тензорная алгебра), но он не может взаимодействовать с произвольным объектом в другом событии $\mathcal{Q}$, пока его соответствующим образом не перенесли из $\mathcal{P}_0$ в $\mathcal{Q}$.

Векторы и тензоры нельзя перемещать из точки в точку

Такой ход рассуждений при дальнейшем развитии приводит к понятию «касательного пространства» в каждом событии, в котором лежат векторы (стрелки) и 1-формы (семейства поверхностей) данного события и в котором действуют его тензоры (линейные машины). Рисуют даже эвристические картины касательного пространства, подобные фиг. 9.1 (стр. 288).

Определение касательного пространства

К числу других опасностей в искривленном пространстве-времени следует отнести искушение представлять себе векторы как стрелки, соединяющие два события («точка острия и точка основания»),— т. е. представлять себе касательное пространство, изображенное на фиг. 9.1, расположенным в самом пространстве-времени. Такое представление может оказаться полезным для эвристических целей, но оно несовместимо с абсолютной математической строгостью. (Каким образом можно уложить касательное пространство в искривленную поверхность?) На фиг. 2.1 дано четыре определения вектора: три из них основаны на «точке острия и точке основания» и одно чисто локальное ($d\mathcal{P}/d\lambda$). Только локальное определение целиком приемлемо для искривленного пространства-времени, но даже и оно может быть улучшено с точки зрения математиков следующим образом.

Определения вектора в искривленном пространстве-времени: 1) в виде $d\mathcal{P}/d\lambda$

Существует взаимно однозначное соответствие (полный «изоморфизм») между векторами $\mathbf{u}$ и операторами производной по направлению $\partial_{\mathbf{u}}$. Понятие вектора не совсем четко определено, тогда как «производная по направлению» определена абсолютно строго. Чтобы избавиться от нечеткости, используем в полной мере изоморфизм: *положим по определению*, что касательный вектор $\mathbf{u}$ совпадает с соответствующей производной по направлению

$$\mathbf{u} \equiv \partial_{\mathbf{u}}. \tag{8.12}$$

2) как производной по направлению

(Такой подход, хотя и может оказаться вначале незнакомым для физика, весьма плодотворен в математике, и мы будем им часто пользоваться в этой книге. Более полное рассмотрение см. в § 9.2).

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Упражнение по тензорной алгебре

Пусть t, x, y, z — лоренцевы координаты в плоском пространстве-времени, и пусть

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \qquad \theta = \arccos(z/r), \qquad \phi = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$$

— соответствующие сферические координаты. Тогда

$$\mathbf{e}_0 = \partial\mathscr{P}/\partial t, \qquad \mathbf{e}_r = \partial\mathscr{P}/\partial r, \qquad \mathbf{e}_\theta = \partial\mathscr{P}/\partial\theta, \qquad \mathbf{e}_\phi = \partial\mathscr{P}/\partial\phi$$

— координатный базис, а

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{r}} = \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial r}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\theta}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\phi}$$

— некоординатный базис.

а. Нарисуйте векторы $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ и $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ в нескольких точках на сфере постоянных значений t, r. (Для $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ ответ должен напоминать фиг. 9.1.)

б. Что представляют собой базисы из 1-форм $\{\omega^\alpha\}$ и $\{\omega^{\hat{\alpha}}\}$, дуальные к этим базисам из касательных векторов? (*Ответ*: $\omega^0 = \mathbf{d}t$, $\omega^r = \mathbf{d}r$, $\omega^\theta = \mathbf{d}\theta$, $\omega^\phi = \mathbf{d}\phi$; $\omega^{\hat{0}} = \mathbf{d}t$, $\omega^{\hat{r}} = \mathbf{d}r$, $\omega^{\hat{\theta}} = r\,\mathbf{d}\theta$, $\omega^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi$.)

в. Что представляет собой матрица преобразования, связывающая начальную лоренцеву систему со сферической системой координат $\{\mathbf{e}_\alpha\}$? (*Ответ*: отличные от нуля компоненты равны

$$L^t{}_0 = 1, \qquad L^z{}_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, \qquad L^z{}_\theta = \frac{\partial z}{\partial\theta} = -r\sin\theta,$$

$$L^x{}_r = \sin\theta\cos\phi, \qquad L^x{}_\theta = r\cos\theta\cos\phi, \qquad L^x{}_\phi = -r\sin\theta\sin\phi,$$

$$L^y{}_r = \sin\theta\sin\phi, \qquad L^y{}_\theta = r\cos\theta\sin\phi, \qquad L^y{}_\phi = r\sin\theta\cos\phi.)$$

г. Используя матрицу преобразования, найдите компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ в сферическом координатном базисе; обратив полученную матрицу, найдите $g^{\alpha\beta}$. (*Ответ*:

$g_{00} = -1$, $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$ все остальные $g_{\alpha\beta} = 0$.

$g^{00} = -1$, $g^{rr} = 1$, $g^{\theta\theta} = r^{-2}$, $g^{\phi\phi} = r^{-2}\sin^{-2}\theta$ все остальные $g^{\alpha\beta} = 0$.)

д. Покажите, что некоординатный базис $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ везде является ортонормированным, т. е., что $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$, или

$$\mathbf{g} = -\omega^{\hat{0}}\otimes\omega^{\hat{0}} + \omega^{\hat{r}}\otimes\omega^{\hat{r}} + \omega^{\hat{\theta}}\otimes\omega^{\hat{\theta}} + \omega^{\hat{\phi}}\otimes\omega^{\hat{\phi}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

е. Запишите градиент функции f в сферических координатном и некоординатном базисах. (*Ответ*:

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathbf{d}t + \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{d}\phi =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial t}\boldsymbol{\omega}^{\hat{0}} + \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}.)$$

ж. Чему равны компоненты тензора Леви-Чивиты в сферических координатном и некоординатном базисах? (*Ответ для координатного базиса*:

$$\varepsilon_{0r\theta\phi} = -\varepsilon_{r0\theta\phi} = +\varepsilon_{r\theta 0\phi} = \ldots = r^{-2}\sin\theta,$$
$$\varepsilon^{0r\theta\phi} = -\varepsilon^{r0\theta\phi} = +\varepsilon^{r\theta 0\phi} = \ldots = -r^{-2}\sin^{-1}\theta.)$$

8.2. Коммутаторы

Встанем на точку зрения математика, который считает, что векторы и производные по направлению — одно и то же, $\mathbf{u} \equiv \partial_u$. Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два векторных поля; определим их коммутатор подобно тому, как это делается в квантовой механике:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv [\partial_u, \partial_v] \equiv \partial_u\partial_v - \partial_v\partial_u. \tag{8.13а}$$

а. Получите следующее выражение для $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, справедливое в любом *координатном базисе*:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta})\,\mathbf{e}_\alpha. \tag{8.13б}$$

Таким образом, несмотря на то, что $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ похоже на дифференциальный оператор второго порядка, на самом деле это оператор первого порядка, т. е. касательный вектор.

б. Для произвольного базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ определяем *коммутационные коэффициенты* $c_{\beta\gamma}{}^\alpha$ и $c_{\beta\gamma\alpha}$:

$$[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma] \equiv c_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad c_{\beta\gamma\alpha} \equiv g_{\alpha\mu}c_{\beta\gamma}{}^\mu. \tag{8.14}$$

Покажите, что для любого координатного базиса $c_{\beta\gamma}{}^\alpha = c_{\beta\gamma\alpha} = 0$.

в. Найдите $c_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}{}^{\hat{\alpha}}$ для сферического некоординатного базиса, рассмотренного в упражнении 8.1. (*Ответ*: все $c_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}{}^{\hat{\alpha}}$ равны нулю, за исключением

$$c_{\hat{r}\hat{\theta}}{}^{\hat{\theta}} = -c_{\hat{\theta}\hat{r}}{}^{\hat{\theta}} = -1/r,$$
$$c_{\hat{r}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}} = -c_{\hat{\phi}\hat{r}}{}^{\hat{\phi}} = -1/r,$$
$$c_{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}} = -c_{\hat{\phi}\hat{\theta}}{}^{\hat{\phi}} = -\operatorname{ctg}\theta/r.)$$

8.3. Компоненты тензора Леви-Чивиты в неортонормированной системе отсчета

а. Покажите, что выражения (8.10) представляют собой компоненты ε в произвольном базисе, где $\mathbf{e}_0$ направлен в будущее, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — правая тройка. [*Указания*: 1. Просмотрите описа-

УПРАЖНЕНИЯ

ние ε в лоренцевых системах, данное в упражнении 3.13. 2. Найдите $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ с помощью преобразования из локально лоренцевой системы $\{\mathbf{e}_{\hat{\mu}}\}$, например

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = L^{\hat{\mu}}{}_{\alpha} L^{\hat{\nu}}{}_{\beta} L^{\hat{\lambda}}{}_{\gamma} L^{\hat{\rho}}{}_{\delta} \varepsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}}.$$

3. Покажите, что эти выражения сводятся к

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \| L^{\hat{\mu}}{}_{\nu} \| \varepsilon_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \| L^{\nu}{}_{\hat{\mu}} \| \varepsilon^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}.$$

4. Исходя из закона преобразования для компонент метрики, покажите, что

$$(\det \| L^{\nu}{}_{\hat{\mu}} \|)^2 \det \| g_{\alpha\beta} \| = -1.$$

5. Объединив эти результаты, получите выражения (8.10).]

6. Покажите, что компоненты тензоров перестановок [определяемых соотношениями (3.50з) — (3.50к)], имеют в произвольных системах отсчета те же значения (3.50л) — (3.50н), что и в лоренцевых системах.

Дополнительные упражнения по тензорной алгебре — упражнения 9.3 и 9.4 (стр. 292).

Дополнение 8.4. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА В ФИКСИРОВАННОМ СОБЫТИИ В *ПРОИЗВОЛЬНОМ* БАЗИСЕ

А. Базисы

Базис касательных векторов: выбираем $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в $\mathscr{P}_0$ произвольным образом, но с условием, чтобы они были линейно независимы.

«Дуальный базис» 1-форм: базис $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ позволяет определить базис 1-форм $\{\omega^\alpha\}$ («дуальный к нему базис») из соотношения

$$\langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$$

[см. соотношение (2.19)].

Геометрическая интерпретация (фиг. 9.2): $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_0$ параллельны поверхностям ω^1, а $\mathbf{e}_1$ пересекает точно одну поверхность ω^1.

Функциональная интерпретация: равенство $\langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$ определяет значение ω^α на произвольном векторе $\mathbf{u} = u^\beta \mathbf{e}_\beta$ (число «ударов колокола», когда $\mathbf{u}$ пересекает ω^α):

$$\langle \omega^\alpha, \mathbf{u} \rangle = \langle \omega^\alpha, u^\beta \mathbf{e}_\beta \rangle = u^\beta \langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = u^\beta \delta^\alpha{}_\beta = u^\alpha.$$

Частный случай: *координатные базисы*. Выберем произвольную систему координат $\{x^\alpha(\mathscr{P})\}$. В событии $\mathscr{P}_0$ в качестве базисных векторов возьмем $\mathbf{e}_\alpha = \partial\mathscr{P}/\partial x^\alpha$. Тогда дуальный базис имеет вид $\omega^\alpha = \mathbf{d}x^\alpha$. *Доказательство*: общее соотношение $\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle = \partial_{\mathbf{v}} f$ (2.17), не зависящее от системы координат, при $f = x^\alpha$ и $\mathbf{v} = \partial\mathscr{P}/\partial x^\beta$ принимает вид

$$\langle \mathbf{d}x^\alpha, \partial\mathscr{P}/\partial x^\beta \rangle = (\partial/\partial x^\beta)\, x^\alpha = \delta^\alpha{}_\beta.$$

Б. Алгебра касательных векторов и 1-форм

Обсуждение соотношений (2.19) — (2.22) в лоренцевой системе совсем не меняется при переходе к произвольному базису. Основные выводы:

разложение, $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\alpha u^\alpha$, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\alpha \boldsymbol{\omega}^\alpha$;
нахождение компонент, $u^\alpha = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{u} \rangle$, $\sigma_\alpha = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle$;
значение формы на векторе, $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle = \sigma_\alpha u^\alpha$.

Приложение к градиентам функций:

разложение, $\mathbf{d}f = f_{,\alpha} \boldsymbol{\omega}^\alpha$ (определение $f_{,\alpha}$);
нахождение компонент, $f_{,\alpha} = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \partial_{\mathbf{e}_\alpha} f$ [см. соотношение (2.17)].

Поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ [соотношения (8.5) и (8.6)]. *Доказательство*:

$\widetilde{\mathbf{u}}$ — 1-форма, соответствующая вектору $\mathbf{u}$, определяется посредством соотношения $\langle \widetilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, которое должно выполняться для всех $\mathbf{v}$; тогда $u_\alpha \equiv \langle \widetilde{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\alpha = u^\beta \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = u^\beta g_{\beta\alpha}$; обратив это равенство, получаем $u^\beta = g^{\beta\alpha} u_\alpha$.

В. Переход к новому базису

Проведенное рассмотрение преобразований Лоренца и соотношения (2.39) — (2.43) применимы и к общему случаю перехода к новому базису, если заменить $\| \Lambda^{\alpha'}{}_\beta \|$ на произвольную несингулярную матрицу $\| L^{\alpha'}{}_\beta \|$ [соотношения (8.7), (8.8)]. Основные выводы:

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}_\beta L^\beta{}_{\alpha'}, \quad \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta;$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta, \quad \boldsymbol{\omega}^\beta = L^\beta{}_{\alpha'} \boldsymbol{\omega}^{\alpha'};$$

$$v^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\beta v^\beta, \quad v^\beta = L^\beta{}_{\alpha'} v^{\alpha'};$$

$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_\beta L^\beta{}_{\alpha'}, \quad \sigma_\beta = \sigma_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta.$$

Если оба базиса являются координатными базисами, то $L^\beta{}_{\alpha'} = \partial x^\beta / \partial x^{\alpha'}$, $L^{\alpha'}{}_\beta = \partial x^{\alpha'} / \partial x^\beta$. *Доказательство*:

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \mathbf{e}_\beta;$$

подобным же образом

$$\mathbf{e}_\beta = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_{\alpha'}.$$

Г. Алгебра тензоров

Все изложение § 3.2 [соотношения (3.8) — (3.22)] и § 3.5 (за исключением градиента и дивергенции), касающееся тензорной алгебры, остается без изменений, за исключением того, что

$$\eta_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}, \quad \eta^{\alpha\beta} \to g^{\alpha\beta}, \quad \Lambda^{\alpha'}{}_\beta \to L^{\alpha'}{}_\beta, \quad \Lambda^\beta{}_{\alpha'} \to L^\beta{}_{\alpha'},$$

а компоненты тензора Леви-Чивиты задаются (8.10) вместо (3.50) [см. упражнение 8.3].
Основные выводы:

разложение, $\mathbf{S} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\gamma}$;
компоненты, $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}, \mathbf{e}_{\gamma})$;
поднятие и опускание индексов, $S_{\mu\beta}{}^{\nu} = g_{\mu\alpha}g^{\nu\gamma}S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$;
переход к новому базису, $S^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} = L^{\lambda'}{}_{\alpha}L^{\beta}{}_{\mu'}L^{\gamma}{}_{\nu'}S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$;
действие линейных машин, $\mathbf{S}(\sigma, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha}u^{\beta}v^{\gamma}$;
тензорное произведение, $\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \Leftrightarrow T^{\alpha\beta} = u^{\alpha}v^{\beta}$;
свертка, «$\mathbf{M}$ = свертка $\mathbf{R}$ по каналам 1 и 3» $\Leftrightarrow M_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$;
косое произведение $\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$ обладает компонентами $\alpha^{\mu}\beta^{\nu} - \beta^{\mu}\alpha^{\nu}$;
дуальные тензоры, ${}^{*}J_{\alpha\beta\gamma} = J^{\mu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$, ${}^{*}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, ${}^{*}B_{\alpha} = \frac{1}{6}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}$.

Д. Коммутаторы (упражнение 8.2, § 9.6, дополнение 9.2)

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два поля касательных векторов, тогда, принимая во внимание, что $\mathbf{u} = \partial_{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{v} = \partial_{\mathbf{v}}$, положим по определению

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv [\partial_{\mathbf{u}}, \partial_{\mathbf{v}}] \equiv \partial_{\mathbf{u}}\partial_{\mathbf{v}} - \partial_{\mathbf{v}}\partial_{\mathbf{u}}.$$

Этот коммутатор сам есть поле касательного вектора. Компоненты в координатном базисе:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (u^{\beta}v^{\alpha}{}_{,\beta} - v^{\beta}u^{\alpha}{}_{,\beta})\,(\partial/\partial x^{\alpha}) \qquad \left[\,\partial/\partial x^{\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha}\right]$$

Коммутационные коэффициенты базиса:

$$[\mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}] \equiv c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\mathbf{e}_{\gamma}, \quad c_{\alpha\beta\mu} \equiv c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}g_{\gamma\mu}.$$

В координатном («голономном») базисе $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$.
В некоординатном («неголономном») базисе некоторые из $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \neq 0$ (см. упражнение 9.9).

§ 8.5. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС, КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗНОСТИ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Принцип эквивалентности — мост между плоским пространством-временем и искривленным

Мостом, связывающим классическую механику и квантовую механику, является принцип соответствия. Подобным же образом мостом между плоским пространством-временем и искривленным пространством-временем является принцип эквивалентности: «Законы физики в любой локально лоренцевой системе искривленного пространства-времени точно такие же, как и в глобальной лоренцевой системе плоского пространства-времени». Но чтобы применять принцип эквивалентности, необходимо иметь математ-

Локально лоренцева система: математическое представление

тическое описание локально лоренцевой системы. Очевидный способ выбора состоит в следующем: *локально лоренцева система в данном событии $\mathcal{P}_0$ представляет собой систему, которая лучше всего согласуется с глобальной лоренцевой системой в этом событии; т. е. это система координат, в которой*

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu\nu} \tag{8.15а}$$

и в которой $g_{\mu\nu}$ настолько близки к $\eta_{\mu\nu}$ в окрестности $\mathcal{P}_0$, насколько это возможно:

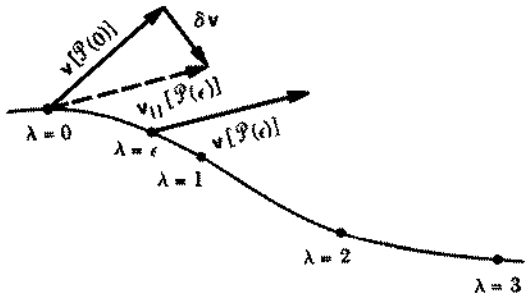
$$g_{\mu\nu,\alpha}(\mathcal{P}_0) = 0. \tag{8.15б}$$

В общем случае $g_{\mu\nu}$ нельзя сделать еще ближе к $\eta_{\mu\nu}$ [$g_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathcal{P}_0)$ нельзя обратить в нуль]; они должны изменяться из-за кривизны пространства-времени. [Рассмотрите соотношения (8.24) и (8.44) совместно с материалом § 11.5.]

Определение параллельного переноса

В локально лоренцевой системе в искривленном пространстве-времени наблюдатель может сравнивать векторы и тензоры в соседних событиях точно так же, как он делал бы это в плоском пространстве-времени. Но чтобы провести сравнение, он должен параллельно перенести их в одно общее событие. С его точки зрения параллельный перенос осуществляется просто: все компоненты в лоренцевой системе сохраняют свои значения точно так же, как если бы он находился в плоском пространстве-времени. Но для наблюдателя, не имеющего локально лоренцевой системы, а возможно, и вообще ни системы координат, ни базисных векторов, параллельный перенос не так прост. Он должен либо узнать результат у своего товарища из лоренцевой системы, либо использовать более сложную методику. Один метод, которым он может воспользоваться,—«лестница Шилда», для построения которой не нужны ни координаты, ни базисные векторы,— описан в § 10.2 и в дополнении 10.2. Но читателю курса 1 не требуется овладеть методом построения «лестницы Шилда». Он всегда может узнать результат любого заданного параллельного переноса у локально лоренцева наблюдателя или воспользоваться общими формулами, выведенными ниже.

Сравнение с помощью параллельного переноса есть то, на чем основано понятие градиента тензорного поля $\nabla\mathbf{T}$. В § 3.5, где впервые определен градиент, совсем не упоминается параллельный перенос, однако неявно параллельный перенос там использован: $\nabla\mathbf{T}$ определен таким образом, что его компоненты составляют $T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} = \partial T^{\alpha}_{\beta}/\partial x^{\gamma}$ [здесь $\mathbf{T}$ — тензор ранга $\binom{1}{1}$], т. е. $\nabla\mathbf{T}$ есть мера того, как компоненты $\mathbf{T}$ в лоренцевой системе меняются от точки к точке. Но «отсутствие изменения лоренцевых компонент» означало бы «параллельный перенос»; значит, мы неявным образом отыскивали изменение $\mathbf{T}$ по отношению к тому, во что $\mathbf{T}$ перешел бы в результате чисто параллельного переноса.



ФИГ 8.2.
Определение ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ векторного поля $\mathbf{v}$ вдоль кривой $\mathscr{P}(\lambda)$, касательным вектором к которой является $\mathbf{u} \equiv d\mathscr{P}/d\lambda$: 1. Выбираем на кривой точку $\mathscr{P}(0)$, в которой нужно найти $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. 2. Выбираем близлежащую точку кривой $\mathscr{P}(\varepsilon)$. 3. Перемещая $\mathbf{v}[\mathscr{P}(\varepsilon)]$ параллельным переносом вдоль кривой обратно в $\mathscr{P}(0)$, получаем вектор $\mathbf{v}_{\parallel}[\mathscr{P}(\varepsilon)]$. 4. Находим разность $\delta\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{\parallel}[\mathscr{P}(\varepsilon)] - \mathbf{v}[\mathscr{P}(0)]$. 5. Тогда $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ определяется как

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta\mathbf{v}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\mathbf{v}_{\parallel}[\mathscr{P}(\varepsilon)] - \mathbf{v}[\mathscr{P}(0)]}{\varepsilon}\right\}.$$

Чтобы перевести такое понятие дифференцирования на абстрактный язык, поступим следующим образом. Сначала определим ковариантную производную $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ тензора $\mathbf{T}$ вдоль кривой $\mathscr{P}(\lambda)$, касательный вектор которой равен $\mathbf{u} = \partial\mathscr{P}/d\lambda$:

Определение ковариантной производной

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T})_{\mathscr{P}_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\mathbf{T}[\mathscr{P}(\varepsilon)]_{\text{перенесенный параллельно в } \mathscr{P}(0)} - \mathbf{T}[\mathscr{P}(0)]}{\varepsilon}\right\}. \tag{8.16}$$

(Частный случай, когда $\mathbf{T}$ есть векторное поле $\mathbf{v}$, см. на фиг. 8.2.) Затем положим по определению, что $\nabla\mathbf{T}$ представляет собой линейную машину, которая при введении $\mathbf{u}$ в ее последний канал дает $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$:

Определение градиента

$$\nabla\mathbf{T}(\ldots, \ldots, \mathbf{u}) \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}. \tag{8.17}$$

В результате имеем тот же объект («градиент»), который был определен в § 3.5 (доказательство см. в упражнении 8.8). Но это альтернативное определение поясняет связь с параллельным переносом, используя тот факт, что

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{T} \text{ испытывает параллельный перенос вдоль } \mathbf{u} = d\mathscr{P}/d\lambda. \tag{8.18}$$

В локально лоренцевой системе компоненты $\nabla\mathbf{T}$ представляют собой производные по направлению от компонент $\mathbf{T}$: $T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}$. В случае общего базиса это не так. Если $\{\mathbf{e}_{\beta}(\mathscr{P})\}$ — базис, произволь-

ным, но гладким образом меняющийся от точки к точке, а $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathcal{P})\}$ — дуальный к нему базис, то наряду с $\nabla T^\beta{}_\alpha \equiv \mathbf{d}T^\beta{}_\alpha = T^\beta{}_{\alpha,\gamma}\boldsymbol{\omega}^\gamma$ в $\nabla\mathbf{T} = \nabla(T^\beta{}_\alpha \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha)$ войдет вклад от $\nabla\mathbf{e}_\beta$ и $\nabla\boldsymbol{\omega}^\alpha$.

Определение коэффициентов связности

Чтобы оценить вклад от $\nabla\mathbf{e}_\beta$ и $\nabla\boldsymbol{\omega}^\alpha$, т. е. чтобы количественно описать вращение, кручение, растяжение и сжатие базисных векторов и 1-форм, вводятся *коэффициенты связности*

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \underbrace{\nabla_\gamma \mathbf{e}_\beta}_{\equiv \nabla_{\mathbf{e}_\gamma}} \rangle = \left(\begin{array}{l} \alpha\text{-компонента изменения } \mathbf{e}_\beta \text{ при параллельном} \\ \text{переносе вдоль } \mathbf{e}_\gamma \end{array} \right) \tag{8.19a}$$

(обратите внимание на перестановку β и γ, смещающую индекс дифференцирования на последнее место в Γ); можно доказать также (упражнение 8.12), что

$$\langle \nabla_\gamma \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}. \tag{8.19б}$$

С помощью этих коэффициентов и

$$T^\beta{}_{\alpha,\gamma} \equiv \nabla_\gamma T^\beta{}_\alpha \equiv \partial_{\mathbf{e}_\gamma} T^\beta{}_\alpha \equiv \partial_\gamma T^\beta{}_\alpha \tag{8.20}$$

Компоненты градиента в произвольной системе

компоненты градиента, обозначаемые $T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$, представляются в виде

$$T^\beta{}_{\alpha;\gamma} = T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} T^\beta{}_\mu \tag{8.21}$$

(см. упражнение 8.13). Если бы базис в событии, где вычисляется $\nabla\mathbf{T}$, представлял собой локально лоренцеву систему, компоненты $\nabla\mathbf{T}$ были бы равны $T^\beta{}_{\alpha,\gamma}$. Поскольку это не так, такое «значение для лоренцевой системы» должно быть скорректировано на кручение, вращение, растяжение и сжатие базисных векторов и 1-форм. Члены вида ΓT в соотношении (8.21) и есть необходимые поправки — по одному на каждый индекс $\mathbf{T}$. Вид этих поправочных членов легко запомнить: 1) поправочный член для верхнего индекса берется со знаком «+», а для нижнего — со знаком «—»; 2) индекс дифференцирования (γ в рассмотренном выше случае) всегда стоит на последнем месте у Γ; 3) индекс, для которого выписывается поправка (β у первого члена, α — у второго), переходит от T к Γ, а на его месте у T появляется немой индекс суммирования (μ).

Зная компоненты градиента (8.21), компоненты ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ можно найти простой сверткой с u^γ [см. выражение (8.17)]:

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = (T^\beta{}_{\alpha;\gamma} u^\gamma) \mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha. \tag{8.22}$$

Когда $\mathbf{u}$ есть касательный вектор к кривой $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$, для компонент $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ используется обозначение $DT^{\beta}{}_{\alpha}/d\lambda$:

Компоненты ковариантной производной

(если базис является координатным базисом, то $u^{\gamma} = dx^{\gamma}/d\lambda$)

$$\frac{DT^{\beta}{}_{\alpha}}{d\lambda} \equiv T^{\beta}{}_{\alpha;\,\gamma}u^{\gamma} = T^{\beta}{}_{\alpha;\,\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} =$$

$$= (T^{\beta}{}_{\alpha,\,\gamma} + \text{поправки вида } \Gamma T)\, dx^{\gamma}/d\lambda =$$

$$= \frac{dT^{\beta}{}_{\alpha}}{d\lambda} + (\Gamma^{\beta}{}_{\mu\gamma}T^{\mu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}T^{\beta}{}_{\mu})\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda}. \qquad (8.23)$$

Точка с запятой в $T^{\beta}{}_{\alpha;\,\gamma}$ напоминает про поправочные члены вида ΓT, добавляемые к $T^{\beta}{}_{\alpha,\,\gamma}$; аналогично символ D в $DT^{\beta}_{\alpha}/d\lambda$ напоминает про поправочные члены вида ΓT, добавляемые к $dT^{\beta}{}_{\alpha}/d\lambda$.

Нахождение коэффициентов связности с помощью метрики и коммутаторов

Все это очень хорошо, но как для данного базиса найти коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$? Ответ, вывод которого дан в упражнении 8.15, состоит в следующем: 1) берем метрические коэффициенты в данном базисе; 2) находим производные от них по базисным направлениям

$$g_{\beta\gamma,\,\mu} \equiv \partial_{\mu}g_{\beta\gamma} = \partial g_{\beta\gamma}/\partial x^{\mu}; \qquad (8.24а)$$

$\equiv \partial_{\mathbf{e}_{\mu}}$ [если используется координатный базис $\mathbf{e}_{\mu} = \partial\mathcal{P}/\partial x^{\mu}$]

3) находим коммутационные коэффициенты базиса [в общем случае согласно уравнениям (8.14); в частном случае координатного базиса $c_{\mu\beta\gamma} = 0$]; 4) находим «ковариантные коэффициенты связности»

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\,\gamma} + g_{\mu\gamma,\,\beta} - g_{\beta\gamma,\,\mu} + \underbrace{c_{\mu\beta\gamma} + c_{\mu\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\mu}}); \qquad (8.24б)$$

в координатном базисе эти члены равны 0

5) поднимаем индекс, получая в результате коэффициенты связности

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}. \qquad (8.24в)$$

(*Замечание по терминологии.* В координатном базисе, иногда называемом *голономным*, всегда $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$, в некоординатном базисе, иногда называемом *неголономным*, всегда некоторые из $c_{\alpha\beta\gamma}$ отличны от нуля. В случае голономного базиса коэффициенты связности иногда называются *символами Кристоффеля*.)

Компонентные обозначения с их точками с запятыми, запятыми, символами D, коэффициентами связности и т. п. с первого взгляда выглядят довольно сложными. Но как только мы углубляемся в теорию гравитации, то сразу обнаруживаем, что в них

кроются огромные вычислительные возможности, а правила обращения с ними достаточно просты и легко усваиваются. Абстрактные обозначения ($\nabla\mathbf{T}$, $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ и т. п.), напротив, плохо приспособлены для сложных выкладок, но очень наглядны.

Определение геодезической и аффинного параметра

Это различие четко проявляется в том, как в двух системах обозначений описывается понятие *геодезической*. В пространстве-времени геодезическая представляет собой кривую, которая в каждой локально лоренцевой системе, построенной в точках кривой, является прямой и имеет равномерную параметризацию. Если геодезическая времениподобна, то она может представлять собой мировую линию частицы в состоянии свободного падения, причем ее равномерно изменяющийся параметр λ (называемый *аффинным параметром*) отличается лишь на множитель от собственного времени частицы: $\lambda = a\tau + b$. (Принцип эквивалентности: пробные частицы движутся по прямым линиям в локально лоренцевых системах; у каждой частицы с точки зрения произвольного лоренцева наблюдателя часы идут с постоянной скоростью.) Это определение геодезической легко формулируется на абстрактном свободном от координат языке: геодезическая есть кривая $\mathcal{P}(\lambda)$, касательный вектор которой $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ переносится параллельно вдоль нее самой:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0 \tag{8.25}$$

(см. фиг. 10.1). Что может быть проще с идейной точки зрения? Но чтобы по заданному начальному событию $\mathcal{P}_0$ и начальному касательному вектору $\mathbf{u}(\mathcal{P}_0)$ в нем рассчитать геодезическую, необходимо воспользоваться компонентным формализмом. Введем систему координат $x^\alpha(\mathcal{P})$, в которой $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, и запишем уравнение (8.25) в компонентной форме:

$$0 = \frac{D\,(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\,(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} + \left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

(ср. с (8.23), где у T на один индекс меньше); получаем

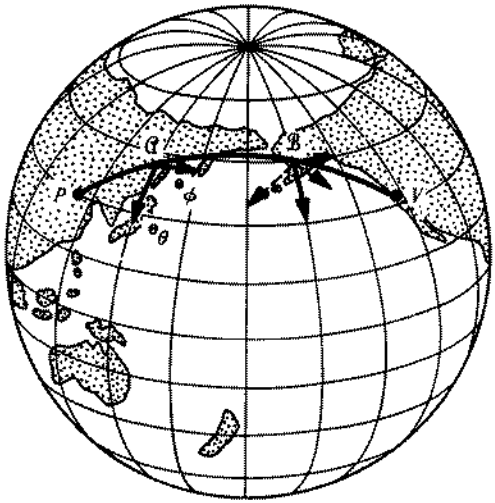
Уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{8.26}$$

Если заданы начальные данные (x^α и $dx^\alpha/d\lambda$ при $\lambda = \lambda_0$), то это *уравнение геодезических* можно (в принципе) разрешить относительно координат геодезической $x^\alpha(\lambda)$.

Геодезические на поверхности Земли (окружности больших кругов) позволяют лучше представить себе, что такое коэффициенты связности (фиг. 8.3).

Материал данного параграфа изложен более глубоко и с различных точек зрения в гл. 10 и 13. Читателю курса 2, который намеревается изучить эти главы, можно посоветовать опустить следующие ниже упражнения. Читатель курса 1, который намеревается пропустить гл. 9—15, проработав упражнения 8.4—8.7, приобретет необходимый навык оперирования с компонентами.



ФИГ. 8.3.

Схематическое пояснение возникновения коэффициентов связности. Летчик, следующий по маршруту Пекин — Ванкувер вдоль окружности большого круга, видит, что сначала он летит на север, а затем на юг, несмотря на то, что он все время летит по кратчайшему маршруту из всех, которые ему доступны (по геодезической). Кажущееся изменение направления означает поворот, но не курса летчика, а системы координат, по отношению к которой этот курс измеряется. Если вектор его скорости $\mathbf{v}$ (вектор, определенный не в пространстве-времени, а на двумерной поверхности Земли), взятый в более ранний момент времени, переместить с помощью параллельного переноса в точку, где летчик находится в более поздний момент, то мы обнаружим, что он совпадает с вектором скорости летчика в этот более поздний момент; на абстрактном языке свободной от координат дифференциальной геометрии ковариантная производная $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ равна нулю на всем пути следования («уравнение геодезической»). Хотя $\mathbf{v}$ в этом смысле и постоянен, отдельные слагаемые, из которых, с точки зрения летчика, состоит этот вектор, $\mathbf{v} = v^\theta \mathbf{e}_\theta + v^\phi \mathbf{e}_\phi$, отнюдь не постоянны.

На языке компонент величины v^θ и v^ϕ изменяются вдоль пути следования со скоростью, необходимой для обращения в нуль ковариантной производной от $\mathbf{v}$, т. е.

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = \mathbf{a} = a^\phi \mathbf{e}_\phi + a^\theta \mathbf{e}_\theta = 0,$$

или

$$0 = a^\theta = \frac{dv^\theta}{dt} + \Gamma^\theta{}_{mn} v^m v^n, \quad 0 = a^\phi = \frac{dv^\phi}{dt} + \Gamma^\phi{}_{mn} v^m v^n.$$

В этом смысле коэффициенты связности играют роль «коэффициентов поворота», которые говорят нам, с какой скоростью следует «поворачивать» компоненты вектора, чтобы сохранять вектор постоянным (компенсировать эффект поворота базисных векторов).

С другой стороны, летчик может воспользоваться «автопилотом», который осуществляет параллельный перенос своих собственных базисных векторов вдоль курса самолета: $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_{\theta'} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_{\phi'} = 0$; векторы, изображенные в $\mathscr{A}$ сплошными линиями, переходят в векторы, изображенные в $\mathscr{B}$ штриховыми линиями. Тогда, чтобы путь следования был окружностью большого круга, компоненты $\mathbf{v}$ должны сохранять постоянные значения;

$$\frac{dv^{\theta'}}{dt} = \frac{dv^{\phi'}}{dt} = 0;$$

коэффициенты поворота описывают поворот параллелей и меридианов по отношению к параллельно переносимому базису:

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_m \Gamma^m{}_{\theta n} v^n, \qquad \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_m \Gamma^m{}_{\phi n} v^n.$$

В обоих случаях рассматриваются одни и те же коэффициенты поворота. Разница лишь в том, как они используются.

Не столь важными, хотя и полезными, будут для него упражнения 8.8—8.15, в которых формализм ковариантных производных и коэффициентов связности развивается гораздо систематичнее. Наиболее важные результаты этих упражнений кратко сформулированы в дополнении 8.6 (стр. 278).

УПРАЖНЕНИЯ

8.4. Выписывание компонент градиента

Запишите следующие величины через обычные производные ($f_{,\nu} \equiv \partial_{\mathbf{e}_\nu} f \equiv \nabla_\nu f$) и поправочные члены вида ΓT: а) $T_{;\nu}$, где T — функция; б) $T^\alpha{}_{;\nu}$, где $\mathbf{T}$ — вектор; в) $T_{\alpha;\nu}$, где $\mathbf{T}$ — 1-форма; г) $T_{\beta\delta}{}^{\varepsilon}{}_{;\nu}$. [*Ответ*:

а) $T_{;\nu} = T_{,\nu}$; б) $T^\alpha{}_{;\nu} = T^\alpha{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} T^\mu$; в) $T_{\alpha;\nu} = T_{\alpha,\nu} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} T_\mu$;

г) $T^\alpha{}_{\beta\delta}{}^{\varepsilon}{}_{;\nu} = T^\alpha{}_{\beta\delta}{}^{\varepsilon}{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} T^\mu{}_{\beta\delta}{}^{\varepsilon} - \Gamma^\mu{}_{\beta\nu} T^\alpha{}_{\mu\delta}{}^{\varepsilon} - \Gamma^\mu{}_{\delta\nu} T^\alpha{}_{\beta\mu}{}^{\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}{}_{\mu\nu} T^\alpha{}_{\beta\delta}{}^{\mu}$.]

8.5. Лист бумаги в полярных координатах

Двумерная метрика на плоском листе бумаги в полярных координатах (r, ϕ) имеет вид: $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2$, или в современных обозначениях $\mathbf{g} = \mathbf{d}r \otimes \mathbf{d}r + r^2\, \mathbf{d}\phi \otimes \mathbf{d}\phi$.

а. Используя соотношения (8.24), найдите коэффициенты связности. [*Ответ*: $\Gamma^r{}_{\phi\phi} = -r$, $\Gamma^\phi{}_{r\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi r} = 1/r$; все остальные равны нулю.]

б. Запишите уравнение геодезических в координатах (r, ϕ). [*Ответ*: $d^2r/d\lambda^2 - r\,(d\phi/d\lambda)^2 = 0$, $d^2\phi/d\lambda^2 + (2/r)\,(dr/d\lambda)\,(d\phi/d\lambda) = 0$.]

в. Разрешите это уравнение геодезических относительно $r(\lambda)$ и $\phi(\lambda)$ и покажите, что решение есть равномерно параметризованная прямая линия ($x \equiv r\cos\varphi = a\lambda + b$, где a и b произвольны; $y \equiv r\sin\phi = j\lambda + k$, где j и k произвольны).

г. Убедитесь, что некоординатный базис $\mathbf{e}_{\hat{r}} \equiv \mathbf{e}_r = \partial\mathcal{P}/\partial r$, $\mathbf{e}_{\hat{\phi}} \equiv r^{-1}\mathbf{e}_\phi = r^{-1}\partial\mathcal{P}/\partial\phi$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = \mathbf{d}r$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\,\mathbf{d}\phi$ является ортонормированным и что $\langle \boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}, \mathbf{e}_{\hat{\beta}} \rangle = \delta^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}$. Затем, зная коэффициенты связности координатного базиса (пункт «а»), найдите коэффициенты связности данного базиса. [*Ответ*:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}\hat{r}} &= \langle \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \nabla_{\hat{r}} \mathbf{e}_{\hat{\phi}} \rangle = \langle r\,\mathbf{d}\phi, \nabla_r (r^{-1}\mathbf{e}_\phi) \rangle = \\
&= r\,\langle \mathbf{d}\phi, (\nabla_r r^{-1})\,\mathbf{e}_\phi + r^{-1}(\nabla_r \mathbf{e}_\phi) \rangle = \\
&= r\,\langle \mathbf{d}\phi, -r^{-2}\mathbf{e}_\phi \rangle + \langle \mathbf{d}\phi, \nabla_r \mathbf{e}_\phi \rangle = \\
&= -r^{-1} + \Gamma^\phi{}_{\phi r} = -r^{-1} + r^{-1} = 0;
\end{aligned}$$

аналогично $\Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}} = +1/r$, $\Gamma^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -1/r$; все остальные равны нулю.]

д. Рассмотрите кеплеровскую орбиту, показанную на фиг. 8.1 и изучавшуюся в § 8.3, как негеодезическую кривую в двумерной эвклидовой экваториальной плоскости Солнца. Вместо старых обозначений dv/dt, $de_{\hat{r}}/dt$ и т. п. используйте новые обозначения $\nabla_{\mathbf{v}}$, $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_{\hat{r}}$ и т. п. Тогда $\mathbf{v} = d\mathcal{P}/dt$ — касательный вектор орбиты, а $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ — ускорение. Выведите уравнения (8.4) для $a^{\hat{r}}$ и $a^{\hat{\phi}}$, оперируя компонентами и коэффициентами связности в ортонормированном базисе.

8.6. Сферические координаты в плоском пространстве-времени

Сферический некоординатный базис $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$, введенный в упражнении 8.1, ортонормирован, $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, но его коммутационные коэффициенты не равны нулю [пункт «в» упражнения 8.2].

а. Используя соотношения (8.24), найдите коэффициенты связности в этом базисе. [*Ответ*:

$$\Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} = \Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}} = -\Gamma^{\hat{r}}{}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = -\Gamma^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = 1/r,$$

$$\Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} = -\Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \operatorname{ctg}\theta/r;$$

все остальные равны нулю.]

б. Запишите выражения для $\nabla_{\hat{\alpha}}\mathbf{e}_{\hat{\beta}}$ через $\mathbf{e}_{\hat{\gamma}}$ и проверьте правильность этих выражений, нарисовав расположение базисных векторов на сфере постоянных t и r. [*Ответ*:

$$\nabla_{\hat{\theta}}\mathbf{e}_{\hat{r}} = r^{-1}\mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \quad \nabla_{\hat{\theta}}\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = -r^{-1}\mathbf{e}_{\hat{r}}, \quad \nabla_{\hat{\phi}}\mathbf{e}_{\hat{r}} = r^{-1}\mathbf{e}_{\hat{\phi}},$$

$$\nabla_{\hat{\phi}}\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = (\operatorname{ctg}\theta/r)\,\mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \quad \nabla_{\hat{\phi}}\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = -r^{-1}\mathbf{e}_{\hat{r}} - (\operatorname{ctg}\theta/r)\,\mathbf{e}_{\hat{\theta}}.$$

Все остальные равны нулю.]

в. Получите выражение для дивергенции вектора $\nabla\cdot\mathbf{A} = A^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\alpha}}$ в этом базисе. [*Ответ*:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = A^{\hat{t}}{}_{,\hat{t}} + r^{-2}(r^2A^{\hat{r}})_{,\hat{r}} + (\sin\theta)^{-1}(\sin\theta A^{\hat{\theta}})_{,\hat{\theta}} + A^{\hat{\phi}}{}_{,\hat{\phi}} =$$

$$= \frac{\partial A^{\hat{t}}}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A^{\hat{r}})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A^{\hat{\theta}})}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A^{\hat{\phi}}}{\partial\varphi}.$$

Этот ответ должен быть знаком читателю из векторного анализа в плоском пространстве.

8.7. Симметрии коэффициентов связности

Исходя из соотношения (8.24б), симметрии метрики и антисимметрии ($c_{\beta\gamma\mu} = -c_{\gamma\beta\mu}$) коммутационных коэффициентов, покажите, что $\Gamma_{\alpha[\beta\gamma]} = 0$ (симметричны по последним двум индексам) в координатном базисе; $\Gamma_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})\hat{\gamma}} = 0$ (антисимметричны по первым двум индексам) в глобально ортонормированном базисе, $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Систематический вывод результатов § 8.5

8.8. Сравнение нового и старого определений $\nabla \mathbf{T}$

Новое определение $\nabla \mathbf{T}$ дается соотношениями (8.16) и (8.17). Используя тот факт, что при параллельном переносе локально лоренцевы компоненты не меняются, из (8.16) получите соотношение $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{T} = T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma} u^{\gamma} \mathbf{e}_{\beta} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\alpha}$, справедливое в лоренцевой системе. Отсюда и из соотношения (8.17) выведите, что компоненты $\nabla \mathbf{T}$ в лоренцевой системе равны $T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}$, что находится в согласии со старым определением $\nabla \mathbf{T}$.

8.9. Дифференцирование произведения

а. Производя выкладки в локально лоренцевой системе, покажите, что для оператора «$\nabla_{\mathbf{u}}$» справедливо обычное правило дифференцирования произведения:

$$\nabla_{\mathbf{u}} (f\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\nabla_{\mathbf{u}} f)\, \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + f (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} + f\mathbf{A} \otimes (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{B}). \quad (8.27)$$

Здесь $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные векторы, 1-формы или тензоры, а f — произвольная функция. [*Указание*: для определенности предположите, что $\mathbf{A}$ — тензор ранга $\binom{1}{1}$, а $\mathbf{B}$ — вектор. Тогда компонентная запись этого равенства в лоренцевой системе имеет вид

$$(fA^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma})_{,\delta} u^{\delta} = (f_{,\delta} u^{\delta})\, A^{\alpha}{}_{\beta} B^{\gamma} + f (A^{\alpha}{}_{\beta,\delta} u^{\delta})\, B^{\gamma} + f A^{\alpha}{}_{\beta}\, (B^{\gamma}{}_{,\delta} u^{\delta}).] \quad (8.27')$$

б. Перепишите соотношение (8.27) в компонентных обозначениях в произвольном базисе. [*Ответ*: по виду совпадает с (8.27′), в котором запятая в индексах везде заменена на точку с запятой. *Примите во внимание*, что $f_{;\delta}\, u^{\delta} = f_{,\delta}\, u^{\delta}$, поскольку у функции f «нет компонент, которые нужно корректировать».]

8.10. Ковариантная производная коммутирует со сверткой

Пусть $\mathbf{S}$ — тензор ранга $\binom{1}{2}$. С помощью компонент в локально лоренцевой системе покажите, что

$$\nabla_{\mathbf{u}} (\text{свертка } \mathbf{S} \text{ по каналам 1 и 2}) = (\text{свертка } \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S} \text{ по каналам 1 и 2}). \quad (8.28)$$

[*Указание*: В локально лоренцевой системе это уравнение сводится к тривиальному соотношению

$$\left(\sum_{\alpha} S^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\right)_{,\gamma} u^{\gamma} = \sum_{\alpha} (S^{\alpha}{}_{\alpha\beta,\gamma} u^{\gamma}).]$$

УПРАЖНЕНИЯ

8.11. Алгебраические свойства оператора ∇

С помощью выкладок в локально лоренцевой системе покажите, что

$$\nabla_{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}}\mathbf{S} = a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} + b\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{S} \tag{8.29}$$

для любых касательных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и чисел a, b и

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}+\mathbf{M}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{M} \tag{8.30}$$

для любых тензорных полей $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$ одинакового ранга; а также, что

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = \underbrace{[\mathbf{u}, \mathbf{w}]}$$

[коммутатор $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ рассмотрен в упражнении 8.2

для любых векторных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$.

8.12. Коэффициенты связности для базиса 1-форм

Покажите, что те же коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, которые описывают изменение $\{\mathbf{e}_\beta\}$ от точки к точке [определение (8.19а)], описывают с точностью до перемены знака и изменение $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ [соотношение (8.19б)]. {*Ответ*: 1. $\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta\rangle = \delta^\alpha{}_\beta$ — постоянная функция (1 или 0, в зависимости от того, равны между собой α и β или нет). 2. Тогда $\nabla_\gamma\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta\rangle = \partial_{\mathbf{e}_\gamma}\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta\rangle = 0$. 3. Но $\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta\rangle$ есть свертка $\boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$, поэтому из соотношения (8.28) следует, что $0 = \nabla_\gamma$ (свертка $\boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$) = свертка $[\nabla_\gamma(\boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta)]$. 4. Применяя правило дифференцирования произведения (8.27), приходим к выводу, что $0 =$ свертка $[(\nabla_\gamma\boldsymbol{\omega}^\alpha) \otimes \mathbf{e}_\beta + \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes (\nabla_\gamma\mathbf{e}_\beta)] = \langle\nabla_\gamma\boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta\rangle + \langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \nabla_\gamma\mathbf{e}_\beta\rangle$. 5. Наконец, воспользовавшись определением (8.19а), приходим к требуемому результату (8.19б).}

8.13. Поправочные члены вида ΓT для $T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}$

Выведите соотношение (8.21) для $T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}$ в произвольном базисе, вычислив сначала при произвольном $\mathbf{u}$ компоненты $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$, а затем с помощью соотношения (8.17), отыскав компоненты $\nabla\mathbf{T}$. [*Ответ*: 1. Используя правило дифференцирования произведения (8.27), получим

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{u}}(T^{\beta}{}_{\alpha}\mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha) =$$
$$= (\nabla_{\mathbf{u}}T^{\beta}{}_{\alpha})\,\mathbf{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha + T^{\beta}{}_{\alpha}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\beta) \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha + T^{\beta}{}_{\alpha}\mathbf{e}_\beta \otimes (\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\omega}^\alpha).$$

2. Распишем $\mathbf{u}$ через компоненты $\mathbf{u} = u^\gamma\mathbf{e}_\gamma$; используя линейность $\nabla_{\mathbf{u}}$ по $\mathbf{u}$ согласно (8.29), пишем $\nabla_{\mathbf{u}} = u^\gamma\nabla_\gamma$ и подставляем это

УПРАЖНЕНИЯ

в $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = u^{\nu}\{T^{\beta}{}_{\alpha,\nu}\mathbf{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha} + T^{\beta}{}_{\alpha}(\nabla_{\nu}\mathbf{e}_{\beta})\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha} + T^{\beta}{}_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}\otimes(\nabla_{\nu}\boldsymbol{\omega}^{\alpha})\}.$$

3. Используя соотношения (8.19а, б), в форме

$$\nabla_{\nu}\mathbf{e}_{\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}\mathbf{e}_{\mu}, \quad \nabla_{\nu}\boldsymbol{\omega}^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\boldsymbol{\omega}^{\mu}, \tag{8.32}$$

представляем $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ в виде

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = u^{\nu}\{T^{\beta}{}_{\alpha,\nu}\mathbf{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}T^{\beta}{}_{\alpha}\mathbf{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}T^{\beta}{}_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\mu}\}.$$

4. Переобозначаем немые индексы так, чтобы можно было вынести базисный тензор $\mathbf{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha}$:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = u^{\nu}\{T^{\beta}{}_{\alpha,\,\nu} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}T^{\mu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}T^{\beta}{}_{\mu}\}\,\mathbf{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha}.$$

5. Сравнивая с

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T}(\ldots,\ldots,\mathbf{u}) = (T^{\beta}{}_{\alpha;\nu}u^{\nu})\,\mathbf{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha},$$

выписываем значения $T^{\beta}{}_{\alpha;\nu}$.]

8.14. Метрика ковариантно постоянна

Из физических соображений (используя свойства локально лоренцевых систем) покажите, что

$$\nabla\mathbf{g} = 0, \tag{8.33}$$

или, что эквивалентно, $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g} = 0$ для любого вектора $\mathbf{u}$. Затем в качестве математического следствия выведите правило дифференцирования произведения

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{B}).$$

[*Ответ*: 1. Как было указано в тексте вслед за уравнением (8.18), в котором вместо $\mathbf{T}$ надо подставить $\mathbf{g}$, компонентами $\nabla_{\mathbf{g}}$ в локально лоренцевой системе являются $g_{\mu\nu,\,\alpha}$. Но все эти компоненты, согласно (8.15б), равны нулю. Поэтому уравнение (8.33) справедливо в этой системе, а следовательно, поскольку оно является тензорным уравнением, и во всех системах. 2. Правило дифференцирования произведения тоже представляет собой тензорное соотношение, и в его справедливости немедленно убеждаемся с помощью компонент в локально лоренцевой системе. 3. Докажем также правило дифференцирования произведения более громоздким способом, чтобы выяснить, где используется уравнение (8.33). Воспользуемся правилом упражнения 8.9:

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{g}\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g})\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} + \mathbf{g}\otimes(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A})\otimes\mathbf{B} + \mathbf{g}\otimes\mathbf{A}\otimes(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{B}).$$

Опускаем, согласно (8.33), первое слагаемое и свертываем; в результате получаем

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \text{свертка}\ (\mathbf{g}\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})$$

и остальные внутренние произведения. Меняя в левой части последовательность применения свертки и $\nabla_{\mathbf{u}}$, мы воспользовались результатом упражнения 8.10.]

8.15. Коэффициенты связности, выраженные через метрику

Используя тот факт, что метрика ковариантно постоянна [уравнение (8.33)], выведите выражение (8.24б) для коэффициентов связности. Считайте соотношение (8.24в) определением для $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$, выраженных через $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$. [*Ответ*: 1. Находим компоненты $\nabla\mathbf{g}$ в произвольной системе:

$$g_{\alpha\beta;\,\gamma} = 0 = g_{\alpha\beta,\,\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} g_{\mu\alpha} \equiv g_{\alpha\beta,\,\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma},$$

откуда делаем вывод, что $g_{\alpha\beta,\,\gamma} = 2\Gamma_{(\alpha\beta)\gamma}$. (Круглыми скобками обозначена симметричная часть.) 2. Выписываем члены с метрикой, входящие в ответ для $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$:

$$\frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\,\gamma} + g_{\mu\gamma,\,\beta} - g_{\beta\gamma,\,\mu}) = \Gamma_{(\mu\beta)\gamma} + \Gamma_{(\mu\gamma)\beta} - \Gamma_{(\beta\gamma)\mu} =$$

$$= \frac{1}{2}[(\Gamma_{\mu\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\mu\beta} - \Gamma_{\beta\gamma\mu} - \Gamma_{\gamma\beta\mu}] =$$

$$= \Gamma_{\mu\beta\gamma} + (-\Gamma_{\mu[\beta\gamma]} + \Gamma_{\beta[\mu\gamma]} + \Gamma_{\gamma[\mu\beta]}).$$

3. Из соотношения (8.31), взяв в качестве $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ базисные векторы $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\mu}$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_{\nu}$, получаем

$$c_{\mu\nu}{}^{\rho}\mathbf{e}_{\rho} \equiv [\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{e}_{\nu}] = \nabla_{\mu}\mathbf{e}_{\nu} - \nabla_{\nu}\mathbf{e}_{\mu} =$$
$$= (\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu})\,\mathbf{e}_{\rho} = 2\Gamma^{\rho}{}_{[\nu\mu]}\mathbf{e}_{\rho},$$

т. е.

$$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]} = -\frac{1}{2} c_{\mu\nu}{}^{\rho}, \qquad \Gamma_{\rho[\mu\nu]} = -\frac{1}{2} c_{\mu\nu\rho}. \tag{8.34}$$

4. Эти выражения в совокупности с выражениями, полученными на втором этапе, приводят к требуемой формуле для $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$.

---

§ 8.6. ЛОКАЛЬНО ЛОРЕНЦЕВЫ СИСТЕМЫ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Наблюдатель, находящийся в состоянии свободного падения в искривленном пространстве-времени, проводит измерения в своей локально лоренцевой системе. В частях I и II этой книги подробно описывается, что он при этом обнаруживает. Теперь мы попы-

таемся получить основные результаты его наблюдений с помощью формализма предыдущего параграфа.

Локально лоренцева система

Выберем событие $\mathcal{P}_0$ на мировой линии наблюдателя. Его (локально лоренцевой системой в этом событии будет система координат $x^\alpha(\mathcal{P})$, в которой

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \equiv \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta} \text{ в } \mathcal{P}_0 \tag{8.35а}$$

(лоренцева метрика в $\mathcal{P}_0$) и

$$\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\mu = 0 \text{ в } \mathcal{P}_0 \tag{8.35б}$$

(метрика, как можно более близкая к лоренцевой вблизи $\mathcal{P}_0$) [см. соотношения (8.15)]. К тому же ввиду соотношений (8.24)

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0 \text{ в } \mathcal{P}_0 \tag{8.36}$$

(«поправочные члены» в ковариантных производных отсутствуют). Наблюдатель, конечно, должен покоиться в своей локально лоренцевой системе, т. е. его мировая линия должна иметь вид

$$x^j = x^j(\mathcal{P}_0) = \text{const}; \quad x^0 \text{ меняется.} \tag{8.37}$$

Вопрос. Соотношения (8.35) — (8.37) обеспечивают неподвижность наблюдателя по отношению к локально лоренцевой системе. Следует ли из них, что он находится в состоянии свободного падения? (Должно следовать!) *Ответ.* Найдем 4-ускорение наблюдателя $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau$ (в обозначениях гл. 6) $= \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ (в обозначениях данной главы). Его 4-скорость, определяемая соотношениями (8.37), равна

Начало свободно падает вдоль геодезической

$$\mathbf{u} = (dx^\alpha/d\tau)\,\mathbf{e}_\alpha = (dx^0/d\tau)\,\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0; \tag{8.38}$$

поскольку $\mathbf{u}$ и $\mathbf{e}_0$ имеют единичную длину

отсюда его 4-ускорение равно

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{e}_0}\mathbf{e}_0 = \Gamma^\alpha{}_{00}\mathbf{e}_\alpha = 0 \text{ в } \mathcal{P}_0. \tag{8.39}$$

Таким образом, наблюдатель действительно находится в состоянии свободного падения ($\mathbf{a} = 0$), он движется по геодезической ($\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$).

Частицы в состоянии свободного падения движутся по прямым линиям

Вопрос. Действительно ли частицы в состоянии свободного падения движутся по прямым линиям ($d^2x^\alpha/d\tau^2 = 0$) в локально лоренцевой системе наблюдателя в $\mathcal{P}_0$? (Они должны так двигаться!) *Ответ.* Частица в свободном падении не испытывает 4-ускорения:

$$\mathbf{a}_{\text{частицы}} = \nabla_{\mathbf{u}_{\text{частицы}}}\mathbf{u}_{\text{частицы}} = 0;$$

таким образом, она параллельно переносит свою скорость, т. е. движется по геодезической в пространстве-времени, аффинный параметр которой равен ее собственному времени. Уравнение

геодезических, записанное для ее мировой линии в локально лоренцевых координатах, имеет вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \text{ в } \mathcal{P}_0.$$

Мировая линия частицы в $\mathcal{P}_0$ действительно является прямой.

Базисные векторы в начале координат испытывают перенос Ферми — Уолкера

Вопрос. Переносит ли свободно падающий наблюдатель свои пространственные базисные векторы $\mathbf{e}_j$ переносом Ферми — Уолкера, т. е. может ли он связать их с гироскопами, движущимися вместе с ним? (Он должен иметь такую возможность!) *Ответ.* Закон переноса Ферми — Уолкера (дополнение 6.2) имеет вид

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{e}_j}{d\tau}}_{\text{в старых обозначениях}} \equiv \underbrace{\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_j}_{\text{в новых обозначениях}} = \mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_j) - \mathbf{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_j).$$

Но $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_j = 0$ и 4-ускорение наблюдателя $\mathbf{a} = 0$; поэтому перенос Ферми — Уолкера в данном случае сводится к параллельному переносу вдоль $\mathbf{e}_0$, таким образом, $\nabla_0\mathbf{e}_j = 0$. Векторы $\mathbf{e}_j$ действительно именно так и переносятся через точку $\mathcal{P}_0$, поскольку

$$\nabla_0\mathbf{e}_j = \Gamma^\alpha_{j0}\mathbf{e}_\alpha = 0 \text{ в } \mathcal{P}_0.$$

§ 8.7. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНА

«Тяготение есть проявление кривизны пространства-времени, а о кривизне мы узнаем по отклонению одной геодезической от близлежащей другой геодезической (относительное ускорение пробных частиц)». Чтобы это утверждение стало точным, необходимо сначала количественно описать «отклонение», или «относительное ускорение» соседних геодезических.

Рассмотрим семейство геодезических $\mathcal{P}(\lambda, n)$, фиг. 8.4. Непрерывно изменяющийся параметр n («параметр отбора») позволяет отличать одну геодезическую от другой. При фиксированном n $\mathcal{P}(\lambda, n)$ есть геодезическая с аффинным параметром λ и касательным вектором

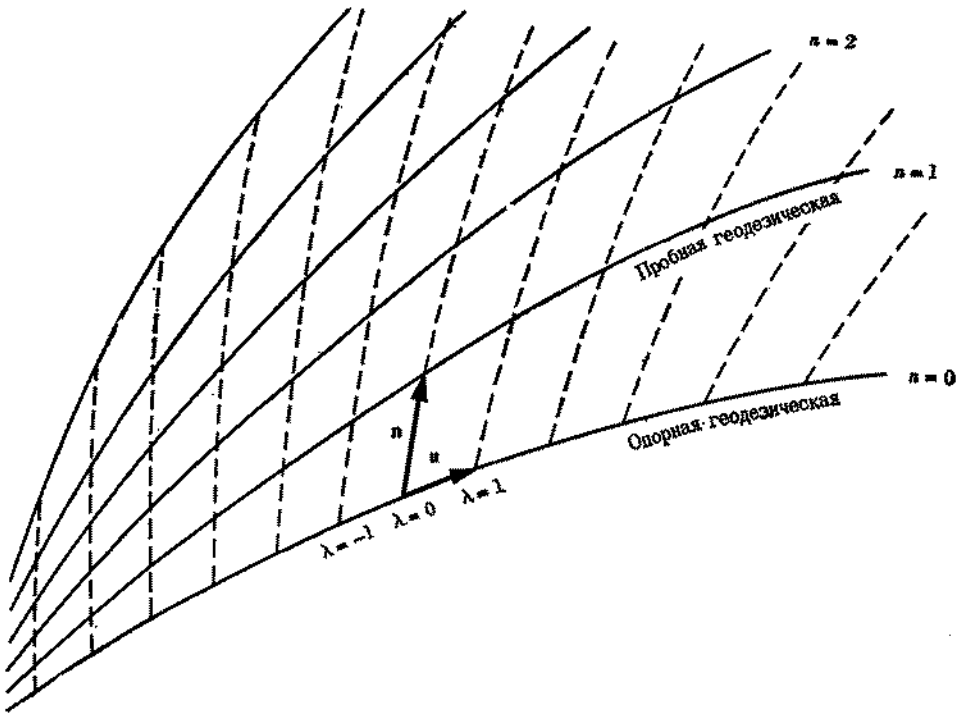
$$\mathbf{u} = \partial\mathcal{P}/\partial\lambda. \tag{8.40}$$

Тогда $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$ (уравнение геодезических). Вектор

$$\mathbf{n} = \partial\mathcal{P}/\partial n \tag{8.41}$$

служит мерой разделения двух точек с одним и тем же значением λ на соседних геодезических.

Наблюдатель, свободно падающий вдоль «опорной геодезической» $n = 0$, следит за пробной частицей, свободно падающей вдоль



ФИГ. 8.4.
Семейство геодезических $\mathscr{P}(\lambda, n)$. Параметр отбора n позволяет узнать, «которая» из геодезических; аффинный параметр λ позволяет узнать, «где» на данной геодезической. Острие разделяющего вектора $\mathbf{n} \equiv \partial\mathscr{P}/\partial n$, взятого в точке $\mathscr{P}(\lambda, 0)$ на опорной геодезической $n = 0$, лежит (приблизительно) на пробной геодезической $n = 1$ в точке $\mathscr{P}(\lambda, 1)$ с тем же значением λ.

«пробной геодезической» $n = 1$. Количественной мерой скорости пробной частицы по отношению к такому наблюдателю служит $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$. Эта относительная скорость так же, как и разделяющий вектор $\mathbf{n}$, представляет собой произвольное «начальное условие». Однако далеко не произвольно «относительное ускорение» $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$ пробной частицы по отношению к наблюдателю (см. дополнения 11.2 и 11.3). Оно равно нулю в плоском пространстве-времени. В искривленном пространстве-времени оно определяется уравнением

Определение тензора кривизны Римана через относительное ускорение геодезических

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0, \tag{8.42}$$

или в компонентных обозначениях

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta = 0. \tag{8.43}$$

Это уравнение служит определением *тензора кривизны Римана*, и из него можно получить следующее выражение для компонент **R** *в координатном базисе*:

Компоненты R

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \langle \mathbf{d}x^{\alpha},\ [\nabla_{\gamma},\ \nabla_{\delta}]\,\mathbf{e}_{\beta}\rangle =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} \qquad (8.44)$$

(чтобы ознакомиться с доказательством, нужно прочесть дополнения 11.4, 11.5 и упражнение 11.3 в указанном порядке). Прочтя дополнение 8.5, можно получить некоторое представление о человеке, который первым начал изучать кривизну пространств с тремя и более измерениями.

Эффекты, обусловленные кривизной

Кривизна пространства-времени является причиной не только отклонения геодезических; вследствие наличия кривизны параллельный перенос зависит от пути (параллельный перенос по замкнутому контуру приводит к изменению вектора или тензора — дополнение 11.7); кривизна приводит к тому, что ковариантные производные не коммутируют между собой [соотношение (8.44)]; ее присутствие не позволяет ввести глобальную лоренцеву систему координат (§ 11.5).

С первого взгляда может показаться, что тензор **R** обладает $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ независимыми компонентами. Но при более тщательном рассмотрении (§ 13.5) выясняется, что он удовлетворяет целому ряду соотношений симметрии:

Симметрии R

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{[\gamma\delta][\alpha\beta]}, \qquad R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0, \qquad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0 \qquad (8.45)$$

(антисимметричен по первым двум индексам; антисимметричен по последним двум индексам; симметричен по отношению к перестановке первой пары индексов со второй; совершенно антисимметричные части равны нулю). Благодаря этим соотношениям тензор **R** (в случае четырех измерений) вместо 256 имеет лишь 20 независимых компонент.

Наряду с этими алгебраическими симметриями тензор **R** обладает дифференциальными симметриями, называемыми *тождествами Бианки*:

Тождества Бианки

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\lambda\mu;\,\nu]} = 0, \qquad (8.46)$$

которые имеют глубокий геометрический смысл (гл. 15).

С помощью свертки из **R** можно образовать ряд других тензоров кривизны. Проще всех образуются *тензор кривизны Риччи*

Тензор кривизны Риччи

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} \qquad (8.47)$$

↑ [в координатном базисе

и *скалярная кривизна*

Скалярная кривизна

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu}. \qquad (8.48)$$

Тензор кривизны Эйнштейна

Однако гораздо большее значение в геометрии имеет *тензор кривизны Эйнштейна*

$$G^{\mu}{}_{\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\beta\gamma}{}^{\rho\sigma}\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\alpha\rho\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}R. \tag{8.49}$$

Из всех тензоров кривизны второго ранга, которые можно образовать сверткой $\mathbf{R}$, лишь для тензора Эйнштейна $\mathbf{G}$ сохраняется часть тождеств Бианки (8.46): он удовлетворяет соотношениям

Свернутые тождества Бианки

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{8.50}$$

Красивый геометрический смысл этих *свернутых тождеств Бианки* («граница границы равна нулю») раскрывается в гл. 15.

В дополнении 8.6 дана сводка приведенных выше уравнений, описывающих кривизну, а также основных соотношений для ковариантных производных.

УПРАЖНЕНИЕ

(Упражнения 11.6, 11.9, 11.10, 13.7—13.11 и 14.3, приведенные в курсе 2, будут полезны для читателя курса 1, который хочет закрепить полученные сведения о кривизне.)

8.16. Некоторые полезные соотношения в координатных системах отсчета

В произвольной координатной системе отсчета положим по определению, что детерминант матрицы $g_{\alpha\beta}$ равен g [выражение (8.11)]. Выведите следующие соотношения, справедливые в произвольной координатной системе отсчета.

а. Свертка коэффициентов связности:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} = (\ln\sqrt{-g})_{,\beta}. \tag{8.51а}$$

(*Указание*: Используйте результаты упражнения 5.5.)

б. Компоненты тензора Риччи:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}\,\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta})_{,\mu} - (\ln\sqrt{-g})_{,\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}. \tag{8.51б}$$

в. Дивергенция вектора A^{α} и *антисимметричного* тензора $F^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} A^{\alpha}{}_{;\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,A^{\alpha})_{,\alpha}, \\ F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta})_{,\beta}. \end{aligned} \tag{8.51в}$$

г. Интеграл от скалярного поля Ψ по собственному объему четырехмерной области $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} \Psi d\,(\text{собственный объем}) = \int_{\mathcal{V}} \Psi\sqrt{-g}\,dt\,dx\,dy\,dz. \tag{8.51г}$$

УПРАЖНЕНИЕ

(*Указание.* В локально лоренцевой системе d (собственный объем) = $= d\hat{t}\, d\hat{x}\, d\hat{y}\, d\hat{z}$. С помощью якобиана преобразуйте этот элемент объема в данную координатную систему отсчета, а затем, воспользовавшись законом преобразования

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\hat{\mu}}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\hat{\nu}}}{\partial x'^{\beta}} \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}},$$

покажите, что якобиан равен $\sqrt{-g}$.)

Дополнение 8.5. ГЕОРГ ФРИДРИХ БЕРНХАРД РИМАН, 17 сентября 1826 г. Брезеленц, Ганновер — 20 июля 1866 г. Селаска, Лаго-Маджоре

Своей знаменитой докторской диссертацией «Основы общей теории функций одной комплексной переменной» Риман в 1851 г. заложил основы одной области современной математики (теории римановых поверхностей), а три года спустя своей знаменитой лекцией — основы другой области (римановой геометрии). Эти две и другие его работы можно найти в собрании сочинений [143], изданном в 1953 г.

«Те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты только из опыта ... В каждой точке мера кривизны может по трем направлениям иметь какие угодно значения, лишь бы в целом кривизна доступных измерению частей пространства заметно не отличалась от нуля» (Риман, «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», лекция, прочитанная 10 июня 1854 г. при вступлении в должность приват-доцента на философском факультете Геттингенского университета).

Двенадцать лет спустя, умирая от туберкулеза, поглощенный мыслью дать единое объяснение тяготения и электромагнетизма, Риман сообщил Бетти свою систему описания многосвязных топологий (что явилось толчком для представления об электрическом заряде как о «силовых линиях в пространственной топологической ловушке»), использующую числа, которые теперь называют по имени Бетти, а обозначают символом R_n в честь Римана.

«Более подробное и тщательное исследование поверхности могло бы обнаружить, что у того, что мы считали простейшим участком, в действительности имеются крошечные рукоятки, меняющие характер связности участка, а микроскоп с еще большим увеличением привел бы к обнаружению новых топологических усложнений подобного рода, и так до бесконечности. Точка зрения Римана допускает (и в реальном пространстве тоже) топологические условия, совершенно отличные от условий, известных в эвклидовом пространстве. Я полагаю, что лишь

на основе более свободного и более широкого взгляда на геометрию, который возник в результате развития математики на протяжении последнего столетия, относясь без предубеждений к открывшимся возможностям проявить воображение, можно предпринять философски не бесплодное наступление на проблему пространства» (Г. Вейль [144]).

«Но ... физики были еще далеки от того, чтобы думать таким образом; для них пространство было чем-то жестким, неподвижным и однородным, не допускающим изменения или наложения каких-то условий. И только гений Римана, одинокий и непонятый, уже к середине прошлого столетия нашел свой подход к понятию пространства — подход, который лишал пространство его жесткости и допускал возможность того, что оно принимает участие в физических явлениях» (А. Эйнштейн [145]).

Риман сформулировал первую известную модель суперпространства (об этом см. гл. 43), но суперпространства, построенного не из совокупности всех 3-геометрий с положительно определенной римановой метрикой (динамическая сцена эйнштейновской общей теории относительности), а из совокупности всех конформно эквивалентных замкнутых римановых 2-геометрий с одинаковой топологией,— тип суперпространства, известный ныне под названием пространства Тайхмюллера. Более подробно о вкладе Римана и о последующем развитии идеи суперпространства см. в главах, написанных Берсом и Уилером, в книге [146].

Дополнение 8.6. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И КРИВИЗНА: ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Понятие	Абстрактное обозначение	Компонентное обозначение
Ковариантная производная	$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T}(\ldots, \ldots, \mathbf{u})$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma} = DT^{\beta}{}_{\alpha}/d\lambda \ (\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda) = \dfrac{dT^{\beta}{}_{\alpha}}{d\lambda} + (\Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu}T^{\nu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}T^{\beta}{}_{\nu})\,u^{\mu}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}f = \partial_{\mathbf{u}}f = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{u}\rangle$	$f_{;\alpha}u^{\alpha} = f_{,\alpha}u^{\alpha}$
алгебраические свойства (упражнение 8.11)	$\nabla_{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}}\mathbf{T} = a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T} + b\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{T}$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}(au^{\gamma}+bv^{\gamma}) = aT^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma} + bT^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}v^{\gamma}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}+\mathbf{M}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{M}$	$(S^{\beta}{}_{\alpha} + M^{\beta}{}_{\alpha})_{;\gamma}u^{\gamma} = S^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma} + M^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ — векторные поля	$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]} = -\dfrac{1}{2}c_{\mu\nu}{}^{\rho}$ [соотношение (8.34)]
дифференцирование произведения	$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A})\otimes\mathbf{B} + \mathbf{A}\otimes(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{B})$	$(A^{\alpha}{}_{\beta}B_{\gamma})_{;\mu}u^{\mu} = A^{\alpha}{}_{\beta;\mu}B_{\gamma}u^{\mu} + A^{\alpha}{}_{\beta}B_{\gamma;\mu}u^{\mu}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{A}) = (\nabla_{\mathbf{u}}f)\mathbf{A} + f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A}$	$(fA^{\alpha}{}_{\beta})_{;\mu}u^{\mu} = f_{,\mu}A^{\alpha}{}_{\beta}u^{\mu} + fA^{\alpha}{}_{\beta;\mu}u^{\mu}$

Продолжение

Понятие	Абстрактное обозначение	Компонентное обозначение
∇_u и свертка коммутируют	∇_u (свертка $\mathbf{S}$) = = (свертка $\nabla_u \mathbf{S}$)	$\left(\sum_\alpha S^\alpha{}_{\alpha\nu}\right)_{;\,\mu} u^\mu = \sum_\alpha (S^\alpha{}_{\alpha\nu;\,\mu} u^\mu)$
* метрика ковариантно постоянна	$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g} = 0$	$g_{\alpha\beta;\,\gamma} u^\gamma = 0$
Градиент	$\nabla \mathbf{T}$	$T^\beta_{\cdot\,\alpha;\,\gamma} = T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} T^\beta{}_\mu$
Коэффициенты связности	$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = (\omega^\alpha,\ \nabla_\gamma \mathbf{e}_\beta) = = -\langle \nabla_\gamma \omega^\alpha,\ \mathbf{e}_\beta \rangle$	$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\beta\gamma}$* $\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu} + c_{\mu\beta\gamma} + + c_{\mu\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\mu})$* $c_{\beta\gamma\mu} = g_{\mu\alpha} c_{\beta\gamma}{}^\alpha = = g_{\mu\alpha} \langle \omega^\alpha,\ [\mathbf{e}_\beta,\ \mathbf{e}_\gamma] \rangle$*
* Локально лоренцева система отсчета в $\mathcal{P}_0$		Система координат, в которой $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = = \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0$
Параллельный перенос	$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{S} = 0$	$S^\alpha{}_{\beta;\,\gamma} u^\gamma = 0$
Уравнение геодезических	$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0$	$d^2x^\alpha/d\lambda^2 + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} (dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda) = 0$ в координатном базисе,
Тензор кривизны Римана	$\mathbf{R}(\sigma, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \equiv \langle \sigma, \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{C} \rangle$ $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv [\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}] - - \nabla_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}$ (эти формулы не из курса 1, см. гл. 11)	$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta} \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}$ в координатной системе отсчета [выражение в некоординатной системе дается (11.13)]
Тензор кривизны Риччи	$\mathbf{Rc}$ = свертка $\mathbf{R}$ по каналам 1 и 3	$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} + + \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}$ в координатной системе отсчета
* Скалярная кривизна	R = (свертка $\mathbf{Rc}$)	$R = R^\alpha{}_\alpha$
* Тензор кривизны Эйнштейна	$\mathbf{G} = \mathbf{Rc} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R$	$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$

Продолжение

Понятие	Абстрактное обозначение	Компонентное обозначение
* Тензор кривизны Эйнштейна		Полезные формулы для вычисления $G^{\alpha}{}_{\beta}$ (выведены в § 14.2): $G^0{}_0 = -(R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{31}{}_{31})$, $G^0{}_1 = R^{02}{}_{12} + R^{03}{}_{13}$, $G^1{}_1 = -(R^{02}{}_{02} + R^{03}{}_{03} + R^{23}{}_{23})$, $G^1{}_2 = R^{10}{}_{20} + R^{13}{}_{23}$ и т. д.
* Симметрии тензоров кривизны		$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{[\gamma\delta][\alpha\beta]}$, $R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0$, $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$, $R_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)}$, $G_{\alpha\beta} = G_{(\alpha\beta)}$
Тождества Бианки		$R^{\alpha}{}_{\beta[\mu\nu;\lambda]} = 0$
* Свернутые тождества Бианки		$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$
Отклонение геодезических	$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0$	$\frac{D^2 n^{\alpha}}{d\lambda^2} + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} n^{\gamma} u^{\delta} = 0$
Параллельный перенос по замкнутому контуру (§ 11.4)	$\delta\mathbf{A} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, если $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — ребра кривой	$\delta A^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} u^{\gamma} v^{\delta} = 0$

* В отсутствие метрики формулы, помеченные звездочкой, не могут быть написаны. Все остальные формулы справедливы и без метрики.

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

В аналитической геометрии многие соотношения,
не зависящие от системы отсчета,
приходится выражать по отношению к некоторой конкретной
системе отсчета. Поэтому предпочтительнее создать
новые методы — методы, которые имеют дело непосредственно
с внутренними свойствами,
не прибегая ни к каким координатам.
Развитие топологии общих пространств и объектов в них,
так же как развитие геометрии общих
метрических пространств, представляет собой шаги
в этом направлении.

КАРЛ МЕНГЕР [77]

Эта глава целиком относится к курсу 2.
Ее содержание не зависит от предыдущего материала курса 2.
Она нужна в качестве подготовительного материала
1) для гл. 10—13 (дифференциальная геометрия, ньютоновское тяготение) и
2) для дополнения 30.1 (модель перемешанного мира).
Знание ее материала будет полезным 1) в гл. 14 (вычисление кривизны) и
2) в гл. 15 (тождества Бианки).

§ 9.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ БЕЗ МЕТРИКИ И БЕЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Предметом изучения в этой несложной главе является пространство-время без метрики, без геодезических и без параллельного переноса, т. е. «дифференциальная топология». Данная глава проста потому, что все необходимые геометрические объекты (событие, кривая, вектор, 1-форма, тензор) уже известны из плоского пространства-времени. Однако, она также и необходима, поскольку, отказавшись от лоренцевой метрики плоского пространства-времени, мы должны уточнить свои представления.

События

Простейшее понятие события $\mathcal{P}$ (фиг. 1.2) не нуждается в уточнении. Для него существенно лишь свойство идентифицируемости, которое не зависит от лоренцевой метрической структуры пространства-времени.

Отказ от метрики

Кривые

Здесь тоже никакого уточнения не требуется. «Кривая» $\mathcal{P}(\lambda)$ — также слишком простое понятие, чтобы зависеть от того, наделено ли пространство-время метрикой или нет, *за исключением того факта*, что без метрики не существует понятия «собственной длины» кривой. Это согласуется с ньютоновской теорией тяготения, в которой речь идет о длине кривых в «пространстве», но не в «пространстве-времени».

Векторы

Геометрические понятия необходимо уточнить

Здесь без уточнения не обойтись. В специальной теории относительности простейшие («идентифицируемые») события наделены достаточным количеством алгебраических свойств, чтобы о векторах можно было говорить как о разностях $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ между «алгебраическими» событиями. Теперь этих свойств нет, и старое представление о векторе как о билокальном объекте («точка острия и точка основания») должно быть заменено новым представлением о нем как о чисто локальном объекте (§ 9.2). Векторы нельзя также перемещать с места на место; каждый вектор должен быть приписан определенному событию (§ 9.2 и 9.3).

1-формы

Почти никаких уточнений не требуется, за исключением того, что без метрики невозможно указать, какая 1-форма соответствует данному вектору (нет возможности поднимать и опускать индексы), и что каждая 1-форма должна быть приписана определенному событию (§ 9.4).

Тензоры

Здесь также почти не требуется уточнений, за исключением того, что каждый входной канал тензора имеет свою специфику: если в него вводят векторы, то его уже нельзя приспособить для ввода 1-форм, и наоборот (нет возможности поднимать и опускать индексы); к тому же каждый тензор должен быть приписан определенному событию (§ 9.5).

§ 9.2. РЕЗУЛЬТАТ УТОЧНЕНИЯ ПОНЯТИЙ «ВЕКТОРА» И «ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ» — ПОНЯТИЕ «КАСАТЕЛЬНОГО ВЕКТОРА»

Плоское пространство-время допускает несколько эквивалентных определений вектора (§ 2.3): вектор — стрелка, направленная из события $\mathcal{P}_0$ в событие $\mathcal{Q}_0$; вектор — параметризованная прямая

линия $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}_0 + \lambda(\mathcal{Q}_0 - \mathcal{P}_0)$, ведущая от $\mathcal{P}_0$ при $\lambda = 0$ к $\mathcal{Q}_0$ при $\lambda = 1$; вектор — скорость изменения точки $\mathcal{P}(\lambda)$ с ростом λ, т. е. $d\mathcal{P}/d\lambda$.

В отсутствие лоренцевой метрики определения вектора как «стрелки» и «параметризованной прямой линии» теряют смысл. По какому пути следует проводить между $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{Q}_0$ стрелку или линию? Ведь понятие прямолинейности отсутствует; все пути одинаково прямые или искривленные.

В отсутствие метрики старые определения вектора теряют смысл

Такая неопределенность заставляет нас остановиться на определении вектора как «скорости изменения точки вдоль кривой» — $d\mathcal{P}/d\lambda$. Это понятие вектора под новым названием *«касательный вектор»* кратко исследуется в дополнении 9.1 и более глубоко в следующих абзацах.

Большинство математиков отметит, однако, что и «$d\mathcal{P}/d\lambda$» является довольно нечетким определением касательного вектора. Более приемлемым, по их мнению, будет следующее определение: *касательный вектор* $\mathbf{u}$ *к кривой* $\mathcal{P}(\lambda)$ *есть оператор производной по направлению вдоль этой кривой*:

$$\mathbf{u} = \partial_{\mathbf{u}} = (d/\partial\lambda)_{\text{вдоль кривой}}. \tag{9.1}$$

Наилучшее из новых определений: «касательный вектор совпадает с оператором производной по направлению» $\mathbf{u} = d/d\lambda$

Касательный вектор равен оператору производной по направлению? Невероятно! Вначале вектор был введен как беззаботное, лишенное всякой ответственности путешествие из $\mathcal{P}_0$ в $\mathcal{Q}_0$. А в конце он оказался ответственным за то, как что-то другое изменяется в точке $\mathcal{P}_0$. В каком же месте на вектор взвалили эту неожиданную ответственность? И действительно ли он так сильно изменил свой облик, как это кажется? Чтобы получить ответ, вернемся немного назад и попробуем представить определение «вектора как скорости изменения точки», или $d\mathcal{P}/d\lambda$, по-новому, в виде предельного перехода:

0. Выбираем кривую $\mathcal{P}(\lambda)$, к которой при $\lambda = 0$ требуется найти касательный вектор $d\mathcal{P}/d\lambda$.

1. Находим смещение $\mathcal{P}$ при изменении λ от 0 до 1; это еще *не* $d\mathcal{P}/d\lambda$.

2. Находим удвоенное смещение $\mathcal{P}$ при изменении λ от 0 до $^1/_2$; это еще *не* $d\mathcal{P}/d\lambda$.

N. Находим смещение $\mathcal{P}$ при изменении λ от 0 до $1/N$, умноженное на N; это еще *не* $d\mathcal{P}/d\lambda$.

∞. Переходим к пределу таких смещений при $N \to \infty$; это и есть $d\mathcal{P}/d\lambda$.

Это определение обладает тем достоинством, что $d\mathcal{P}/d\lambda$ описывает свойства кривой $\mathcal{P}(\lambda)$ не в огромном промежутке от $\lambda = 0$ до $\lambda = 1$, где кривая может вести себя самым причудливым образом, а лишь в бесконечно малой окрестности точки $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(0)$.

Недостаток этого определения заключается в том, что не объяснено, что означает каждый отдельный шаг 1, 2, . . ., N, . . . и поэтому неясно, предел чего мы находим. Чтобы каждое «смещение $\mathcal{P}$» превратить в определенный математический объект

Другое определение, $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$, требует погружения в плоское пространство более высокой размерности

в пространстве, где имеет смысл «предел», можно представить себе, что исходное многообразие является поверхностью в некотором *плоском* пространстве, число измерений которого намного превосходит число измерений поверхности. Тогда $\mathcal{P}(1/N) - \mathcal{P}(0)$ есть всего лишь прямая стрелка, соединяющая две точки, т. е. отрезок прямой линии, который в общем случае не принадлежит самой поверхности (см. дополнение 9.1). Возникающее в результате умозрительное представление о касательном векторе очень красиво выявляет его существенные свойства, но достигается это ценою некоторых артефактов [1]). Такое представление опирается на некоторый конкретный, хотя и произвольный, способ погружения интересующего нас многообразия (пространства-времени без метрики) в другое, плоское пространство. Пользуясь этим представлением, необходимо отвлечься от всего, что зависит от особенностей погружения. Нужно уподобиться химику, который, чтобы четко представить себе основные свойства молекулы, пользуется игрушечной моделью этой молекулы, легко отвлекаясь при этом от артефактов модели (цвет отдельных атомов, диаметр стерженьков, способность модели деформироваться), которые не отражают квантовомеханической реальности.

Картан, пользуясь своим подходом в дифференциальной геометрии, включая представление о касательном векторе как $d\mathcal{P}/d\lambda$, по-видимому, всегда представлял себе многообразия погруженными в плоские пространства и опирался на методы, которые не всегда подвергал формализации, необходимые, чтобы отделить существенные геометрические особенности такой картины от несущественных деталей, зависящих от способа погружения. Его вычислительные методы получили признание позднее. Математики, которые не доверяют своей способности отличать факты от артефактов, отказываются от преимуществ такой картины во имя строгости: не будем более говорить о движении самой точки, а обратимся к тому конкретному изменению, которое можно измерить и которое происходит в самом многообразии,— изменению, которое претерпевают при движении точки некоторые (или все сразу) скалярные функции f. Тогда предельный переход принимает вид:

Уточнение $d\mathcal{P}/d\lambda$, приводящее к $d/d\lambda$

0. Выбираем кривую $\mathcal{P}(\lambda)$, к которой требуется найти касательный вектор при $\lambda = 0$.

1. Находим число $f[\mathcal{P}(1)] - f[\mathcal{P}(0)]$, которое равно изменению f при перемещении точки $\mathcal{P}(\lambda)$ из $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(0)$ в $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{P}(1)$.

2. Находим число $2\{f[\mathcal{P}(1/2)] - f[\mathcal{P}(0)]\}$, равное удвоенному изменению f при перемещении точки из $\mathcal{P}(0)$ в $\mathcal{P}(1/2)$.

---

[1]) Артефакт (от латинского «artefactum» — искусственно сделанное) — употребляемый в биологии термин, обозначающий процесс или образование, несвойственные организму в норме и вызываемые самим методом его исследования.— *Прим. перев.*

N. Находим число $N\{f[\mathcal{P}(1/N)] - f[\mathcal{P}(0)]\}$, равное изменению f при перемещении точки из $\mathcal{P}(0)$ в $\mathcal{P}(1/N)$, умноженному на N.

∞. Переходим к пределу при $N \to \infty$: (изменение f) $= df/d\lambda$.

0. Изменение f — это еще не сам вектор. Вектор — это операция $d/d\lambda$, которая, будучи применена к f, дает изменение $df/d\lambda$. Таким образом,

$$\text{касательный вектор} = d/d\lambda$$

[ср. определение (9.1)].

Ясно, что операция $d/d\lambda$ ничего не содержит, кроме последних шагов $N \to \infty$ в этом предельном переходе, причем и эти шаги лишь в тех аспектах, которые не зависят от f. Но это означает, что она включает в себя бесконечно малые смещения точки $\mathcal{P}$ *и ничего более*.

Тот, кто не хочет отказываться от плодотворного подхода в геометрии, развитого Картаном (дополнение 9.1), и в то же время не хочет терять контакта с современными методами, должен все время проводить различие между

А) самим касательным вектором, как его понимал Картан, т. е. смещением точки $d\mathcal{P}/d\lambda$, и

Б) «оператором касательного вектора», или «оператором производной по направлению», указывающим, что происходит с функцией при таком смещении: (оператор касательного вектора) $=$ $= d/d\lambda$.

Однако в современной практике слово «оператор» в Б опускается, и для обозначения оператора используется само выражение «касательный вектор»; данная книга не является исключением в этом отношении. Сами понятия А и Б тоже сливаются в нашем представлении: когда мы представляем себе диаграмму погружения со стрелками, проведенными касательно к поверхности, то всегда осознаем, что стрелка характеризует бесконечно малое перемещение точки $d\mathcal{P}/d\lambda$, которое происходит на самой поверхности; когда же мы представляем себе оператор производной $d/d\lambda$, то всегда имеем в виду то же самое бесконечно малое перемещение точки в пределах многообразия, перемещение, которое необходимо для нахождения любой производной $df(\mathcal{P})/d\lambda$. В таком понимании вектор $d\mathcal{P}/d\lambda \equiv d/d\lambda$ следует рассматривать сразу и как «смещение, которое переводит внимание от одной точки к другой», и как «чисто геометрический объект, для построения которого нужны точки, и ничего кроме точек».

Но упрямый физик все еще может быть склонен заявить: «Касательный вектор равен оператору производной по направлению? Невероятно!» Возможно, его убедят несколько иные доводы. Пусть он возьмет событие $\mathcal{P}_0$, в котором выберет произвольную совокупность четырех некомпланарных векторов (векторов, определенных любым способом, который кажется ему разумным) и обозначит их $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Эти векторы будут служить базисом,

по которому можно разлагать все остальные векторы в событии $\mathcal{P}_0$:

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \qquad \mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \tag{9.2}$$

Изоморфизм между производными по направлению и векторами

Пусть затем такой физик построит четыре оператора производной по направлению $\partial_\alpha \equiv \partial_{\mathbf{e}_\alpha}$ вдоль этих базисных векторов. Точно так же, как в плоском пространстве-времени, здесь те же коэффициенты разложения, которые фигурируют в $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, фигурируют и в разложении производной по направлению:

$$\partial_{\mathbf{u}} = u^\alpha \partial_\alpha, \qquad \partial_{\mathbf{v}} = v^\alpha \partial_\alpha. \tag{9.3}$$

Следовательно, любое соотношение между определенными векторами в $\mathcal{P}_0$ индуцирует точно такое же соотношение между соответствующими дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = a\mathbf{w} + b\mathbf{v} &\iff u^\alpha = aw^\alpha + bv^\alpha \\ &\iff \partial_{\mathbf{u}} = a\partial_{\mathbf{w}} + b\partial_{\mathbf{v}}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Существует полный «изоморфизм» между векторами и соответствующими производными по направлению. Как же может тогда упрямый физик лишить упрямого математика права полностью отождествлять каждый касательный вектор с его производной по направлению? Тем более, что это не причинит никакого ущерба, не изменит ни одного результата вычислений.

Такой изоморфизм приводит к понятию *касательного пространства*. Поскольку смысл линейных соотношений (таких, как $\partial_{\mathbf{u}} = a\partial_{\mathbf{w}} + b\partial_{\mathbf{v}}$) между производными по направлению *в одной и той же точке* $\mathcal{P}_0$ вполне определен, а сами эти соотношения подчиняются обычным правилам сложения и умножения, такие дифференциальные операторы образуют абстрактное (но конечномерное) векторное пространство, называемое касательным пространством в точке $\mathcal{P}_0$. На диаграмме вложения (дополнение 9.1) эти производные используются (как операторы в плоском пространстве вложения) для построения касательных векторов $\mathbf{u} = \partial_{\mathbf{u}}\mathcal{P}$, $\mathbf{v} = \partial_{\mathbf{v}}\mathcal{P}$ в виде прямых стрелок. Таким образом абстрактное касательное пространство отождествляется с касательным пространством, имеющим геометрическое изображение.

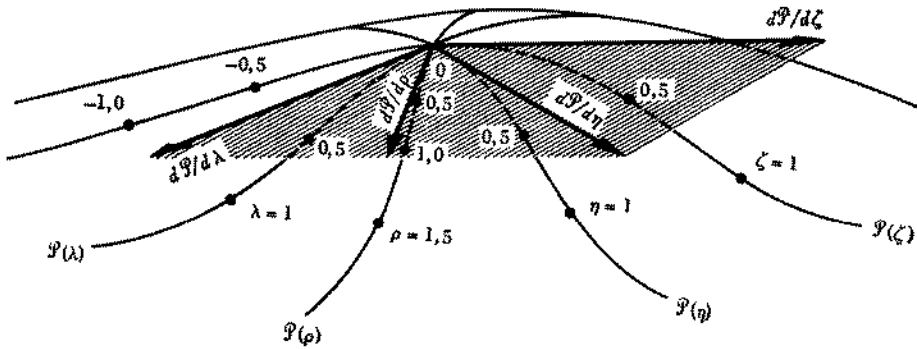
Определение касательного пространства

Дополнение 9.1. КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Касательный вектор $d\mathcal{P}/d\lambda$ определяется как «предел при $N \to \infty$, к которому стремится умноженное на N смещение, испытываемое $\mathcal{P}$ при изменении λ от 0 до $1/N$». Нельзя представлять себе, что получающееся в результате смещение $d\mathcal{P}/d\lambda$ лежит в пространстве-времени; там ему нельзя придать нужный смысл (отсутствует понятие прямолинейности). Вместо этого мы изображаем $d\mathcal{P}/d\lambda$ лежащим в «касательной плоскости», или в «касательном пространстве», которое касается пространства-времени только в одном событии $\mathcal{P}(0)$, которому принадлежит $d\mathcal{P}/d\lambda$.

Все остальные касательные векторы в $\mathcal{P}(0)$, например $d\mathcal{P}/d\rho$, $d\mathcal{P}/d\eta$, $d\mathcal{P}/d\zeta$ лежат в том же касательном пространстве.

Чтобы придать понятиям касательного вектора и касательного пространства точный смысл, можно считать, что пространство-время погружено в плоское пространство более чем четырех измерений. Тогда можно, воспользовавшись



прямыми стрелками плоского пространства вложения, осуществить предельный переход, который даст $d\mathcal{P}/d\lambda$. В результате получится картина, аналогичная изображенной выше, но с большим числом измерений.

Но такая трактовка небезопасна. Исходя из нее можно неправильно предположить, что касательный вектор $d\mathcal{P}/d\lambda$ и касательное пространство в $\mathcal{P}_0$ зависят от того, как осуществляется погружение, или самим своим существованием обязаны процессу погружения. Однако это не так. И стремление ясно показать, что это не так, побуждает ввести определение касательного вектора как оператора производной по направлению $d/d\lambda$, а не использовать более наглядное понятие $d\mathcal{P}/d\lambda$, введенное Картаном.

§ 9.3. БАЗИСЫ, КОМПОНЕНТЫ И ЗАКОНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРОВ

Базис, определяемый системой координат

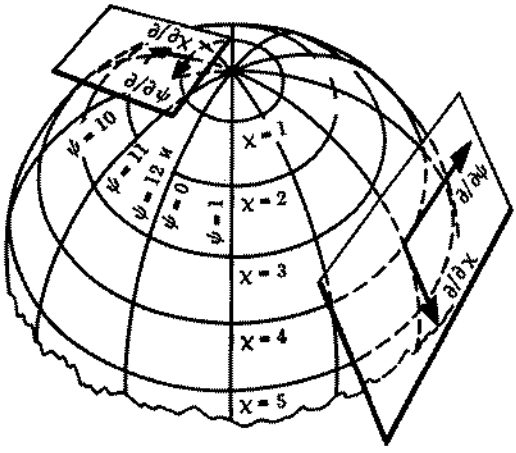
Особенно удобным базисом в касательном пространстве в событии $\mathcal{P}_0$ является базис, определяемый какой-либо системой координат [четыре функции $x^0(\mathcal{P})$, $x^1(\mathcal{P})$, $x^2(\mathcal{P})$, $x^3(\mathcal{P})$] (фиг. 9.1)

$$\mathbf{e}_0 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_{x^1,\, x^2,\, x^3} = \begin{pmatrix} \text{производная по направлению} \\ \text{вдоль кривой с постоянными} \\ (x^1,\, x^2,\, x^3) \text{ и параметром } \lambda = x^0 \end{pmatrix}_{\text{в } \mathcal{P}_0}, \quad (9.5)$$

$$\mathbf{e}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \mathbf{e}_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad \mathbf{e}_3 \equiv \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Переход к другому базису: определение матриц преобразования

Преобразование от одного базиса к другому в касательном пространстве в $\mathcal{P}_0$, подобно всякому переходу к новому базису в любом векторном пространстве, осуществляется с помощью



ФИГ. 9.1.
Базисные векторы, определяемые в касательном пространстве каждого события системой координат пространства-времени. Здесь изображено усеченное двумерное пространство-время (два других измерения отброшены) с координатами χ ($\mathscr{P}$) и ψ ($\mathscr{P}$) и соответствующими базисными векторами $\partial/\partial\chi$ и $\partial/\partial\psi$.

несингулярной матрицы

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}_\beta L^\beta{}_{\alpha'}; \tag{9.6}$$

компоненты вектора, как всегда (включая лоренцевы системы плоского пространства-времени), преобразуются по обратной матрице

$$u^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\beta u^\beta; \tag{9.7}$$

$$\| L^{\alpha'}{}_\beta \| = \| L^\beta{}_{\gamma'} \|^{-1}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} L^{\alpha'}{}_\beta L^\beta{}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'}, \\ L^\delta{}_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta = \delta^\delta{}_\beta. \end{cases} \tag{9.8}$$

Этот «обратный» закон преобразования обеспечивает согласованность разложений $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\alpha'} u^{\alpha'}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\beta u^\beta$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\alpha'} u^{\alpha'} = (\mathbf{e}_\gamma L^\gamma{}_{\alpha'})(L^{\alpha'}{}_\beta u^\beta) = \mathbf{e}_\gamma \delta^\gamma{}_\beta u^\beta = \mathbf{e}_\beta u^\beta.$$

В частном случае переходов между координатными базисами матрица преобразования принимает простой вид

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

(согласно обычным правилам дифференциального исчисления), т. е.

$$L^\beta{}_{\alpha'} = (\partial x^\beta / \partial x^{\alpha'})_{\substack{\text{в событии } \mathscr{P}_0, \text{ где расположено} \\ \text{касательное пространство}}} \tag{9.9}$$

(*Примечание.* Это выражение является обобщением закона преобразования Лоренца $x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} x^{\alpha'}$, который тоже может быть записан в дифференциальной форме $\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} = \partial x^{\beta}/\partial x^{\alpha'}$; такая запись позволяет также легко запомнить правильное написание матриц Λ.)

§ 9.4. 1-ФОРМЫ

Удалив из пространства-времени лоренцеву метрику, мы должны усовершенствовать понятие 1-формы σ, потребовав, чтобы она, подобно всякому касательному вектору $\mathbf{u}$, была приписана определенному событию $\mathcal{P}_0$ в пространстве-времени. Семейство поверхностей, представляющих σ, принадлежит касательному пространству события $\mathcal{P}_0$, а не самому пространству-времени. Пересечение поверхностей σ стрелкой $\mathbf{u}$, в результате которого получается число $\langle \sigma, \mathbf{u} \rangle$ («удары колокола»), происходит тоже в касательном пространстве.

Определение дуального базиса 1-форм

Если в событии $\mathcal{P}_0$ задана совокупность базисных векторов $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, то можно построить *дуальный базис* 1-форм $\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3\}$, выбрав поверхности ω^{β} таким образом, что

$$\langle \omega^{\beta}, \mathbf{e}_{\alpha} \rangle = \delta^{\beta}{}_{\alpha} \tag{9.10}$$

(фиг. 9.2). Отсюда следует удивительно простой формализм нахождения компонент касательных векторов и 1-форм:

Формулы оперирования с компонентами

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\alpha} u^{\alpha} \quad \text{(определение компонент } \mathbf{u}\text{)}, \tag{9.11а}$$

$$\sigma = \sigma_{\beta} \omega^{\beta} \quad \text{(определение компонент } \sigma\text{)}, \tag{9.11б}$$

$$u^{\alpha} = \langle \omega^{\alpha}, \mathbf{u} \rangle \quad \text{(способ нахождения компонент } \mathbf{u}\text{)}, \tag{9.11в}$$

$$\sigma_{\beta} = \langle \sigma, \mathbf{e}_{\beta} \rangle \quad \text{(способ нахождения компонент } \sigma\text{)}, \tag{9.11г}$$

$$\langle \sigma, \mathbf{u} \rangle = \sigma_{\alpha} u^{\alpha} \quad \text{(способ нахождения } \langle \sigma, \mathbf{u} \rangle \text{ с помощью компонент)}, \tag{9.11д}$$

$$\omega^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_{\beta} \omega^{\beta} \quad \text{(закон преобразования базиса 1-форм, соответствующий (9.6))}, \tag{9.11е}$$

$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_{\beta} L^{\beta}{}_{\alpha'} \quad \text{(закон преобразования компонент 1-форм)}. \tag{9.11ж}$$

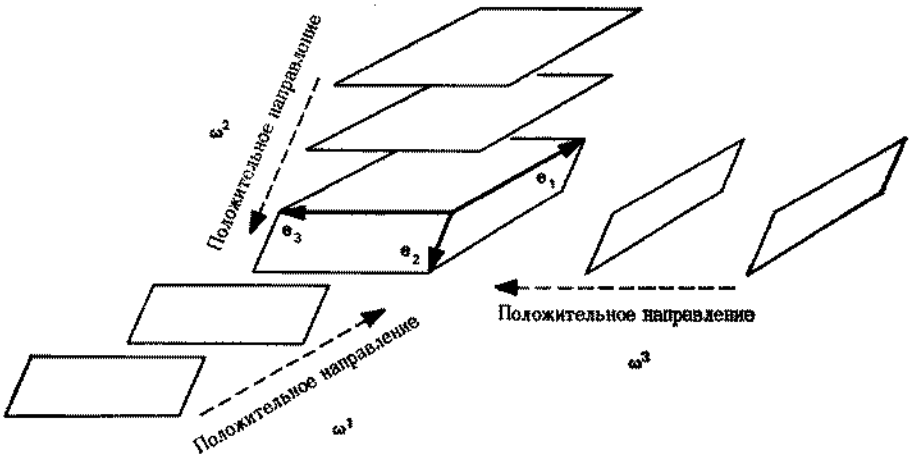
(В упражнении 9.1 дано обоснование этих формул.)

Исчезновение соответствия между векторами и 1-формами

В отсутствие метрики не существует способа, с помощью которого можно было бы выбрать определенную 1-форму $\tilde{\mathbf{u}}$ в событии $\mathcal{P}_0$ и сказать, что она соответствует данному касательному вектору $\mathbf{u}$ в $\mathcal{P}_0$. Соответствие, установленное в плоском пространстве-времени

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{для всех } \mathbf{v},$$

пропадает вместе с исчезновением знака «·». То же утверждение можно сформулировать на языке компонент: поднять индекс $u^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} u_{\beta}$ невозможно, поскольку $\eta^{\alpha\beta}$ больше не существуют; точно так же невозможно опустить индекс $u_{\beta} = \eta_{\beta\alpha} u^{\alpha}$.



ФИГ 9.2.

Векторы базиса $\mathbf{e}_\alpha$ и 1-формы дуального базиса ω^β в касательном пространстве события $\mathscr{P}_6$. Из условия $\langle \omega^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta{}_\alpha$ следует, что векторы $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ должны лежать параллельно поверхностям ω^1, а $\mathbf{e}_1$ тянется от одной поверхности ω^1 до другой соседней (пересекает ровно 1,00 поверхности).

Отметим, что этот рисунок очень хорошо бы подошел к книге по рентгеновским лучам и кристаллографии. Там векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ представляли бы ребра единичной кристаллической ячейки, а поверхности ω^1, ω^2, ω^3 были бы поверхностями единичных ячеек. В эксперименте по дифракции рентгеновских лучей при соответствующем подборе длины волны излучения и ориентации кристалла на последовательных поверхностях ω^1 происходит брэгговское отражение. При другом подборе длины волны и ориентации брэгговское отражение происходит на поверхностях ω^2 и ω^3.

Градиент функции

1-форма градиента $\mathbf{d}f$ была введена в § 2.6, совершенно не опираясь на понятие метрики. Следовательно, градиент и связанный с ним математический формализм теперь, когда нет метрики, точно такие же, как и тогда, когда метрика была, за исключением лишь того факта, что как и все остальные 1-формы, $\mathbf{d}f$ принадлежит теперь касательному пространству, а не самому пространству-времени. Так, например, совсем не меняется основное соотношение, связывающее проекцию градиента с производной по направлению:

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{u} \rangle = \partial_{\mathbf{u}} f = \mathbf{u}[f]. \tag{9.12}$$

старое обозначение для производной по направлению; новое обозначение; напомним, что $\mathbf{u} = \partial_{\mathbf{u}}$

Подобным же образом не меняются и соотношения в компонентах:

$$\mathbf{d}f = f_{,\alpha}\omega^\alpha \quad \text{(разложение } \mathbf{d}f \text{ в произвольном базисе)}, \tag{9.13а}$$

$$f_{,\alpha} = \partial_\alpha f = \mathbf{e}_\alpha[f] \quad \text{(способ нахождения компонент } \mathbf{d}f\text{)}, \tag{9.13б}$$

$$f_{,\alpha} = \partial f / \partial x^\alpha, \quad \text{если } \{\mathbf{e}_\alpha\} \text{ — координатный базис;}$$

причем они выполняются в любых базисах, а не только в лоренцевых. Как в лоренцевых системах отсчета, так и в системах общего вида, базис 1-форм $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$ и базис касательных векторов $\{\partial/\partial x^\alpha\}$ (определенные в касательном пространстве для одной и той же системы координат в пространстве-времени) дуальны друг другу:

$$\langle dx^\alpha,\ \partial/\partial x^\beta\rangle = \delta^\alpha{}_\beta. \tag{9.14}$$

(Доказательство см. в упражнении 9.2.) «Внешнее исчисление» Картана (пункты А, Б, В дополнения 4.1) также в большинстве своих аспектов не меняется при удалении метрики.

§ 9.5. ТЕНЗОРЫ

Тензор **S** в отсутствие лоренцевой метрики отличается от тензоров в плоском лоренцевом пространстве-времени в двух отношениях: 1. Тензор **S** должен быть приписан определенному событию $\mathcal{P}_0$ точно так же, как это должно иметь место для всех векторов и 1-форм. 2. Каждый входной канал тензора **S** является каналом определенного вида: в него можно вводить либо векторы, либо 1-формы, но никак не те и другие сразу, поскольку у него нет возможности превратить 1-форму $\tilde{\mathbf{u}}$ в «соответствующий вектор», когда эта 1-форма попадает в его линейную машину. Таким образом, если **S** есть тензор ранга $\binom{1}{2}$

Специализация каналов тензора

$$\mathbf{S}(\ldots,\ \ldots,\ \ldots), \tag{9.15}$$

сюда вводится 1-форма — сюда вводится вектор — сюда вводится вектор

то его *нельзя* превратить с помощью процедуры § 3.2 ни в тензор ранга $\binom{2}{1}$, ни в тензор $\binom{3}{0}$, ни в тензор $\binom{0}{3}$. На языке компонент индексы **S** нельзя ни поднять, ни опустить.

За исключением этих двух ограничений (принадлежность определенному событию; специфика каналов), тензор **S** остается такой же линейной машиной, как и ранее. И алгебра оперирования с компонентами тоже не изменяется:

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^\alpha,\ \mathbf{e}_\beta,\ \mathbf{e}_\gamma) \quad (\mathbf{S},\ \boldsymbol{\omega}^\alpha,\ \mathbf{e}_\beta \text{ — все должны принадлежать одному событию}), \tag{9.16}$$

$$\mathbf{S} = S^\alpha{}_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma, \tag{9.17}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}) = S^\alpha{}_{\beta\gamma}\sigma_\alpha u^\beta v^\gamma. \tag{9.18}$$

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Операции с компонентами

Выведите соотношения (9.11в) — (9.11ж) из (9.10), (9.11а, б), (9.6), (9.7) и (9.8).

9.2. Компоненты градиента и дуальность координатных базисов

В произвольном базисе определите $f_{,\alpha}$ согласно разложению (9.13а). Затем из соотношений (9.11г) и (9.12) получите метод нахождения $f_{,\alpha}$ (9.13б). Наконец, из соотношения (9.12) вместе с (9.13б) покажите, что базисы $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$ и $\{\partial/\partial x^\beta\}$ дуальны друг другу.

9.3. Практика операций с касательными векторами

Пусть $\mathcal{P}_0$ — точка в трехмерном пространстве с координатами $(x = 0, y = 1, z = 0)$; определим три кривые, проходящие через $\mathcal{P}_0$, следующим образом:

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda, 1, \lambda),$$
$$\mathcal{P}(\zeta) = (\sin\zeta, \cos\zeta, \zeta),$$
$$\mathcal{P}(\rho) = (\operatorname{sh}\rho, \operatorname{ch}\rho, \rho + \rho^3).$$

а. Найдите $(d/d\lambda)f$, $(d/d\zeta)f$ и $(d/d\rho)f$ для функции $f = x^2 - y^2 + z^2$ в точке $\mathcal{P}_0$. б. Найдите компоненты касательных векторов $d/d\lambda$, $d/d\zeta$ и $d/d\rho$ в $\mathcal{P}_0$, воспользовавшись базисом $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$.

9.4. Дополнительная практика операций с касательными векторами

Введем в трехмерном пространстве с координатами (x, y, z) поле вектора $\mathbf{v} = y^2\,\partial/\partial x - x\,\partial/\partial z$ и функции $f = xy$, $g = z^3$. Найдите

а. $\mathbf{v}[f]$, б. $\mathbf{v}[g]$, в. $\mathbf{v}[fg]$, г. $f\mathbf{v}[g] - g\mathbf{v}[f]$, д. $\mathbf{v}[f^2+g^2]$, е. $\mathbf{v}\{\mathbf{v}[f]\}$.

9.5. Наглядное представление координатного базиса 1-форм

Нарисуйте в касательном пространстве фиг. 9.1 базисные 1-формы $\mathbf{d}\psi$ и $\mathbf{d}\chi$, определяемые системой координат ψ, χ.

9.6. Операции с дуальными базисами

В трехмерном пространстве в сферических координатах r, θ, ϕ часто вместо базиса $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\phi$ используется базис

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

2

УПРАЖНЕНИЯ

а. Что собой представляет базис 1-форм $\{\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}\}$, дуальный к этому базису из касательных векторов? **б.** Нарисуйте на сфере $r=1$ расположение базисов $\{\partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi\}$, $\{\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}\}$, $\{\mathbf{d}r, \mathbf{d}\theta, \mathbf{d}\phi\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}\}$.

§ 9.6. КОММУТАТОРЫ И МЕТОДЫ НАГЛЯДНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Вектор $\mathbf{u}_0$, заданный лишь в одной точке $\mathcal{P}_0$, позволяет найти производную $\mathbf{u}_0[f] \equiv \partial_{\mathbf{u}_0} f$, которая представляет собой просто число, связанное с точкой $\mathcal{P}_0$. Векторное поле $\mathbf{u}$ в отличие от $\mathbf{u}_0$ задает вектор $\mathbf{u}(\mathcal{P})$, т. е. дифференциальный оператор $\partial_{\mathbf{u}(\mathcal{P})}$, в каждой точке $\mathcal{P}$ некоторой области пространства-времени. Векторное поле, действуя на функцию f, образует не отдельное число, а другую функцию $\mathbf{u}[f] \equiv \partial_{\mathbf{u}} f$. Второе векторное поле $\mathbf{v}$ может с таким же успехом подействовать на эту новую функцию, образовав при этом еще одну функцию

$$\mathbf{v}\{\mathbf{u}[f]\} = \partial_{\mathbf{v}}(\partial_{\mathbf{u}} f).$$

Совпадает ли эта функция с результатом, который получится, если сначала подействовать полем $\mathbf{v}$, а затем $\mathbf{u}$? Другими словами, равен ли нулю «коммутатор»

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}][f] \equiv \mathbf{u}\{\mathbf{v}[f]\} - \mathbf{v}\{\mathbf{u}[f]\}. \tag{9.19}$$

Определение коммутатора

В простейшем частном случае, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются базисными векторами системы координат $\mathbf{u} = \partial/\partial x^\alpha$, $\mathbf{v} = \partial/\partial x^\beta$, коммутатор действительно равен нулю, поскольку частные производные всегда коммутируют:

$$[\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta][f] = \partial^2 f/\partial x^\beta \partial x^\alpha - \partial^2 f/\partial x^\alpha \partial x^\beta = 0.$$

Но в общем случае коммутатор отличен от нуля, в чем можно убедиться, проведя выкладки в координатном базисе:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] f = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(v^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) - v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(u^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) =$$

$$= \left[u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha} - v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big] f.$$

Коммутатор двух векторных полей есть векторное поле

Отметим, что коммутатор $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, подобно самим $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, есть векторное поле, т. е. линейный дифференциальный оператор, определенный в каждом событии:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\mathbf{u}[v^\beta] - \mathbf{v}[u^\beta])\frac{\partial}{\partial x^\beta} = (u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha} - v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha})\frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{9.20}$$

Эти результаты должны быть известны из формализма квантовой теории, связанного с оператором момента импульса (упражнение 9.8).

Три аспекта геометрии — на чертежах, в абстрактном виде и в компонентах — позволяют с трех различных сторон подойти к понятию коммутатора.

1. Абстрактное выражение $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ наталкивает на мысль о тесной связи с квантовой теорией и вызывает в памяти развитые там многочисленные методы обращения с операторами. Напомним, однако, что операторы квантовой теории не обязательно должны быть дифференциальными операторами первого порядка. В обычном уравнении Шредингера кинетическая энергия представлена оператором второго, а потенциальная — оператором нулевого порядка. Векторами же являются лишь операторы первого порядка.

2. Выражение в компонентах $u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha} - v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha}$, справедливое в произвольном координатном базисе, делает коммутатор доступным для применения мощных методов индексной техники.

Коммутатор в роли «замыкающ кривые»

3. Наглядное представление коммутатора $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ (дополнение 9.2) выявляет его фундаментальную роль как «замыкающего кривые»— роль, которая окажется важной при анализе кривизны в гл. 11.

Коммутаторы находят применение, когда нужно провести различие между координатным $\{\mathbf{e}_\alpha\} = \{\partial/\partial x^\alpha\}$ и некоординатным базисами. Поскольку частные производные всегда коммутируют между собой,

$$[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = [\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta] = 0 \tag{9.21}$$

в любом координатном базисе. И обратно, если задано поле базисных векторов («поле системы отсчета») $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$, и мы не знаем, существует ли система координат $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$, в которой $\{\mathbf{e}_\alpha\} = \{\partial/\partial x^\alpha\}$, то это можно узнать при помощи простого теста: находим $(4 \times 3)/2 = 6$ коммутаторов $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]$; если все они равны нулю, то такая система координат существует. Если нет, то ее не существует. Короче, $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$ *является базисом, определяемым системой координат, тогда и только тогда, когда* $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 0$ *для всех* $\mathbf{e}_\alpha$ *и* $\mathbf{e}_\beta$. (Доказательство см. в упражнении 9.9; одно из важнейших приложений см. в § 11.5.) Базисы, определяемые системой координат, иногда называют *голономными*. В «неголономном базисе» (некоординатном базисе) вводятся коммутационные коэффициенты $c_{\mu\nu}{}^\alpha$, определяемые выражением

Нулевой коммутатор: тест для координатных базисов

Определение коммутационных коэффициентов

$$[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = c_{\mu\nu}{}^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \tag{9.22}$$

Они входят в компонентное выражение для коммутатора произвольных векторных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\mathbf{u}[v^\beta] - \mathbf{v}[u^\beta] + u^\mu v^\nu c_{\mu\nu}{}^\beta)\,\mathbf{e}_\beta \tag{9.23}$$

(см. упражнение 9.10).

Сравнение обозначений, используемых физиками и математиками

[*Предостережение*] Описывая функции и поля, математики и физики часто используют одни и те же символы, для обозначения понятий, которые противоречат друг другу. Физик может написать $\mathscr{E}$, имея в виду длину какой-нибудь важной части конструируемого им прибора, а затем перейти к $\mathscr{E}(T)$, когда ему нужно рассмотреть, как она реагирует на изменения температуры. Тогда $\mathscr{E}$ является числом, а $\mathscr{E}(T)$ — функцией. Математик же обозначит через f функцию, рассматривая ее как элемент какого-нибудь бесконечномерного пространства функций. Если у функции есть аргумент, то он напишет $f(x)$, что является просто числом — значением f в точке x. Столкнувшись с этими прямо противоположными манерами выражаться физиков и математиков, авторы заняли колеблющуюся позицию. Обычно мы используем утверждения, принятые у физиков, например: «На кривой $\mathscr{P}(\lambda)$ . . .». Читатель сам может перевести их на строгий математический язык: «Рассмотрим кривую $\mathscr{C}$, точки которой имеют вид $\mathscr{P} = \mathscr{C}(\lambda)$; на этой кривой ...». Но время от времени читатель будет сталкиваться с абзацем, звучащим педантично и написанным на жаргоне, принятом в кругу математиков (пример: дополнение 23.3). В таких абзацах речь идет о понятиях и соотношениях столь сложных, что обычный для физиков способ выражаться крайне запутал бы ситуацию. К тому же они не позволят читателю настолько вжиться в физический жаргон, что для него станет неприемлемой математическая литература, которая благодаря последовательному использованию совершенно однозначных обозначений обладает огромными преимуществами ясности изложения и экономии мысли.]

9.7. Коммутаторы

УПРАЖНЕНИЯ

Найдите коммутатор $[\mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}]$ векторных полей

$$\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Выразите результат в виде линейной комбинации $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ и $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$.

9.8. Операторы момента импульса

В декартовых координатах трехмерного эвклидова пространства три «оператора момента импульса» (векторные поля) $\mathbf{L}_j$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{L}_j \equiv \varepsilon_{jkl} x^k (\partial/\partial x^l).$$

Изобразите эти три векторных поля на рисунке. Найдите их коммутаторы двумя путями: аналитически и с помощью чертежа.

9.9. Коммутаторы и координатные базисы

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — векторные поля в пространстве-времени. Покажите, что в некоторой окрестности произвольно выбранной точки система координат, для которой

$$\mathbf{u} = \partial/\partial x^1, \quad \mathbf{v} = \partial/\partial x^2,$$

существует тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно независимы и коммутируют:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0.$$

Убедитесь сначала, что этот результат согласуется со вторым рисунком в дополнении 9.2, а затем докажите его математически. *Примечание.* Этот результат можно обобщить на четыре произвольных векторных поля $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Система координат, в которой $\mathbf{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$, существует тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ линейно независимы и $[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = 0$ для всех пар $\mathbf{e}_\mu$, $\mathbf{e}_\nu$.

9.10. Компоненты коммутатора в некоординатном базисе

Выведите соотношение (9.23).

9.11. Производная Ли

«Производная Ли» векторного поля $\mathbf{v}$ ($\mathscr{P}$) вдоль векторного поля $\mathbf{u}$ ($\mathscr{P}$) определяется следующим образом:

$$\mathbf{L}_\mathbf{u}\mathbf{v} \equiv [\mathbf{u}, \mathbf{v}]. \tag{9.24}$$

Нарисуйте на листе бумаги семейство кривых, заполняющих плоскость («конгруэнция»). В произвольной точке листа $\mathscr{P}_0$ нарисуйте произвольный вектор $\mathbf{v}$. Перенесите этот вектор вдоль кривой, проходящей через $\mathscr{P}_0$, с помощью *закона переноса Ли* $\mathbf{L}_\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$, где $\mathbf{u} = d/dt$ — касательный вектор кривой. Изобразите полученный в результате вектор $\mathbf{v}$ в различных точках $\mathscr{P}$ (t) на кривой.

9.12. Тождество Якоби

а. Докажите тождество Якоби

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = 0; \tag{9.25}$$

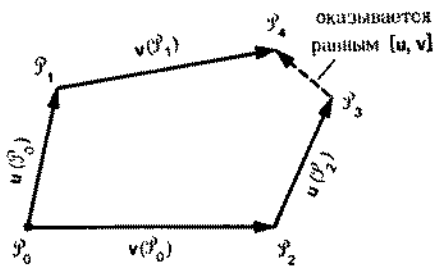
для этого выпишите все члены вида $\partial_\mathbf{u}\partial_\mathbf{v}\partial_\mathbf{w}$, покажите, что они взаимно уничтожаются, и отсюда, используя симметрию, заключите, что все остальные члены, как, например, $\partial_\mathbf{w}\partial_\mathbf{u}\partial_\mathbf{v}$, также взаимно уничтожаются.

б. Выпишите это тождество в индексных обозначениях.

в. Дайте рисунок, соответствующий этому тождеству (см. дополнение 9.2).

Дополнение 9.2. КОММУТАТОР В КАЧЕСТВЕ ЗАМЫКАЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКА

А. Наглядное представление в плоском пространстве-времени

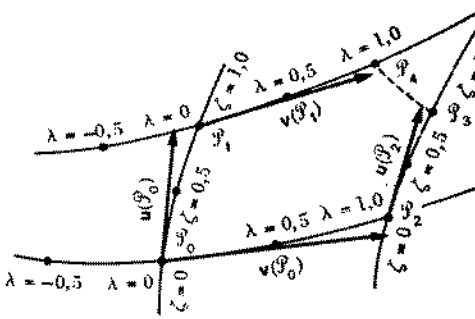


1. Чтобы сразу же не перегружать воображение читателя, рассмотрим сначала плоское пространство-время, когда два векторных поля $\mathbf{u}(\mathscr{P})$ и $\mathbf{v}(\mathscr{P})$ могут быть отложены в самом пространстве-времени.
2. Выберем событие $\mathscr{P}_0$, в котором надо найти коммутатор $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.
3. Обозначим события, изображенные на рисунке, $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$, $\mathscr{P}_4$.
4. Тогда вектор $\mathscr{P}_4 - \mathscr{P}_3$, замыкающий изображенную кривую из четырех отрезков, может быть следующим образом выражен в координатном базисе:

$$\mathscr{P}_4 - \mathscr{P}_3 = [\mathbf{u}(\mathscr{P}_0) + \mathbf{v}(\mathscr{P}_1)] - [\mathbf{u}(\mathscr{P}_2) + \mathbf{v}(\mathscr{P}_0)] =$$
$$= [\mathbf{v}(\mathscr{P}_1) - \mathbf{v}(\mathscr{P}_0)] - [\mathbf{u}(\mathscr{P}_2) - \mathbf{u}(\mathscr{P}_0)] = (v^\beta{}_{,\alpha} u^\alpha \mathbf{e}_\beta)_{\mathscr{P}_0} - (u^\beta{}_{,\alpha} v^\alpha \mathbf{e}_\beta)_{\mathscr{P}_0} + \text{ошибки} =$$
$$= [\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\mathscr{P}_0} + \text{ошибки}.$$
$$\uparrow$$
(члены вида $v^\beta{}_{,\mu\nu} u^\mu u^\nu \mathbf{e}_\beta$)

5. Заметим, что если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ уменьшить в два раза, то $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ уменьшится в четыре раза, тогда как члены, содержащие ошибки, уменьшатся в 8 раз. Таким образом, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ в точности представляет разрыв кривой из четырех отрезков («четырехсторонника») в пределе, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ достаточно малы; т. е. $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *замыкает четырехсторонник*, ребрами которого являются векторные поля $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Б. Наглядное представление в отсутствие метрики и в искривленном пространстве-времени с метрикой



1. Здесь должен быть такой же рисунок, как и выше, но мы теперь не осмеливаемся (по крайней мере вначале) отложить векторные поля в самом пространстве-времени. Вместо этого мы проводим два семейства кривых: кривые, для которых $\mathbf{u}(\mathscr{P})$ является касательным вектором, и кривые, для которых $\mathbf{v}(\mathscr{P})$ является касательным вектором.
2. Разрыв $\mathscr{P}_4 - \mathscr{P}_3$ кривой, состоящей из четырех участков, можно охарактеризовать разностью $f(\mathscr{P}_4) - f(\mathscr{P}_3)$ значений произвольной функции в точках $\mathscr{P}_4$ и $\mathscr{P}_3$. Эта разность в координатном базисе равна

$$f(\mathscr{P}_4) - f(\mathscr{P}_3) = \underbrace{[f(\mathscr{P}_4) - f(\mathscr{P}_1)]}_{\left(f_{,\alpha} v^\alpha + \frac{1}{2} f_{,\alpha\beta} v^\alpha v^\beta\right)_{\mathscr{P}_1}} + \underbrace{[f(\mathscr{P}_1) - f(\mathscr{P}_0)]}_{\left(f_{,\alpha} u^\alpha + \frac{1}{2} f_{,\alpha\beta} u^\alpha u^\beta\right)_{\mathscr{P}_0}} -$$

$$= \underbrace{[f(\mathscr{P}_2) - f(\mathscr{P}_0)]}_{\left(f_{,\alpha}v^\alpha + \frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}v^\alpha v^\beta\right)_{\mathscr{P}_0}} - \underbrace{[f(\mathscr{P}_3) - f(\mathscr{P}_2)]}_{\left(f_{,\alpha}u^\alpha + \frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\right)_{\mathscr{P}_2}} =$$

$$= [(f_{,\alpha}v^\alpha)_{,\beta}u^\beta - (f_{,\alpha}u^\alpha)_{,\beta}v^\beta]_{\mathscr{P}_0} + \text{«кубические ошибки»} =$$

$$= [(u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta})\,\partial f/\partial x^\alpha]_{\mathscr{P}_0} + \text{«кубические ошибки»} =$$

$$= \{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\,[f]\}_{\mathscr{P}_0} + \text{«кубические ошибки»}.$$

Здесь «кубические ошибки» уменьшаются в 8 раз (тогда как $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]f$ уменьшается в 4 раза) при уменьшении $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в два раза.

3. Результат

$$f(\mathscr{P}_4) - f(\mathscr{P}_3) = \{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\,[f]\}_{\mathscr{P}_0} + \text{«кубические ошибки»}$$

гласит, что $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ представляет собой касательный вектор в $\mathscr{P}_0$, описывающий, насколько разделены между собой точки $\mathscr{P}_3$ и $\mathscr{P}_4$. Это описание можно сделать как угодно точным, если взять $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ достаточно малыми. Таким образом, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ замыкает четырехсторонник, ребрами которого являются проекции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ на пространство-время.

В. В чем смысл рисунков

1. Рисунки не могут заменить вычисления. Они скорее помогают: а) предположить наличие геометрических соотношений, о существовании которых ранее не подозревалось и справедливость которых затем подтверждается вычислениями, и б) интерпретировать только что узнанные геометрические результаты.
2. Такая роль рисунков, как правило, не связанная непосредственно с вычислениями, позволяет нам рисовать их до некоторой степени небрежно. В пункте Б не было достигнуто существенно нового понимания по сравнению с пунктом А, несмотря на то, что мы тщательно размещали касательные векторы в соответствующих касательных пространствах, а в пространстве-времени оставили лишь кривые. Более того, первоначальный рисунок (пункт А) был понятнее, поскольку он гораздо проще.
3. Все это служит оправданием для использования «небрежных» рисунков, на которых касательные векторы изображаются в самом пространстве-времени, по крайней мере до тех пор, пока эти касательные векторы малы и время от времени производится контроль поведения ошибок при уменьшении векторов в два раза.

§ 9.7. МНОГООБРАЗИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Пространство-время — не единственная область, где можно применять понятия данной главы. Точки, кривые, векторы, 1-формы и тензоры существуют в любом «дифференцируемом многообразии». Использование их при изучении дифференцируемых много-

образий составляет раздел математики, называемый *дифференциальной топологией*,— отсюда и название данной главы.

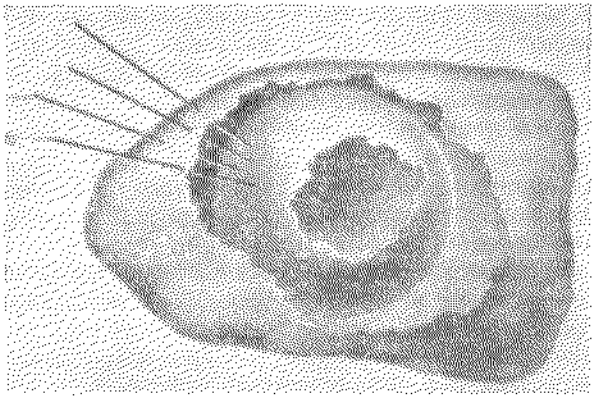
Математик обычно начинает построение дифференциальной топологии с введения некоторых простейших понятий, таких, как множества и топологии множеств; затем строит из них довольно сложную конструкцию, которую потом уже использует для определения понятия дифференцируемого многообразия. Но большинство физиков удовлетворяются менее четким интуитивным определением многообразия: грубо говоря, n-мерное *дифференцируемое многообразие* представляет собой множество «точек», соединенных непрерывным и дифференцируемым образом, т. е. так, что в достаточно малой области эти точки можно поставить во взаимно однозначное соответствие с открытым множеством точек в R^n. [R^n есть n-мерное числовое пространство, т. е. пространство упорядоченных совокупностей из n чисел $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.] Это соответствие наделяет изучаемую окрестность системой координат.

«Определение» дифференцируемого многообразия

Несколько примеров лучше передадут смысл этого понятия, чем приведенное определение. Однако простейшие примеры (эвклидово 3-пространство, поверхность сферы) вызывают в памяти слишком много геометрических представлений, относящихся к геометрии на более высокому ровне; поэтому мы вынуждены рассмотреть что-либо менее тривиальное. Пусть R^3 — трехмерное числовое пространство с обычными для современного анализа понятиями непрерывности и дифференцируемости. Точками ξ в R^3 являются тройки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ вещественных чисел. Назовем *лучом* $\mathcal{P}$ в R^3 полубесконечную линию, выходящую из начальной точки и состоящую из всех ξ вида $\xi = \lambda\eta$, где $\eta \neq 0$ фиксировано, а $\lambda > 0$ — произвольное положительное вещественное число (фиг. 9.3). Множество S^2 всех отдельных лучей представляет собой хороший пример дифференцируемого многообразия. Если f — функция, имеющая определенное вещественное значение $f(\mathcal{P})$ на каждом луче $\mathcal{P}$ [f записывается в виде $S^2 \to R$: $\mathcal{P} \to f(\mathcal{P})$], то интуитивно (или даже с очевидностью) должно быть ясно, что то, что мы имеем в виду, можно определить, сказав, что f непрерывна и дифференцируема. В этом смысле S^2 само непрерывно и дифференцируемо. Таким образом, S^2 является многообразием, а лучи $\mathcal{P}$ суть его точки. Есть много других многообразий, которые в рамках дифференциальной топологии неотличимы от S^2. Простейшим из них является двумерная сферическая поверхность (2-сфера), которая играет роль стандартного представления S^2; она представляет собой множество точек ξ в R^3, удовлетворяющих соотношению $(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 = 1$. Ясно, что каждую точку этой стандартной двумерной сферической поверхности пересекает своя, отличная от других точка $\mathcal{P}$ из S^2 (луч в R^3) и что это соответствие является непрерывным и дифференцируемым в обе стороны (от лучей к точкам и от точек к лучам). То же самое справедливо для любой эллипсоидальной поверхности в R^3,

Примеры дифференцируемых многообразий

Многообразие S^2



ФИГ. 9.3.
Три различных представления дифференцируемого многообразия S^2. Первое есть множество всех лучей, выходящих из одной начальной точки; второе — сфера, которую они пересекают; третье — замкнутая поверхность причудливой формы, которую каждый луч пересекает ровно один раз.

окружающей точку начала, а также и для любой другой поверхности, окружающей начало, через каждую точку которой проходят разные лучи. Каждая из таких поверхностей охватывает одни и те же понятия глобальной непрерывности и дифференцируемости и представляет одно и то же абстрактное дифференцируемое многообразие S^2 — 2-сферу. Эти поверхности и пучок лучей, с которого мы начали, обладают на данном начальном уровне геометрии одними и теми же свойствами. Примером двумерного дифференцируемого многообразия, которое уже на этом уровне

Многообразие T^2

имеет другую геометрическую структуру (другую «дифференцируемую структуру»), является тор T^2 — поверхность бублика. Эту поверхность невозможно гладким образом погрузить в R^3 так, чтобы каждую ее точку пересекал отдельный луч $\mathscr{P} \in S^2$: не существует обратимого и дифференцируемого соответствия между T^2 и S^2.

Многообразие SO (3) (группа вращений)

Другим примером многообразия является группа вращений SO (3), точками $\mathscr{P}$ которой являются все ортогональные матрицы 3×3 с детерминантом, равным единице, т. е. $\mathscr{P} = \| P_{ij} \|$, где $\mathscr{P}^T\mathscr{P} = 1$ и $\det \mathscr{P} = 1$. Это трехмерное пространство (в качестве параметров в вычислениях часто используются три угла Эйлера), в котором вводятся дифференциальные понятия (например, угловая скорость); следовательно, это — многообразие. Аналогично многообразием является и группа Лоренца.

Дифференцируемость многообразия (т. е. возможность определить на нем дифференцируемые функции) позволяет если не глобально, то хотя бы локально ввести системы координат, а также кривые, касательные пространства, касательные векторы, 1-фор-

мы и тензоры,— точно так же, как это было сделано в случае пространства-времени. Но один только факт, что многообразие дифференцируемо, вовсе не означает, что в нем существуют такие понятия, как геодезические, параллельный перенос, кривизна, метрика и длина. Это дополнительные уровни структуры, которыми обладают некоторые многообразия, но не все. Грубо говоря, у каждого многообразия есть свойства гладкости и топология, но без дополнительной структуры оно не обладает ни формой, ни размерами.

Определение аффинной и римановой геометрий

Тот раздел математики, в котором многообразие наделяется геодезическими, параллельным переносом и кривизной (формой), называется *аффинной геометрией*; тот раздел, в котором многообразие наделяется метрикой, называется *римановой геометрией*. Их изучению посвящено несколько следующих глав.

Упражнения, посвященные изучению группы вращений

УПРАЖНЕНИЯ

По мере того, как изложение дифференциальной геометрии в последующих главах будет все более и более усложняться, в упражнениях мы будем время от времени возвращаться к группе вращений как к примеру многообразия. Результаты, полученные в этих упражнениях, будут впоследствии использованы в дополнении 30.1. при рассмотрении «модели перемешанного мира», которая представляет собой особенно важный случай решения эйнштейновского уравнения поля.

Прежде чем приступать к этим упражнениям, у читателя может возникнуть желание просмотреть, как осуществляется параметризация матриц вращения с помощью углов Эйлера, что изложено, например, в книге [42].

9.13. Группа вращений: генераторы

Обозначим через $\mathscr{K}_l$ три матрицы 3×3, элементы которых равны $(K_l)_{mn} = \varepsilon_{lmn}$.

а. Выпишите матрицы $\mathscr{K}_1$, $(\mathscr{K}_1)^2$, $(\mathscr{K}_1)^3$ и $(\mathscr{K}_1)^4$.

б. Просуммируйте ряд

$$\mathscr{R}_x(\theta) \equiv \exp(\mathscr{K}_1\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}(\mathscr{K}_1)^n. \tag{9.26}$$

Покажите, что $\mathscr{R}_x(\theta)$ является матрицей вращения и осуществляет поворот на угол θ вокруг оси x.

в. Подобным же образом покажите, что $\mathscr{R}_z(\phi) = \exp(\mathscr{K}_3\phi)$ и $\mathscr{R}_y(\chi) = \exp(\mathscr{K}_2\chi)$ являются матрицами вращения и осуществляют повороты на углы ϕ и χ соответственно вокруг осей z и y.

г. Объясните, почему выражение $\mathscr{P} = \mathscr{R}_z(\psi)\,\mathscr{R}_x(\theta)\,\mathscr{R}_z(\phi)$ может служить определением эйлеровых угловых координат ψ, θ, ϕ для элемента общего вида $\mathscr{P} \in SO(3)$ группы вращений.

д. Пусть $\mathscr{C}$ — кривая $\mathscr{P} = \mathscr{R}_z(t)$, проходящая через единич-

УПРАЖНЕНИЯ

ную матрицу $\mathscr{C}(0) = \mathscr{Y} \in SO(3)$. Покажите, что касательный к ней вектор $(d\mathscr{C}/dt)(0) \equiv \dot{\mathscr{C}}(0)$ не равен нулю. Для этого найдите $\dot{\mathscr{C}}(0) f_{12}$, где f_{12} — функция $f_{12}(\mathscr{P}) = P_{12}$, значением которой является элемент матрицы $\mathscr{P}$ под номером 12.

е. Определите на $SO(3)$ векторное поле $\mathbf{e}_3$, положив, что $\mathbf{e}_3(\mathscr{P})$ есть касательный вектор (при $t = 0$) к кривой $\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_z(t)\mathscr{P}$, проходящей через $\mathscr{P}$. Покажите, что $\mathbf{e}_3(\mathscr{P})$ нигде не обращается в нуль. *Примечание.* $\mathbf{e}_3(\mathscr{P})$ называется «генератором вращений вокруг оси z», поскольку он направлен из $\mathscr{P}$ в сторону соседних вращений $\mathscr{R}_z(t)\mathscr{P}$, отличающихся от $\mathscr{P}$ поворотом вокруг оси z.

ж. Покажите, что $\mathbf{e}_3 = (\partial/\partial\psi)_{\theta\phi}$.

з. Выведите следующие формулы, справедливые при $t \ll 1$:

$$\mathscr{R}_x(t)\mathscr{R}_z(\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi) =$$
$$= \mathscr{R}_z(\psi - t\sin\psi\operatorname{ctg}\theta)\mathscr{R}_x(\theta + t\cos\psi)\mathscr{R}_z(\phi + t\sin\psi/\sin\theta);$$
$$\mathscr{R}_y(t)\mathscr{R}_z(\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi) =$$
$$= \mathscr{R}_z(\psi + t\cos\psi\operatorname{ctg}\theta)\mathscr{R}_x(\theta + t\sin\psi)\mathscr{R}_z(\phi - t\operatorname{ctg}\psi/\sin\theta).$$

и. Положите по определению, что $\mathbf{e}_1(\mathscr{P})$ и $\mathbf{e}_2(\mathscr{P})$ — касательные векторы (при $t = 0$) к кривым $\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_x(t)\mathscr{P}$ и $\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_y(t)\mathscr{P}$ соответственно. Покажите, что

$$\mathbf{e}_1 = \cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$
$$\mathbf{e}_2 = \sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

$\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ являются «генераторами вращения вокруг осей x и y».

9.14. Группа вращений: структурные константы

Воспользуйтесь в качестве базисных векторов в многообразии группы вращений тремя векторными полями, построенными в предыдущем упражнении:

$$\mathbf{e}_1 = \cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$
$$\mathbf{e}_2 = \sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \qquad (9.27)$$
$$\mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial\psi}.$$

Эти уравнения выражают данный «базис генераторов» через базис, определяемый углами Эйлера. Покажите, что коммутационные коэффициенты в этом базисе имеют вид

$$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \qquad (9.28)$$

независимо от того, где расположен элемент $\mathscr{P}$ группы вращений. Эти коэффициенты называются также *структурными константами* группы вращений.

10. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Достаточно одного принципа относительности Галилея, чтобы убедительно доказать аффинный характер нашего мира.
ГЕРМАН ВЕЙЛЬ

Эта глава целиком относится к курсу 2.
Необходимым подготовительным материалом для нее является гл. 9.
Она нужна в качестве подготовительного материала для
1) гл. 11—13 (дифференциальная геометрия, ньютоновская теория тяготения),
2) второй половины гл. 14 (вычисление кривизны) и
3) подробностей, но не идей, гл. 15 (тождества Бианки).

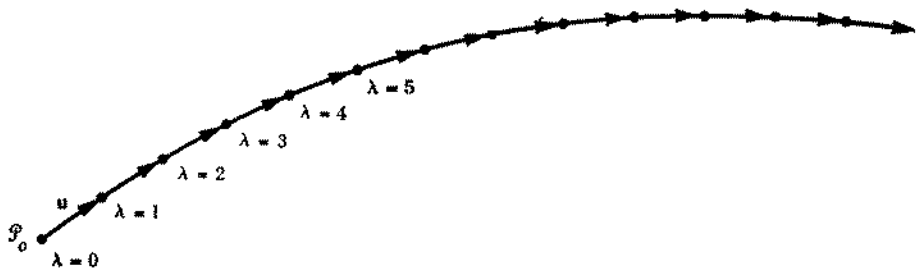
§ 10.1. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Свободное падение является «естественным состоянием движения», настолько естественным, что *нейтральное пробное тело в состоянии свободного падения описывает в пространстве-времени траекторию, которая не зависит ни от строения тела, ни от его состава* («слабый принцип эквивалентности» Эйнштейна, Этвеша, Дикке: см. дополнение 1.2 и § 38.3).

Представим себе, что пространство-время заполнено всевозможными траекториями свободного падения. Выберем событие. Выберем в нем скорость. Они определят единственную траекторию.

Частицы в свободном падении и их часы

Будем более точными. Зададимся целью, извлечь максимальное количество информации, которое содержит каждая траектория. Является ли она просто последовательностью точек, по которой пробное тело осуществляет свободное падение? Нет, она есть нечто большее. Каждое пробное тело может нести на себе часы (часы одного и того же вида, «хорошие» в смысле фиг. 1.9, т. е. не зависящие от строения или состава тела). В процессе движения тела часы идут и помечают каждое событие на его траектории числом — моментом времени λ, в который тело там находилось. Результат: траектория свободного падения — не про-



ФИГ. 10.1
Геодезическая, трактуемая как правило «прямолинейного параллельного переноса». Выберем событие $\mathscr{P}_0$ и в нем касательный вектор $\mathbf{u} = d/d\lambda$. Построим единственную геодезическую $\mathscr{P}(\lambda)$, которая 1) проходит через $\mathscr{P}_0$: $\mathscr{P}(0) = \mathscr{P}_0$ и 2) касательным вектором к которой в $\mathscr{P}_0$ является $\mathbf{u}$: $(d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=0} = \mathbf{u}$. Эту геодезическую можно считать правилом, согласно которому мы берем $\mathbf{u}$ из $\mathscr{P}(0)$ и откладываем его от его предыдущего острия $\mathscr{P}(1)$ как можно более прямо:

$$\mathbf{u}_{\lambda=1} = (d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=1};$$

затем берем его снова и откладываем как можно более прямо от $\mathscr{P}(2)$:

$$\mathbf{u}_{\lambda=2} = (d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=2}$$

и т. д. Эта последовательность «как можно более прямолинейных» переносов «от основания к острию» поясняет смысл того, что $(d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=17}$ и $\mathbf{u} = (d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=0}$ можно считать «одним и тем же вектором» в различных точках на геодезической; или, что эквивалентно, один из них получен из другого «прямолинейным параллельным переносом».

сто последовательность точек; это параметризованная последовательность, *кривая* $\mathscr{P}(\lambda)$.

Однозначна ли такая параметризация? Не совсем. Совершенно произвольно могут быть выбраны 1) начало отсчета времени $\mathscr{P}(0)$ и 2) единицы (сантиметры, секунды, фарлонги, ...), в которых часы отмеряют время λ. Следовательно, λ однозначно лишь с точностью до линейных преобразований:

$$\lambda_{\text{новое}} = a\lambda_{\text{старое}} + b; \tag{10.1}$$

b («новое начало отсчета времени») есть число, которое не зависит от положения на данной траектории свободного падения, то же самое справедливо и для a («отношение новых единиц к старым»).

Определение геодезической как траектории свободного падения

В искривленном пространстве-времени Эйнштейна (а также в пространстве-времени Картана — Ньютона, гл. 12) эти параметризованные траектории свободного падения являются самыми прямыми из всех возможных кривых. Поэтому этим траекториям дается то же название *геодезические*, которое математики употребляют для прямых линий в искривленном многообразии; так же, как это принято у математиков, для параметра λ, отсчитываемого

вдоль геодезических свободного падения, употребляется название *аффинный параметр*. Тогда соотношение 10.1 гласит, что «аффинный параметр геодезической единствен с точностью до линейных преобразований».

Определение аффинного параметра как времени, отсчитываемого часами вдоль траектории свободного падения

Априори аффинный параметр («время, отсчитываемое часами») вдоль геодезической не имеет ничего общего с метрикой. Он существует и в отсутствие метрики (например, в пространстве — времени Картана — Ньютона). Он позволяет сравнивать, насколько разделены события на геодезической ($\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}$ «отстоят друг от друга в два раза дальше», чем $\mathscr{R}$ и $\mathscr{Q}$, если $|\lambda_{\mathscr{B}} - \lambda_{\mathscr{A}}| = 2\,|\lambda_{\mathscr{R}} - \lambda_{\mathscr{Q}}|$). Но афинный параметр позволяет измерять относительное разделение событий лишь вдоль своей геодезической, и с его помощью невозможно выйти за пределы этой геодезической.

Описанные выше и другие характерные свойства геодезических представлены на фиг. 10.1 и в дополнении 10.1.

Дополнение 10.1. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Данная точка и данный касательный вектор определяют единственную аффинно параметризованную кривую («геодезическую»).

Геодезические в теории тяготения

Мировая линия нейтральной пробной частицы («геометрическая теория тяготения Эйнштейна», а также «геометрическая интерпретация Картана ньютоновской теории тяготения»):

1) «данная точка»: какое-либо событие на этой мировой линии;
2) «данный вектор»: вектор («смещение, соответствующее изменению параметра на единицу»), касательный к мировой линии в момент, определяемый этим событием;
3) «единственная кривая»: все нейтральные пробные частицы с данным начальным положением и данной начальной скоростью движутся по одной и той же мировой линии в пространстве-времени независимо от их состава и независимо от их массы (малой — пробная масса!; «слабый принцип эквивалентности» Эйнштейна — Этвеша — Дикке);
4) «аффинный параметр»: в теории Картана — Ньютона — ньютоновское «мировое время» (измеряемое по «хорошим» часам); в реальном физическом мире — «собственное время» (измеряемое по «хорошим» часам) вдоль времениподобной геодезической;
5) «параметризованная кривая»: а) аффинный параметр единствен с точностью до преобразований вида $\lambda \to a\lambda + b$, где a и b — постоянные (на данной геодезической имеется произвол лишь в выборе точек с нулевым и единичным значениями параметра); или, что эквивалентно, б) по трем произвольным событиям $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ на геодезической можно с помощью четко определенной физической процедуры («хронометрирова-

ния») найти единственное четвертое событие $\mathscr{D}$ на геодезической, такое, что $(\lambda_{\mathscr{D}}-\lambda_{\mathscr{C}})$ равно $(\lambda_{\mathscr{B}}-\lambda_{\mathscr{A}})$; или, что эквивалентно, в) [дифференциальная формулировка] по заданному в точке $\mathscr{A}$ касательному вектору с компонентами $(dx^\alpha/d\lambda)_{\mathscr{A}}$ можно с помощью физической процедуры (опять «хронометрирования») построить «тот же самый касательный вектор» в точке $\mathscr{C}$, компоненты которого $(dx^\alpha/d\lambda)_{\mathscr{C}}$ определяются однозначным образом (векторы «равны»; компоненты же, как правило, не равны, из-за кручения и вращения произвольных базисных векторов между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$).

§ 10.2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ: НАГЛЯДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Два пробных тела, первоначально падавших в пространстве-времени по двум соседним параллельным геодезическим, благодаря действию приливных сил тяготения (кривизны пространства-времени) начинают сближаться или удаляться по отношению друг к другу. Чтобы описать это утверждение количественно, мы должны количественно описать понятия «параллельности» и «ускорения по отношению друг к другу». Начнем с понятия параллельности.

Сравнение векторов в различных событиях с помощью параллельного переноса

Рассмотрим два соседних события $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, соединенных кривой $\mathscr{P}(\lambda)$. Вектор $\mathbf{v}_{\mathscr{A}}$ расположен в касательном пространстве события $\mathscr{A}$, а вектор $\mathbf{v}_{\mathscr{B}}$ — в касательном пространстве события $\mathscr{B}$. Как можно сказать, параллельны ли $\mathbf{v}_{\mathscr{A}}$ и $\mathbf{v}_{\mathscr{B}}$, и каким образом можно сравнить их длины? Ответ дает принцип эквивалентности: пусть в пространстве-времени вдоль мировой линии $\mathscr{P}(\lambda)$ движется наблюдатель (используя ракетную тягу). Он несет с собой вектор $\mathbf{v}_{\mathscr{A}}$ и с помощью эталонов плоского пространства Ньютона или Минковского следит за тем, чтобы этот вектор по пути не менялся (согласно принципу эквивалентности, локально справедлива физика плоского пространства!). Прибыв в событие $\mathscr{B}$ наблюдатель сравнивает свой, «перенесенный параллельно», вектор $\mathbf{v}_{\mathscr{A}}$ с вектором $\mathbf{v}_{\mathscr{B}}$. Если они совпадают, то исходный вектор $\mathbf{v}_{\mathscr{A}}$ (по определению) параллелен $\mathbf{v}_{\mathscr{B}}$, и они имеют одну и ту же длину. (Если нет метрики, то невозможно количественно описать понятие длины; тем не менее параллельный перенос позволяет сравнивать длины!)

Принцип эквивалентности вошел в данное рассуждение, возможно, несколько необычным образом: он был применен не к свободно падающему наблюдателю, а к наблюдателю, который может испытывать ускорение. Но от фундаментального принципа нельзя избавиться, придумав замысловатый способ его применения. (Сложные вечные двигатели так же не могут существо-

вать, как и простые!) Принцип эквивалентности утверждает, что ни одно локальное измерение, не чувствительное к приливным силам тяготения, не позволит обнаружить какое-либо различие между плоским и кривым пространством-временем. Пусть в распоряжении штурмана космического корабля имеется инерционная система управления (акселерометры, гироскопы, вычислительные машины), способная сохранять инерциальную систему отсчета в плоском пространстве-времени; в плоском пространстве-времени с ее помощью можно рассчитать положение и скорость любого объекта в космическом корабле по отношению к данной инерциальной системе отсчета. Вычислительная машина системы управления может быть по желанию запрограммирована либо согласно законам ньютоновской механики в отсутствие тяготения, либо согласно законам специальной теории относительности. Воспользуемся теперь той же системой управления (включая ту же программу для вычислительной машины) в искривленном пространстве-времени. Вектор переносится параллельно, если, согласно показаниям вычислительной машины системы управления, он не меняется.

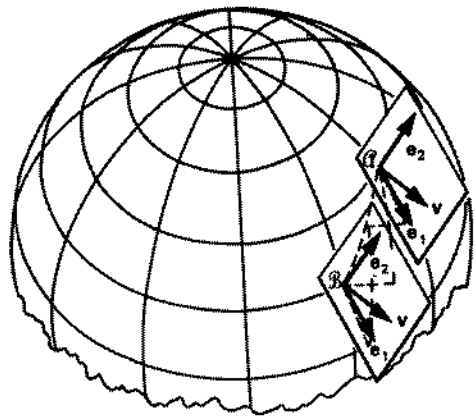
Определение параллельного переноса при помощи инерционной системы управления и принципа эквивалентности

Будет ли результат определенного таким образом переноса зависеть от кривой, соединяющей события $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$? В пространстве-времени без тяготения безусловно нет, поскольку это одно из основных условий, выполнения которых заказчик инерционной системы управления вправе потребовать от изготовителя. Но в искривленном пространстве-времени ответ будет «Да!» Если $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ совпадает с $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ после параллельного переноса вдоль одной кривой, то они вовсе не обязаны совпадать после параллельного переноса вдоль другой кривой. Причиной расхождения является кривизна пространства-времени. Однако мы не готовы к изучению и количественному описанию этих расхождений (гл. 11), пока не создан математический формализм для описания параллельного переноса, что в свою очередь не может быть сделано, пока мы не уточнили «эталоны плоского пространства-времени для сохранения вектора $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ неизменным» в процессе переноса вдоль кривой.

Результат параллельного переноса зависит от пути

Уточнению эталонов плоского пространства-времени посвящено дополнение 10.2. Такое уточнение приводит 1) к построению «лестницы Шилда», позволяющему осуществить параллельный перенос; 2) к понятию «ковариантной производной» $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ векторного поля $\mathbf{v}$ вдоль кривой с касательным вектором $\mathbf{u}$; 3) к «уравнению движения» $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$ для геодезической, согласно которому «касательный вектор геодезической переносится параллельно вдоль геодезической», и 4) к установлению связи между касательными пространствами соседних событий (фиг. 10.2).

Осуществление параллельного переноса с помощью лестницы Шилда; следствия, которые из нее вытекают



ФИГ. 10.2.
Связь между касательными пространствами в соседних точках, ставшая возможной благодаря закону параллельного переноса. В событии $\mathscr{A}$ выбираем касательные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Переносим их параллельно в соседнее событие $\mathscr{B}$. (На фигуре изображена лестница Шилда для переноса $\mathbf{e}_1$.) Тогда любой другой вектор $\mathbf{v}$, будучи перенесен параллельно из $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, будет в обоих событиях иметь одни и те же компоненты (параллельный перенос не может разомкнуть треугольник; см. дополнение 10.2):

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 \quad \text{в} \quad \mathscr{A} \Rightarrow \mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 \quad \text{в} \quad \mathscr{B}.$$

[те же числа, что и в $\mathscr{A}$

[параллельно перенесены из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$

Таким образом, параллельный перенос устанавливает единственное и полное соответствие между касательным пространством в $\mathscr{A}$ и касательным пространством в $\mathscr{B}$. С каждым вектором из $\mathscr{A}$ он отождествляет единственный вектор в $\mathscr{B}$, сохраняя при этом все алгебраические соотношения. Подобным же образом (см. § 10.3) он с каждой 1-формой из $\mathscr{A}$ отождествляет единственную 1-форму в $\mathscr{B}$, с каждым тензором из $\mathscr{A}$ — единственный тензор в $\mathscr{B}$, сохраняя при этом все алгебраические соотношения типа $\langle \sigma, \mathbf{v} \rangle = 19{,}9$ и $\$(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 37{,}1$.

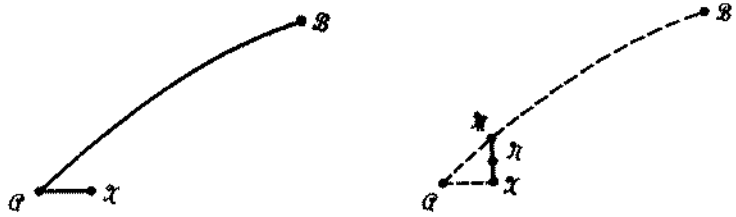
В действительности все это справедливо лишь в пределе, когда $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ бесконечно близки друг к другу. Когда $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ близки, но не бесконечно близки, результаты параллельного переноса по различным кривым слегка отличаются друг от друга; поэтому соответствие между касательными пространствами до некоторой степени не единственно. Но каждый раз, когда расстояние по аффинному параметру между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ уменьшается вдвое, это различие уменьшается в 4 раза; см. гл. 11.

Дополнение 10.2. ОТ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ К ПАРАЛЛЕЛЬНОМУ ПЕРЕНОСУ, ОТ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА К КОВАРИАНТНОМУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ, ОТ КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ К ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ, ...

A. Параллельный перенос, определяемый с помощью геодезических

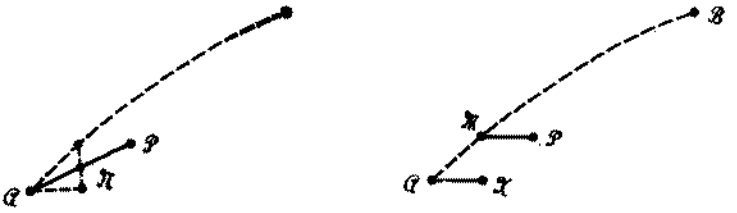
Перенесем произвольный, достаточно короткий участок кривой $\mathcal{AX}$ (т. е. произвольный касательный вектор) параллельно самому себе вдоль кривой $\mathcal{AB}$ в точку $\mathcal{B}$, поступив следующим образом:

1. Возьмем какую-нибудь точку $\mathcal{M}$ на $\mathcal{AB}$, расположенную вблизи $\mathcal{A}$. Через $\mathcal{X}$ и $\mathcal{M}$ проведем геодезическую $\mathcal{XM}$. Выберем некоторую аффинную параметризацию λ кривой $\mathcal{XM}$ и найдем единственную точку $\mathcal{N}$, удовлетворяющую условию $\lambda_{\mathcal{N}} = {}^1/_2 (\lambda_{\mathcal{X}} + \lambda_{\mathcal{M}})$ («равные промежутки времени вдоль $\mathcal{XN}$ и $\mathcal{NM}$»).



2. Проведем геодезическую, которая берет начало в $\mathcal{A}$ и проходит через $\mathcal{N}$, и продлим ее до точки $\mathcal{P}$ так, чтобы приращения параметра на $\mathcal{AN}$ и $\mathcal{NP}$ были равны.

3. Кривая $\mathcal{MP}$ дает вектор $\mathcal{AX}$, перенесенный параллельно самому себе из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$ (при достаточно коротких $\mathcal{AX}$ и $\mathcal{AM}$). Данное построение



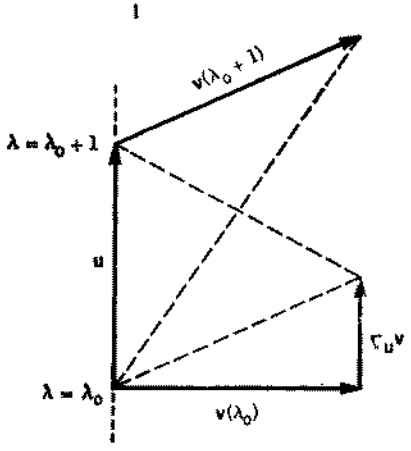
безусловно, дает параллельный перенос в плоском пространстве-времени (ньютоновском или эйнштейновском). Более того, оно локально (векторы $\mathcal{AX}$, $\mathcal{AM}$ и т. п. очень коротки). Следовательно, оно должно работать и в искривленном пространстве-времени. (В нем находит свое выражение принцип эквивалентности.)

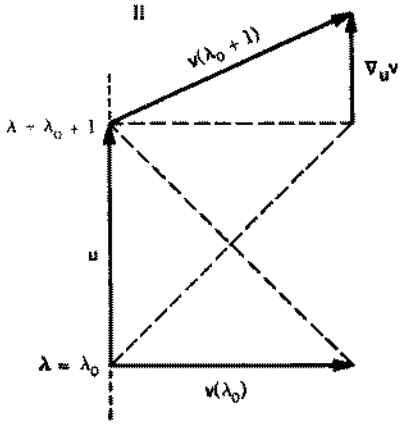
4. Повторив эту процедуру еще и еще раз, получим в конце концов участок кривой $\mathscr{AX}$, перенесенный параллельно самому себе из $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Назовем это построение «лестницей Шилда», следуя аналогичному построению, выполненному Шилдом [147] (см. также [148]). Отметим, что кривая $\mathscr{AB}$ не обязательно должна быть геодезической. Не требуется, чтобы $\mathscr{MQ}$ было прямолинейным продолжением $\mathscr{AM}$ подобно тому, как $\mathscr{NP}$ должно быть прямолинейным продолжением $\mathscr{AN}$.

5. Результат параллельного переноса $\mathscr{AX}$ из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$ зависит от выбранной мировой линии $\mathscr{AB}$ («проявление кривизны пространства-времени»).

Б. Ковариантное дифференцирование, определяемое с помощью параллельного переноса

Зададимся целью узнать, насколько быстро векторное поле $\mathbf{v}$ изменяется вдоль кривой с касательным вектором $\mathbf{u} = d/d\lambda$. Ответ $d\mathbf{v}/d\lambda \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \equiv$ «скорость изменения $\mathbf{v}$ по отношению к λ» $\equiv$ «ковариантная производная $\mathbf{v}$ вдоль $\mathbf{u}$» получается из следующей очевидной процедуры: 1. Берем $\mathbf{v}$ в точке $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$. 2. Переносим его параллельно назад в точку $\lambda = \lambda_0$. 3. Находим, насколько он отличается от $\mathbf{v}$ в этой точке 4. Результат делим на ε (и переходим к пределу $\varepsilon \to 0$):





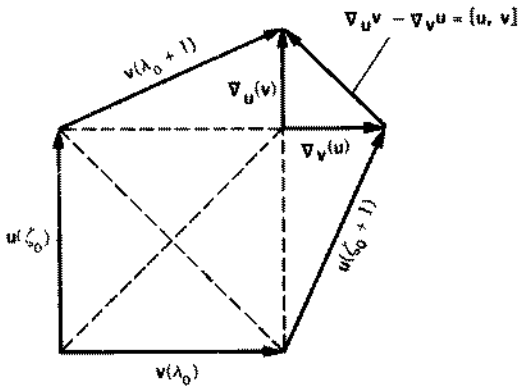
$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{[\mathbf{v}(\lambda_0 + \varepsilon)]_{\text{перенесенный параллельно в } \lambda_0} - \mathbf{v}(\lambda_0)}{\varepsilon} \right\}.$$

Если $\mathbf{u} = d/d\lambda$ мал по сравнению с характерным масштабом неоднородности векторного поля $\mathbf{v}$, то $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ можно находить прямо из фиг. I, или с тем же успехом, из фиг. II.

В. «Симметрия» ковариантного дифференцирования

Рассмотрим два векторных поля. Объединим два рисунка для $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ и $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ в один. Из него находим, что $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ есть вектор, замыкающий четырехсторонник $\mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{u}$, т. е. (см. дополнение 9.2) он является коммутатором $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$



Терминология: оператор ∇ называется *симметричной* («без кручения») ковариантной производной, если $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Другие виды ковариантных производных, изучаемых математиками, не имеют отношения ни к одной теории тяготения, основанной на принципе эквивалентности.

Г. Ковариантное дифференцирование произведений

Нахождение разности и переход к пределу в процедуре, использованной для определения $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, обеспечивают выполнение обычного правила для дифференцирования произведений:

$$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathbf{u}[f])\,\mathbf{v}$$

скалярное поле; векторное поле; «производная f вдоль $\mathbf{u}$»; в первой и второй частях книги обозначалась $\partial_{\mathbf{u}} f$; если $\mathbf{u} = d/d\lambda$, то она равна $df/d\lambda$; иногда обозначается $\nabla_{\mathbf{u}} f$

(доказательство см. в упражнении 10.2).

Д. Аддитивность ковариантного дифференцирования

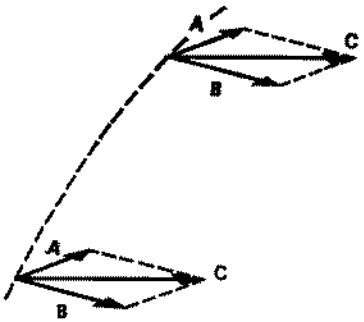
В реальном физическом мире, будь то ньютоновский или релятивистский, параллельный перенос не может разомкнуть треугольник: 1) пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ вначале таковы, что $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$; 2) пусть далее свободно падающий (инерциальный) наблюдатель переносит $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ параллельным образом; 3) тогда все время выполняется $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Любой другой результат нарушил бы принцип эквивалентности!

1. Следствием этого (в чем можно убедиться, просмотрев определение ковариантной производной и заметив, что любой вектор $\mathbf{u}$ можно рас-

сматривать как касательный вектор к мировой линии свободного падения) является

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}+\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}$$

для любого вектора $\mathbf{u}$ и векторных полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.



2. Отсюда, учтя симметрию ковариантной производной и аддитивность «замыкающего четырехсторонники» $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, можно получить

$$\nabla_{\mathbf{u}+\mathbf{n}}\mathbf{v}=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}+\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{v}$$

(см. упражнение 10.1). Этот результат можно вывести и другим способом — из принципа эквивалентности: в локально инерциальной системе, как в специальной теории относительности, так и в ньютоновской теории, изменение $\mathbf{v}$ вдоль $\mathbf{u}+\mathbf{n}$ должно быть равно сумме изменений вдоль $\mathbf{u}$ и вдоль $\mathbf{n}$.

3. Следствие: пусть $\mathbf{n}$ отличается от $\mathbf{u}$ лишь постоянным множителем; тогда имеем

$$\nabla_{a\mathbf{u}}\mathbf{v}=a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}.$$

Е. Геодезические, определяемые с помощью параллельного переноса или ковариантного дифференцирования

Процедура построения «лестницы Шилда» для параллельного переноса (начало данного дополнения), примененная к касательному вектору геодезической (упражнение 10.6), приводит к выводу: касательный вектор геодезической переносится параллельно вдоль геодезической. В переводе на язык ковариантных производных это утверждение принимает вид

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}=d/d\lambda \text{ есть касательный}\\ \text{вектор кривой и } \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\text{кривая есть}\\ \text{геодезическая}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, круг замкнулся: от геодезической к параллельному переносу, от параллельного переноса к ковариантной производной, от ковариантной производной к геодезической.

§ 10.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ: АБСТРАКТНЫЙ ПОДХОД

Построение «лестницы Шилда», описанное в дополнении 10.2, позволяет выявить следующие свойства ковариантной производной в пространстве-времени:

Ковариантная производная: основные свойства

Симметрия:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}-\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \tag{10.2a}$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — произвольные векторные поля.

Дифференцирование произведения:

$$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\partial_{\mathbf{u}}f, \tag{10.2б}$$

где f — произвольная функция, $\mathbf{v}$ — произвольное векторное поле, $\mathbf{u}$ — произвольный вектор.

Аддитивность:

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}, \tag{10.2в}$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — произвольные векторные поля, $\mathbf{u}$ — произвольный вектор:

$$\nabla_{a\mathbf{u}+b\mathbf{n}}\mathbf{v} = a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + b\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{v}, \tag{10.2г}$$

где $\mathbf{v}$ — произвольное векторное поле, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ — произвольные векторы или векторные поля, a и b — произвольные числа или функции.

Любое «правило» ∇ для образования новых векторных полей из старых, удовлетворяющее этим четырем условиям, в дифференциальной геометрии называется симметричной ковариантной производной. Такое правило не вытекает из более простых понятий (гл. 9) кривых, векторов, тензоров и т. д. В пространственно-временной лаборатории существует столько же способов определения правила вычисления ковариантной производной ∇, сколько существует различных способов размещения источников гравитационного поля. Различные распределения масс приводят к различным траекториям свободного падения (геодезическим).

Если в пространстве-времени или в другом каком-либо многообразии заданы геодезические, то с помощью лестницы Шилда (см. дополнение 10.2) можно построить единственный соответствующий им оператор ковариантной производной. Если задана какая-либо ковариантная производная, то можно ввести параллельный перенос с помощью уравнения

$$d\mathbf{v}/d\lambda \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = 0 \Longleftrightarrow \text{векторное поле } \mathbf{v} \text{ переносится параллельно вдоль вектора } \mathbf{u} = d/d\lambda \tag{10.3}$$

Уравнение параллельного переноса

и можно узнать, является ли произвольная данная кривая геодезической:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0 \Longleftrightarrow \text{касательный вектор } \mathbf{u} = d/d\lambda \text{ кривой } \mathcal{P}(\lambda) \text{ переносится параллельно вдоль этой кривой,} \tag{10.4}$$

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0 \Longleftrightarrow \text{кривая } \mathcal{P}(\lambda) \text{ есть геодезическая.}$$

Знание всех геодезических эквивалентно умению вычислять ковариантную производную

Таким образом, знание всех геодезических полностью эквивалентно умению вычислять ковариантную производную.

Ковариантная производная является обобщением градиента в плоском пространстве

Ковариантная производная ∇ является обобщением на случай искривленного пространства-времени понятия градиента ∇ в плоском пространстве. Подобно своему аналогу в плоском пространстве, ее можно трактовать как машину, производящую число $\langle \sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle$ из 1-формы σ, вектора $\mathbf{u}$ и векторного поля $\mathbf{v}$. Эта точка зрения исследуется в дополнении 10.3. Отметим важный факт:

несмотря на то что ковариантную производную можно трактовать как машину, ∇ *не* есть тензор; это нетензорный геометрический объект.

Действие ковариантной производной на функции, 1-формы и тензоры

В искривленном пространстве-времени, так же как и в плоском, оператор ∇ можно применять не только к векторным полям, но и к функциям, к полям 1-форм, к тензорным полям. Его действие на функции определяется очевидным образом:

$$\nabla f \equiv \mathbf{d}f; \quad \nabla_{\mathbf{u}} f \equiv \partial_{\mathbf{u}} f \equiv \mathbf{u}[f] \equiv \langle \mathbf{d}f, \mathbf{u}\rangle. \tag{10.5}$$

Его действие на поля 1-форм и на тензорные поля определяется путем обобщения на случай искривленного пространства-времени соотношения (3.39): $\nabla \mathbf{S}$ есть линейная машина для нахождения изменения от точки к точке выходных данных $\mathbf{S}$, когда в его каналы введены «постоянные» (т. е. переносимые параллельно) векторы. Пример: градиент тензора ранга $\binom{0}{1}$, т. е. поля 1-формы $\boldsymbol{\sigma}$. Выберем событие $\mathscr{P}_0$; в касательном пространстве события $\mathscr{P}_0$ возьмем два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$; с помощью параллельного переноса вдоль направления вектора $\mathbf{u}$ построим из $\mathbf{v}$ «постоянное» векторное поле $\mathbf{v}$ ($\mathscr{P}$), $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = 0$. Тогда $\nabla\boldsymbol{\sigma}$ есть тензор ранга $\binom{0}{2}$, а $\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}$ есть тензор ранга $\binom{0}{1}$, определяемые в $\mathscr{P}_0$ соотношениями

$$\nabla\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \equiv \langle \nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}\rangle \equiv \nabla_{\mathbf{u}}(\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}\rangle) \equiv \frac{d}{d\lambda}\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}\rangle, \tag{10.6}$$

где $\mathbf{u} = d/d\lambda$. Данные соотношения определяют как $\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}$, так и $\nabla\boldsymbol{\sigma}$, поскольку они задают числа на выходе этих тензоров для любых векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ на входе. Если на $\mathbf{v}$ ($\mathscr{P}$) не накладывается условие «постоянства» вдоль $\mathbf{u} = d/d\lambda$, то в $(d/d\lambda)\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}\rangle$ дает вклад как изменение $\mathbf{v}$, так и изменение $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{d}{d\lambda}\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}\rangle \equiv \nabla_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \langle \nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}\rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle \tag{10.7}$$

(см. упражнение 10.3).

Аналогично, если $\mathbf{S}$ есть тензор ранга $\binom{1}{2}$, то его градиент $\nabla\mathbf{S}$ есть тензор ранга $\binom{1}{3}$, определяемый следующим образом. Выберем событие $\mathscr{P}_0$; в касательном пространстве события $\mathscr{P}_0$ возьмем три вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и 1-форму $\boldsymbol{\sigma}$; с помощью параллельного переноса образуем вблизи $\mathscr{P}_0$ из $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ «постоянные» векторные поля и «постоянное» поле 1-формы ($\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma} = 0$ в $\mathscr{P}_0$); затем полагаем по определению

$$\nabla\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) \equiv (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv$$
$$\equiv \nabla_{\mathbf{u}}[\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, \mathbf{w})] = \partial_{\mathbf{u}}[\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}, \mathbf{w})]. \tag{10.8}$$

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Аддитивность ковариантного дифференцирования

Покажите, что коммутатор («замыкающий четырехсторонники») аддитивен:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}]=[\mathbf{u}, \mathbf{v}]+[\mathbf{u}, \mathbf{w}];\ [\mathbf{u}+\mathbf{n}, \mathbf{v}]=[\mathbf{u}, \mathbf{v}]+[\mathbf{n}, \mathbf{v}].$$

Воспользовавшись этим результатом, условием аддитивности $\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}+\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}$ и симметрией ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}-\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, докажите, что

$$\nabla_{\mathbf{u}+\mathbf{n}}\mathbf{v}=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}+\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{v}.$$

10.2. Ковариантное дифференцирование произведения

Покажите с помощью рисунков и определения $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, использующего «нахождение разности и переход к пределу» (дополнение 10.2), что

$$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v})=f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}+\mathbf{v}\partial_{\mathbf{u}}[f]. \tag{10.9}$$

10.3. Еще раз ковариантное дифференцирование произведения

Выведите соотношение (10.7), используя определения производных с помощью «нахождения разности и перехода к пределу». *Указание.* Перед тем как находить разность, перенесите параллельно $\boldsymbol{\sigma}\,[\mathcal{P}(\lambda)]$ и $\mathbf{v}\,[\mathcal{P}(\lambda)]$ назад из $\mathcal{P}(\lambda)$ в $\mathcal{P}(0)$.

10.4. Ковариантное дифференцирование еще одного произведения

Покажите, что как в плоском пространстве-времени, так и в искривленном пространстве-времени

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})=(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v})\otimes\mathbf{w}+\mathbf{v}\otimes(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}). \tag{10.10}$$

Запишите это соотношение в более привычной компонентной форме для случая плоского пространства-времени.

Решение первой части упражнения. Возьмем 1-формы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\rho}$ в интересующем нас событии $\mathcal{P}_0$ и переместим их с помощью параллельного переноса вдоль вектора $\mathbf{u}=d/d\lambda$, $\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\rho}=\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}=0$. Тогда

$$[\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})](\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma})=\frac{d}{d\lambda}[(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma})] \quad \text{(определение действия } \nabla_{\mathbf{u}} \text{ на тензор)}$$

$$=\frac{d}{d\lambda}[\langle\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}\rangle\langle\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}\rangle] \quad \text{(определение тензорного произведения «}\otimes\text{»)}$$

$$=\frac{d\langle\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}\rangle}{d\lambda}\langle\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}\rangle+\langle\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}\rangle\frac{d\langle\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}\rangle}{d\lambda} \quad \text{(правило дифференцирования произведения)}$$

УПРАЖНЕНИЯ

$$= \langle \rho, \nabla_u \mathbf{v} \rangle \langle \sigma, \mathbf{w} \rangle + \langle \rho, \mathbf{v} \rangle \langle \sigma, \nabla_u \mathbf{w} \rangle \quad \text{(соотношение (10.7) при постоянных } \rho, \sigma\text{)}$$

$$= [(\nabla_u \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}](\rho, \sigma) + [\mathbf{v} \otimes (\nabla_u \mathbf{w})](\rho, \sigma) \quad \text{(определение тензорного произведения «}\otimes\text{»).}$$

10.5. И еще раз ковариантное дифференцирование произведения

Покажите, воспользовавшись методом, подобным примененному в упражнении 10.4, что

$$\nabla_u (\sigma \otimes \rho \otimes \mathbf{v}) = (\nabla_u \sigma) \otimes \rho \otimes \mathbf{v} + \sigma \otimes (\nabla_u \rho) \otimes \mathbf{v} + \sigma \otimes \rho \otimes (\nabla_u \mathbf{v}). \tag{10.11}$$

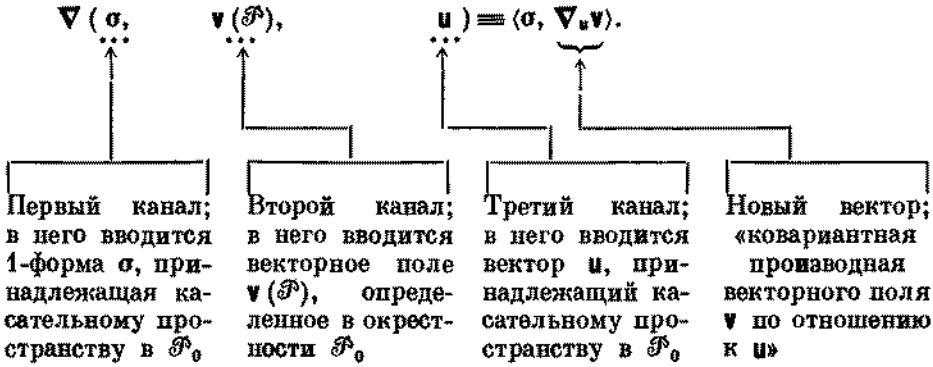
10.6. Уравнение геодезических

Используя для параллельного переноса процедуру построения «лестницы Шилда» (начало дополнения 10.2), покажите, что касательный вектор геодезической переносится параллельным образом вдоль своей геодезической (конец дополнения 10.2).

Дополнение 10.3. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, ТРАКТУЕМАЯ КАК МАШИНА, А КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗНОСТИ — КАК ЕЕ КОМПОНЕНТЫ

А. Представление в виде машины

1. Оператор ковариантной производной ∇, подобно большинству других геометрических объектов, можно рассматривать как машину с входными каналами. В каждом событии $\mathscr{P}_0$ пространства-времени существует одна такая машина. Интерпретация ∇ в виде машины в $\mathscr{P}_0$ сводится к следующему:



(Примечание. От этих обозначений для каналов ∇ мало пользы, за исключением разве лишь того, что они позволяют лучше выразить «машинную» природу ∇. Данное дополнение — единственное место, где они используются.)

2. Результат на выходе машины $\langle \sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \rangle$ геометрически получается следующим образом:

а. Найдем скорость изменения $\mathbf{v}$ вдоль вектора $\mathbf{u}$, $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$; если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ бесконечно малы, то эту процедуру можно изобразить на чертеже.

б. Подсчитаем, сколько поверхностей 1-формы σ пересекает вектор $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ (пересечение происходит в касательном пространстве события $\mathscr{P}_0$):

$$\langle \sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \rangle = -2{,}8.$$

Это число появляется на выходе машины ∇, когда в ее каналы вводятся σ, $\mathbf{v}$ $(\mathscr{P})$ и $\mathbf{u}$.

3. Другой эквивалентный способ представления ковариантной производной в виде машины. Оставим первый входной канал пустым (не будем привлекать никакой 1-формы σ); образуем из исходного векторного поля $\mathbf{v}$ новое векторное поле:

$$\nabla(\underbrace{\ldots}_{\text{пустой}}, \mathbf{v}(\mathscr{P}), \mathbf{u}) \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \text{«ковариантная производная векторного поля } \mathbf{v} \text{ вдоль вектора } \mathbf{u}\text{»}.$$

4. Третий способ представления в виде машины. Оставим первый и третий каналы пустыми (не будем привлекать никакой 1-формы σ; не будем привлекать никакого вектора $\mathbf{u}$, вдоль которого выполняется дифференцирование); образуем из исходного векторного поля $\mathbf{v}$ поле тензора ранга $\binom{1}{1}$:

$$\nabla(\underbrace{\ldots}_{\text{пустой}}, \mathbf{v}(\mathscr{P}), \underbrace{\ldots}_{\text{пустой}}) \equiv \nabla\mathbf{v} = \text{«ковариантная производная», или «градиент» векторного поля } \mathbf{v}.$$

Это тензорное поле $\nabla\mathbf{v}$ является обобщением на случай искривленного пространства-времени тензорного поля $\nabla\mathbf{v}$, введенного в плоском пространстве-времени и изученного в § 3.5. Оно обладает двумя входными каналами (как раз теми, которые в данном определении оставлены пустыми). На выходе при заданных входных данных получаем

$$\nabla\mathbf{v}(\underbrace{\ldots}_{\text{пустой}}, \mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v},$$

$$\nabla\mathbf{v}(\sigma, \mathbf{u}) = \langle\sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle.$$

5. Сводка определенных выше понятий:

а. ∇ — *оператор ковариантной производной*; он образует число, если в него ввести σ, $\mathbf{v}(\mathscr{P})$ и $\mathbf{u}$; в результате получается $\langle\sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle$.

б. $\nabla\mathbf{v}$ — *градиент* $\mathbf{v}$; он образует число, если в него ввести σ и $\mathbf{u}$; в результате также получается $\langle\sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle$.

в. $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ — *ковариантная производная* $\mathbf{v}$ вдоль $\mathbf{u}$; она образует число, если в нее ввести σ; в результате также получается $\langle\sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle$.

Б. Чем ∇ отличается от тензора

Машина ∇ отличается от тензора в двух отношениях: 1. В средний канал ∇ нельзя вводить вектор; в него нужно вводить векторное поле — векторное поле, которое дифференцируется. 2. ∇ не является линейной машиной (тогда как тензор должен быть линейной машиной):

$$\nabla(a\sigma, f(\mathscr{P})\mathbf{v}(\mathscr{P}), b\mathbf{u}) \equiv \langle a\sigma, \nabla_{bu}f\mathbf{v}\rangle =$$
$$= abf\langle\sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle + \underbrace{ab\langle\sigma, \mathbf{v}\rangle\nabla_{\mathbf{u}}f}_{\text{если бы } \nabla \text{ был линейной машиной, этого члена не было бы}}.$$

В. «Коэффициенты связности» как компоненты ∇

Пусть в событии $\mathscr{P}_0$ заданы тензор $\mathbf{S}$ ранга $\binom{1}{2}$, базис касательных векторов $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и дуальный ему базис 1-форм $\{\omega^\alpha\}$; тогда компоненты $\mathbf{S}$ определяются следующим образом:

$$S^\alpha_{\ \beta\gamma} \equiv \mathbf{S}(\omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma).$$

Точно так же можно определить и компоненты ∇, с той лишь разницей, что в этом случае нужен не только базис $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ в событии $\mathscr{P}_0$, но также и базис $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathscr{P})\}$ в каждом событии $\mathscr{P}$ в его окрестности:

$$\Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} \equiv \text{компоненты } \nabla \equiv \nabla(\omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta(\mathscr{P}), \mathbf{e}_\gamma) \equiv$$
$$\equiv \langle\omega^\alpha, \nabla_{\mathbf{e}_\gamma}\mathbf{e}_\beta\rangle \approx \begin{pmatrix}\alpha\text{-компонента изменения базисного вектора } \mathbf{e}_\beta \\ \text{при переходе от основания к острию } \mathbf{e}_\gamma\end{pmatrix}.$$

Эти компоненты ∇ называются *коэффициентами связности* базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Они дают «координатное представление» оператора ковариантной производной ∇.

Оператор ковариантной производной ∇ и коэффициенты связности $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ дают разные представления одного и того же геометрического объекта? Невероятно! Один объект связан с выполнением каких-то операций при перемещении с места на место (например нахождением разности между значениями векторного поля в двух разных, хотя и близких местах). Другой объект, наделенный сорока компонентами (упражнение 10.9), жестко связан с одной точкой. Трудно вообразить более глубокое различие между двумя объектами. И все же они выполняют одну и ту же операцию в любом мире, совместимом с принципом эквивалентности: 1) они воплощают в себе свойства всех геодезических, которые проходят через интересующую нас точку, и тем самым 2) они дают физический метод (параллельный перенос), позволяющий сравнивать значения векторных и тензорных полей в двух соседних точках.

§ 10.4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ: КОМПОНЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Используя наглядное представление, легче уловить математическую идею; благодаря абстрактному подходу эти идеи становятся точными; однако для проведения сложных вычислений, как правило, необходимо пользоваться компонентным представлением.

Чтобы оперировать с компонентами, нужно иметь совокупность базисных векторов $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и дуальную совокупность базисных 1-форм $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$. В плоском пространстве-времени достаточно одного такого базиса; все события могут использовать один и тот же лоренцев базис. Иначе обстоит дело в искривленном пространстве-времени. Здесь у каждого события свое касательное пространство, а в каждом касательном пространстве должен быть свой базис. По мере того как мы переходим от события к событию, сравнивая их базисы посредством параллельного переноса, мы видим, что эти базисы закручиваются и поворачиваются. Иначе и быть не может. Для них нет другого способа приспособиться к кривизне пространства-времени. Базисы в точках $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$, которые совпадают при сравнении с помощью параллельного переноса вдоль одной кривой, должны отличаться при сравнении вдоль другой кривой (см. гл. 11).

Для описания кручения и поворотов «поля» базисных векторов $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$ и 1-форм $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha_{\ast}(\mathcal{P})\}$ воспользуемся ковариантной производной. Рассмотрим, как векторные поля изменяются вдоль базисного вектора $\mathbf{e}_\beta$, вводя сокращенное обозначение

$$\nabla_{\mathbf{e}_\beta} \equiv \nabla_\beta \text{ (определение } \nabla_\beta\text{)}; \qquad (10.12)$$

в особенности остановимся на скорости изменения одного из базисных векторов $\nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha$. Эта скорость изменения сама является векто-

ром и может быть разложена по базису:

Определение коэффициентов связности

$$\nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \quad \text{(определение } \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\text{)} \tag{10.13}$$

(обратите внимание на обратный порядок α и β!); получающиеся в результате *коэффициенты связности* $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ можно найти, проектируя на базисные 1-формы:

$$\langle \omega^\mu, \nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha \rangle = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \tag{10.14}$$

(см. упражнение 10.7, а также дополнение 10.3). Поскольку базисные 1-формы «завязаны» с базисными векторами ($\langle \omega^\nu, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \delta^\nu{}_\alpha$), те же коэффициенты связности $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ позволяют описать изменение от точки к точке базиса 1-форм:

$$\nabla_\beta \omega^\nu = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \omega^\alpha, \tag{10.15}$$

$$\langle \nabla_\beta \omega^\nu, \mathbf{e}_\alpha \rangle = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \tag{10.16}$$

(см. упражнение 10.8).

Этим не исчерпываются возможности коэффициентов связности. С их помощью можно найти компоненты градиента произвольного тензора $\mathbf{S}$. В лоренцевой системе плоского пространства-времени компоненты $\nabla\mathbf{S}$ можно получить, подействовав базисными векторами $\mathbf{e}_\alpha = \partial\mathcal{P}/\partial x^\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ на компоненты $\mathbf{S}$. Таким образом, для тензорного поля $\mathbf{S}$ ранга $\binom{1}{2}$ получаем

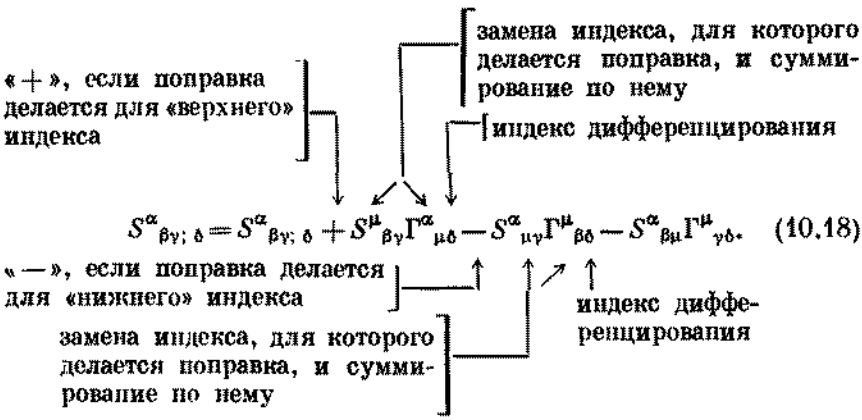
$$\nabla\mathbf{S} \text{ имеет компоненты } S^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} = \frac{\partial}{\partial x^\delta}[S^\alpha{}_{\beta\gamma}].$$

В искривленном пространстве-времени или даже в нелоренцевом базисе плоского пространства-времени это не так. Здесь базисные векторы поворачиваются, закручиваются, растягиваются и сжимаются, поэтому даже если бы $\mathbf{S}$ был постоянен ($\nabla\mathbf{S} = 0$), его компоненты в закручивающемся базисе изменялись бы. Коэффициенты связности, будучи правильно употреблены, позволяют скомпенсировать эти повороты и кручение. Как мы узнаем из упражнения 10.10, компоненты $S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta}$ тензора $\nabla\mathbf{S}$, для которых

Компоненты градиента тензорного поля

$$\nabla\mathbf{S} = S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \omega^\beta \otimes \omega^\gamma \otimes \omega^\delta, \tag{10.17}$$

могут быть найдены из компонент $\mathbf{S}$ обычным способом, используемым в плоском пространстве, прибавив поправки, которые надо сделать для каждого индекса (т. е. для каждого базисного вектора):



Здесь

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\,\delta} \equiv \mathbf{e}_{\delta}[S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}] \equiv \partial_{\mathbf{e}_{\delta}} S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}. \tag{10.19}$$

Соотношение (10.18) имеет сложный вид, но на самом деле оно оказывается очень простым, если разобраться в схеме.

Компоненты ковариантной производной тензорного поля

Точно так же, как для компонент $\nabla\mathbf{S}$ используется специальное обозначение $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\,\delta}$, так и для компонент ковариантной производной $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}$ вдоль $\mathbf{u} = d/d\lambda$ вводится специальное обозначение $DS^{\alpha}{}_{\beta\gamma}/d\lambda$:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = (DS^{\alpha}{}_{\beta\gamma}/d\lambda)\,\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \omega^{\beta} \otimes \omega^{\gamma}; \tag{10.20}$$

$$\frac{DS^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\,\delta}u^{\delta} = (S^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\,\delta} + \text{поправочные члены})\,u^{\delta}.$$

Поскольку для любой f

$$f_{,\,\delta}u^{\delta} = \partial_{\mathbf{u}}f = df/d\lambda,$$

это сводится к

$$\frac{DS^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} = \frac{dS^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} + S^{\mu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}u^{\delta} - S^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta}u^{\delta} - S^{\alpha}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\delta}u^{\delta}. \tag{10.21}$$

Правило вычисления градиента от произведения

Возможности компонентного представления хорошо проявляются при нахождении ковариантной производной от произведения. Большое число различных правил дифференцирования произведений в абстрактном представлении [соотношения (10.2б), (10.7), (10.10), (10.11)] при переходе к компонентам сливаются в одно правило: *Оператор градиента «;» подчиняется хорошо известному правилу дифференцирования произведений, которому подчиняются частные производные обычного дифференциального*

исчисления. Пример:

$$(fv^\alpha)_{;\,\mu} = f_{;\,\mu} v^\alpha + f v^\alpha{}_{;\,\mu} \tag{10.22а}$$

$= f_{,\,\mu}$, поскольку у f нет индексов, для которых надо делать поправку

(свертывая это выражение с u^μ, получаем правило 10.2б). Другой пример:

$$(\sigma_\alpha v^\alpha)_{;\,\mu} = \sigma_{\alpha;\,\mu} v^\alpha + \sigma_\alpha v^\alpha{}_{;\,\mu} \tag{10.22б}$$

$= (\sigma_\alpha v^\alpha)_{,\,\mu}$, поскольку у $\sigma_\alpha v^\alpha$ нет свободных индексов, для которых надо делать поправку

(свертывая это выражение с u^μ, получаем правило 10.7). Третий пример:

$$(\sigma_\alpha \rho_\beta v^\gamma)_{;\,\mu} = \sigma_{\alpha;\,\mu} \rho_\beta v^\gamma + \sigma_\alpha \rho_{\beta;\,\mu} v^\gamma + \sigma_\alpha \rho_\beta v^\gamma{}_{;\,\mu} \tag{10.22в}$$

(свертывая это выражение с u^μ, получаем правило 10.11). Еще один пример приведен в упражнении (10.12).

УПРАЖНЕНИЯ

10.7. Вычисление коэффициентов связности

Выведите из (10.13) выражение (10.14) для $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$.

10.8. Связность базиса 1-форм

Из соотношения (10.14) выведите соотношения (10.15) и (10.16), которые устанавливают связь $\nabla_\beta \omega^\nu$ с $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$. *Указание*. Используйте соотношение (10.7).

10.9. Симметрия коэффициентов связности

Покажите, что симметрия ковариантной производной в пространстве-времени [соотношение (10.2а)] эквивалентна следующему условию симметрии для коэффициентов связности:

$$\text{(антисимметричная часть } \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}) \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}) \equiv$$

$$\equiv \Gamma^\mu{}_{[\alpha\beta]} = -\frac{1}{2}\langle \omega^\mu, \underbrace{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]}\rangle \equiv -\frac{1}{2} c_{\alpha\beta}{}^\mu. \tag{10.23}$$

коммутатор базисных векторов

В частном случае *координатного базиса* ($\mathbf{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$) *коэффициенты* $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ *симметричны по* α *и* β. Покажите, что благодаря

этой симметрии число независимых коэффициентов связности в каждом событии в координатном базисе уменьшается от $4 \times 4 \times 4 = 64$ до $4 \times 10 = 40$.

10.10. Компоненты градиента

Выведите выражение (10.18) для компонент градиента $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta}$. *Указание.* Разложите $\mathbf{S}$ по данному базису и вычислите правую часть соотношения

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = \nabla_{\mathbf{u}}\left(S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\gamma}\right)$$

при произвольном векторе $\mathbf{u}$. Воспользуйтесь правилами (10.2б) и (10.11). Сравнив результат с

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\,\delta}u^{\delta}\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\gamma},$$

выпишите компоненты $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\,\delta}$.

10.11. Дивергенция

Пусть $\mathbf{T}$ — поле тензора ранга $\binom{2}{0}$. Определим дивергенцию по его второму каналу таким же образом, как это было сделано в плоском пространстве-времени: $\nabla\cdot\mathbf{T}$ = свертка $\nabla\mathbf{T}$, т. е.

$$(\nabla\cdot\mathbf{T})^{\alpha} = T^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}. \tag{10.24}$$

Запишите выражения для компонент $T^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}$ через $T^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta}$ и поправочные члены для каждого из двух индексов $\mathbf{T}$. [*Ответ*:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta}T^{\alpha\mu}.]$$

10.12. Проверка правила дифференцирования произведения

Пусть $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ — компоненты поля тензора ранга $\binom{2}{1}$, а $M_{\beta}{}^{\gamma}$ — компоненты поля тензора ранга $\binom{1}{1}$. Свертывая эти тензорные поля, получаем векторное поле $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}$. Правило дифференцирования произведения для дивергенции этого векторного поля имеет вид

$$(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{;\,\alpha} = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\,\alpha}M_{\beta}{}^{\gamma} + S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{;\,\alpha}.$$

Убедитесь в справедливости этого правила, выразив обе части равенства через производные по направлению $(\partial_{\mathbf{e}_{\alpha}})$ и поправочные члены с коэффициентами связности. *Указание.* Левая часть

равна

$$(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{;\,\alpha} = \underbrace{(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{,\,\alpha}}_{\substack{S^{\alpha\beta}{}_{\gamma,\alpha}M_{\beta}{}^{\gamma}+S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{,\alpha},\\ \text{согласно правилу нахождения производной по направлению от произведения}}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}(S^{\mu\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}).$$

В правой части гораздо больше поправочных членов (три для $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\alpha}$; два для $M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{;\alpha}$), но они должны взаимно уничтожиться, оставив в результате лишь один.

10.13. Закон преобразования коэффициентов связности

Пусть $\{\mathbf{e}_{\alpha}\}$ и $\{\mathbf{e}_{\mu'}\}$ — два различных поля базисных векторов, связанных законом преобразования

$$\mathbf{e}_{\mu'}(\mathscr{P}) = L^{\alpha}{}_{\mu'}(\mathscr{P})\,\mathbf{e}_{\alpha}(\mathscr{P}). \tag{10.25}$$

Покажите, что соответствующие коэффициенты связности удовлетворяют соотношению

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = \underbrace{L^{\alpha'}{}_{\rho}L^{\mu}{}_{\beta'}L^{\nu}{}_{\gamma'}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}}_{\substack{\text{обычный закон преобразования}\\ \text{компонент тензора}}} + L^{\alpha'}{}_{\mu}L^{\mu}{}_{\beta',\,\gamma'}. \tag{10.26}$$

10.14. Полярные координаты в плоском двумерном пространстве

Изобразите на листе бумаги полярную систему координат (r, ϕ). Нарисуйте в соседних точках базисные векторы $\mathbf{e}_{\hat{r}} = \partial/\partial r$ и $\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = r^{-1}\partial/\partial\phi$. а. Используя этот чертеж и параллельный перенос в эвклидовом случае, обоснуйте соотношения

$$\nabla_{\hat{r}}\mathbf{e}_{\hat{r}} = 0, \quad \nabla_{\hat{r}}\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = 0, \quad \nabla_{\hat{\phi}}\mathbf{e}_{\hat{r}} = r^{-1}\mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \quad \nabla_{\hat{\phi}}\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = -r^{-1}\mathbf{e}_{\hat{r}}.$$

б. Исходя из этих соотношений, выпишите коэффициенты связности. в. Пусть $\mathbf{A} = A^{\hat{r}}\mathbf{e}_{\hat{r}} + A^{\hat{\phi}}\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ — векторное поле. Покажите, что его дивергенцию

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = A^{\hat{\alpha}}{}_{;\,\hat{\alpha}} = A^{\hat{\alpha}}{}_{,\,\hat{\alpha}} + \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\mu}\,\hat{\alpha}}A^{\hat{\mu}}$$

можно вычислять по формуле

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial A^{\hat{\phi}}}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA^{\hat{r}})}{\partial r}$$

(которая должна быть знакома большинству читателей).

§ 10.5. УРАВНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

С геодезических — параметризованных траекторий свободно падающих частиц — мы начали изложение в данной главе. Основываясь на них, мы построили параллельный перенос (лестница Шилда, дополнение 10.2); параллельный перенос в свою очередь позволил нам определить ковариантную производную и коэффициенты связности. Овладев ковариантным дифференцированием, мы снова вернулись к геодезическим: они представляют собой кривые, касательный вектор которых $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ удовлетворяет уравнению $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{u}$ переносится параллельно вдоль самого себя).

Уравнение геодезических: абстрактный вид

Пусть задана система координат $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$. Пусть далее в касательном пространстве каждого события ею определяются базисные векторы $\mathbf{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. Пусть заданы коэффициенты связности $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ этого «координатного базиса». Тогда *уравнение геодезических* $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$ в компонентной записи принимает вид дифференциального уравнения относительно координат геодезической $x^\alpha(\lambda)$:

1) $\mathbf{u} = \dfrac{d}{d\lambda} = \dfrac{dx^\alpha}{d\lambda}\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \Rightarrow$ компоненты $\mathbf{u}$ равны $u^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\lambda}$;

2) тогда компонентами $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$ являются

$$0 = u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta = (u^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}u^\gamma)u^\beta = \\ = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)\frac{dx^\beta}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\frac{dx^\gamma}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda},$$

что сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\frac{dx^\gamma}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \qquad (10.27)$$

Запись в компонентах

Эта компонентная запись уравнения геодезических дает аналитический метод («перевод» лестницы Шилда на язык формул) построения закона параллельного переноса по известным геодезическим. Выберем событие $\mathcal{P}_0$ и введем в его окрестности систему координат. Проследим за движением многих частиц, проходящих через $\mathcal{P}_0$ (или бесконечно близко к $\mathcal{P}_0$) и несущих с собой часы. Для каждой из частиц определим значения $d^2x^\alpha/d\lambda^2$ и $dx^\alpha/d\lambda$ в $\mathcal{P}_0$. Подставим все полученные значения для большого числа частиц в уравнение (10.27) и разрешим его относительно коэффициентов связности. Нас не беспокоит тот факт, что мы найдем при этом лишь симметричную часть $\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$, поскольку антисимметричная часть $\Gamma^\alpha{}_{[\gamma\beta]}$ тождественно обращается в нуль в любой координатной системе отсчета! (См. упражнение 10.9.) Зная коэффициенты $\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$, мы можем с их помощью осуществить параллельный перенос любого вектора вдоль любой кривой, проходящей через $\mathcal{P}_0$:

Как, зная геодезические, найти закон параллельного переноса

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}v^\gamma\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \qquad (10.28)$$

УПРАЖНЕНИЯ

10.15. Компоненты закона параллельного переноса

Покажите, что уравнение (10.28) представляет собой компонентную запись закона параллельного переноса вектора $\mathbf{v}$ вдоль кривой $\mathcal{P}(\lambda)$ с касательным вектором $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$.

10.16. Геодезические в полярных координатах

В прямоугольных координатах на плоском листе бумаги эвклидовы прямые линии (геодезические) удовлетворяют уравнениям $d^2x/d\lambda^2 = d^2y/d\lambda^2 = 0$. Преобразуйте эти уравнения геодезических к полярным координатам ($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$) и, сравнив результат с (10.27), найдите коэффициенты связности. Последние будут коэффициентами связности для координатного базиса ($\partial/\partial r$, $\partial/\partial\phi$). Исходя из них, найдите коэффициенты связности для базиса

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Результат должен совпасть с ответом упражнения 10.14 (б). *Указание.* Воспользуйтесь соотношениями вида

$$\nabla_{\mathbf{e}_{\hat{\phi}}}\mathbf{e}_{\hat{r}} = \nabla_{(1/r)(\partial/\partial\phi)}(\partial/\partial r) = \frac{1}{r}\nabla_{\partial/\partial\phi}(\partial/\partial r).$$

10.17. Группа вращений: геодезические и коэффициенты связности

(Продолжение упражнений 9.13 и 9.14.) При изучении группы вращений необходимо проводить четкое различие между *эвклидовым пространством* (координаты x, y, z; базисные векторы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$), в котором действуют матрицы вращения, и *групповым многообразием* $SO(3)$ (координаты ψ, θ, ϕ; координатный базис $\partial/\partial\psi$, $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\phi$; базис «генераторов» $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), точками $\mathcal{P}$ которого являются матрицы поворотов.

а. Пусть

$$\boldsymbol{n} = n^x\,\partial/\partial x + n^y\,\partial/\partial y + n^z\,\partial/\partial z$$

есть вектор в эвклидовом пространстве. Покажите, что

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{n}}(t) \equiv \exp\left[(n^x\mathcal{K}_1 + n^y\mathcal{K}_2 + n^z\mathcal{K}_3)\,t\right] \tag{10.29}$$

есть матрица поворота осей эвклидова пространства на угол

$$t\,|\,\boldsymbol{n}\,| = t\left[(n^x)^2 + (n^y)^2 + (n^z)^2\right]^{1/2}$$

вокруг направления $\boldsymbol{n}$. (Матрицы $\mathcal{K}_j$ определены в упражнении 9.13.)

б. В групповом многообразии $SO(3)$ выберем точку (матрицу поворота) $\mathcal{P}$, а в $\mathcal{P}$ возьмем касательный вектор $\mathbf{u} = u^\alpha\mathbf{e}_\alpha$. Пусть

$\boldsymbol{u}$ — вектор в эклидовом пространстве с такими же компонентами, которые $\mathbf{u}$ имеет в $SO(3)$:

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{u} = u^1\,\partial/\partial x + u^2\,\partial/\partial y + u^3\,\partial/\partial z. \tag{10.30}$$

Покажите, что $\mathbf{u}$ есть касательный вектор (при $t = 0$) к кривой

$$\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{u}}(t)\,\mathscr{P}. \tag{10.31}$$

Кривая $\mathscr{C}(t)$, которую можно провести через произвольную точку $\mathscr{P}$ и которой можно приписать в этой точке произвольный касательный вектор $\mathbf{u} = (d\mathscr{C}/dt)_{t=0}$, обладает крайне специфическим свойством: каждая точка на ней отличается от $\mathscr{P}$ поворотом $\mathscr{R}_{\boldsymbol{u}}(t)$ вокруг одного и того же направления $\boldsymbol{u}$. Никакая другая кривая в $SO(3)$ с «начальными условиями» $\{\mathscr{P}, \mathbf{u}\}$ не обладает такой замечательной простотой. Поэтому было бы естественным постановить, что каждая такая кривая $\mathscr{C}(t)$ есть геодезическая в групповом многообразии $SO(3)$. Такое постановление наделяет $SO(3)$ новой геометрической структурой: оно превращает $SO(3)$ из дифференцируемого многообразия в нечто более специальное — *аффинное многообразие*.

Нет никаких гарантий, что в произвольном многообразии произвольное семейство кривых *можно* по определению назвать геодезическими. Большая часть таких семейств кривых просто не обладает нужными геометрическими свйствами, чтобы выступать в роли геодезических. Большинство из них приводит к таким ковариантным производным, для которых нарушаются одно или более из основных условий (10.2). Чтобы узнать, возможен ли данный выбор геодезических, можно попытаться найти коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ (в некотором фиксированном базисе), соответствующие выбранным геодезическим. Если такая попытка удается, то данный выбор геодезических возможен. Если же в процессе нахождения $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ возникают противоречия, то выбранное семейство кривых не обладает нужными геометрическими свойствами, чтобы выступать в роли геодезических.

в. Найдите в базисе генераторов $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ коэффициенты связности, соответствующие выбранным нами геодезическим $\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{u}}(t)\,\mathscr{P}$ группового многообразия $SO(3)$. *Указание.* Покажите, что компоненты $u^\alpha = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{u} \rangle$ касательного вектора $\mathbf{u} = d\mathscr{C}/dt$ данной геодезической не зависят от положения $\mathscr{C}(t)$ на геодезической. Затем с помощью уравнения геодезических $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$, разложенного по базису $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, найдите симметричную часть коэффициентов связности $\Gamma^{\alpha}{}_{(\beta\gamma)}$. И, наконец, воспользовавшись соотношением (10.23), получите $\Gamma^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]}$. [*Ответ*:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \tag{10.32}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — совершенно антисимметричный символ, причем $\varepsilon_{123} = +1$. Полученный ответ не зависит от положения $\mathscr{P}$ в $SO(3)$!]

2

II. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Эта глава целиком относится к курсу 2.
Необходимым подготовительным материалом для нее являются главы 9 и 10.
Она нужна в качестве подготовительного материала для
1) глав 12 и 13 (ньютоновское тяготение; риманова геометрия),
2) второй половины гл. 14 (вычисление кривизны) и
3) подробностей, но не идеи гл. 15 (тождества Бианки).

§ 11.1. КРИВИЗНА, НАКОНЕЦ-ТО!

Кривизна пространства-времени проявляется в виде гравитации, в отклонении одной геодезической от другой близкой геодезической (относительное ускорение пробных частиц).

Пусть геодезические пространства-времени известны. Тогда известны также ковариантная производная ∇ и ее коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$. Как, располагая этой информацией, дать определение, вычислить и понять отклонение геодезических и кривизну пространства-времени? Ответ раскрывается в данной главе и кратко изложен в дополнении 11.1. Чтобы получить ответ, необходимо: 1) определить «вектор относительного ускорения» $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi}$, служащий мерой отклонения одной геодезической от другой (§ 11.2); 2) найти выражение для «риманова тензора кривизны», который заставляет геодезические отклоняться, в терминах ∇ или $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ (§ 11.3); 3) увидеть риманову кривизну в действии, когда она приводит к изменению векторов, перенесенных параллельно вдоль замкнутого контура (§ 11.4); 4) ознакомиться с тем, как риманова кривизна позволяет проверить, является ли пространство-время плоским (§ 11.5); 5) построить специальную систему координат — «нормальные римановы координаты», которые особым образом связаны с римановым тензором кривизны (§ 11.6).

Краткий обзор главы

§ 11.2. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ СОСЕДНИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Геометрия семейства геодезических

Рассмотрим семейство геодезических (фиг. 11.1). Пусть одна геодезическая отличается от другой значением «параметра отбора» n. В семейство входят не только геодезические $n = 0, 1, 2, \ldots$, но и все геодезические с промежуточными значениями парамера n. Точка $\mathscr{P}$, принадлежащая геодезической семейства, является непрерывной и дважды дифференцируемой функцией двух переменных: параметра отбора n и аффинного параметра λ:

Параметр отбора

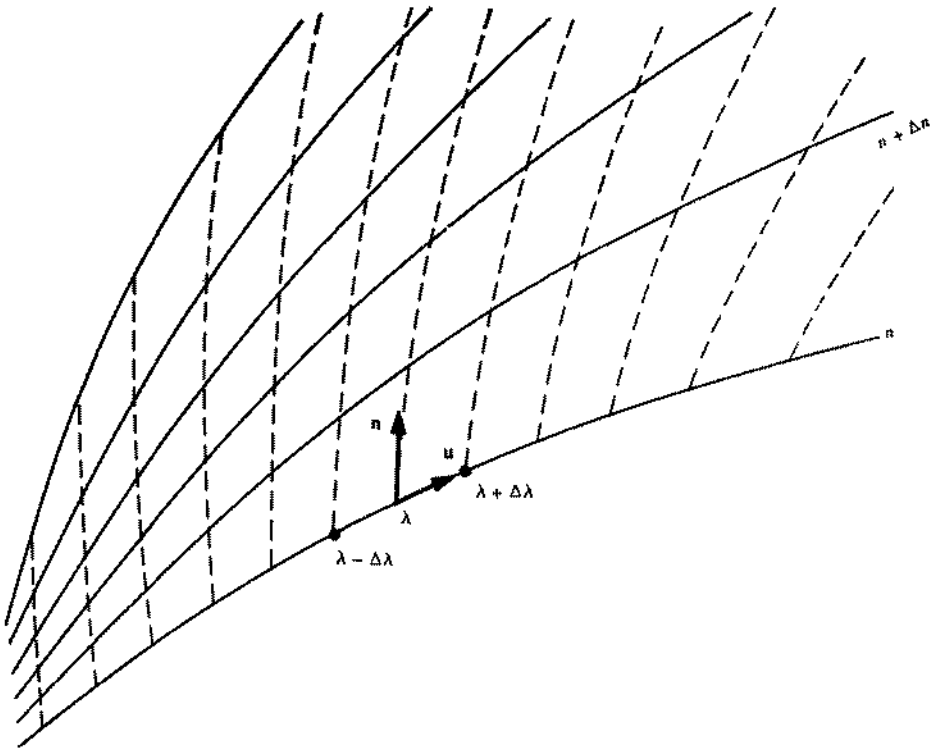
Аффинный параметр

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(\lambda, n). \tag{11.1}$$

Касательный вектор

Касательный вектор

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathscr{P}}{d\lambda} \text{ (обозначения Картана)},$$



ФИГ. 11.1.
Однопараметрическое семейство геодезических. «Параметр отбора» n указывает, которая из геодезических. Аффинный параметр λ указывает, где на данной геодезической. Показаны два касательных вектора: $\mathbf{u} = \partial/\partial\lambda$ (у Картана $\partial\mathscr{P}/\partial\lambda$) и $\mathbf{n} = \partial/\partial n$ (у Картана $\partial\mathscr{P}/\partial n$).

или

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{ (обозначения этой книги)}, \tag{11.2}$$

постоянен вдоль любой данной геодезической в следующем смысле: вектор $\mathbf{u}$, взятый в произвольной точке и перенесенный параллельно вдоль геодезической, в любой другой точке совпадает по длине и направлению с вектором $\mathbf{u}$, который уже существует в этой точке.

Разделяющий вектор

Разделяющий вектор

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial n} \text{ (обозначения Картана)},$$

или

$$\mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial n} \text{ (обозначения этой книги)}, \tag{11.3}$$

служит мерой того, насколько от геодезической n, принятой за опорную, отстоит близлежащая геодезическая $n + \Delta n$ (Δn мало), в том смысле, что

$$(\Delta n)\,\mathbf{n} = \left\{ \begin{matrix} \Delta n \dfrac{\partial \mathscr{P}}{\partial n} \\ \Delta n \dfrac{\partial}{\partial n} \end{matrix} \right\} \text{ служит мерой изменения } \left\{ \begin{matrix} \text{положения точки} \\ \text{какой-либо функции} \end{matrix} \right\}, \tag{11.4}$$

обусловленного тем, что мы перевели внимание от одной геодезической к другой при фиксированном значении аффинного параметра λ. Этот вектор представлен стрелкой $\mathscr{MQ}$ на первом рисунке дополнения 11.2.

Дополнение 11.2 дает иллюстрацию тому, что имеется в виду, когда речь идет об отклонении геодезических. Переносим разделение $\mathbf{n}\Delta n = \mathscr{MQ}$ параллельным образом вдоль опорной геодезической. Острие этого вектора вычерчивает каноническую траекторию, вдоль которой должна следовать близлежащая точка пантографа, отстоящая на постоянную величину от опорной точки пантографа, когда последняя следует вдоль опорной геодезической. Действительная траектория пробной геодезической оклоняется от этой «канонической» траектории. Отклонение, которое представляет собой вектор ($\mathscr{AP}$ в дополнении 11.2), меняется с изменением аффинного параметра ($\mathscr{AP}$ в $\mathscr{A}$, 0 в $\mathscr{Q}$, $\mathscr{RR}$ в $\mathscr{R}$). Первая производная от этого вектора по аффинному параметру зависит от масштаба параметризации пробной геодезической и от ее наклона (дополнение 11.2, E). Вторая производная от них не зависит; она зависит лишь от касательного вектора опорной геодезической и от разделяющего вектора $\mathbf{n}\Delta n$. Раделим эту вторую производную отклонения на Δn и назовем результат *вектором относительного ускорения*. В дополнении 11.3 для него получена простая формула:

Вектор относительного ускорения

$$\text{вектор относительного ускорения} = \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n}. \tag{11.5}$$

Дополнение 11.1. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И РИМАНОВА КРИВИЗНА В КРАТКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

«Разделение геодезических» $\mathbf{n}$ представляет собой смещение (касательный вектор) из точки на опорной геодезической в точку близлежащей геодезической, характеризующуюся тем же значением аффинного параметра λ.

Разделение геодезических меняется с изменением λ (т. е. меняется вдоль касательного вектора $\mathbf{u} = d/d\lambda$) со скоростью, определяемой *уравнением отклонения геодезических*

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

(уравнение второго порядка; см. § 1.6 и 1.7; фиг. 1.10—1.12).

Записанная через компоненты тензора кривизны Римана, движущая сила («приливная сила тяготения») равна

$$\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = \mathbf{e}_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta. \tag{2}$$

Компоненты тензора кривизны Римана в координатной системе отсчета, выраженные через коэффициенты связности, имеют вид

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}. \tag{3}$$

Этот тензор кривизны не только количественно описывает понятие «приливная сила тяготения», но и входит в закон Эйнштейна, согласно которому «материя указывает пространству-времени, как искривляться». Этому закону, изучаемому в последующих главах, в заданной системе координат можно придать форму следующего алгоритма для вычислений:

а. Запишем пробное выражение для динамической эволюции метрических коэффициентов $g_{\mu\nu}$ по времени.

б. Найдем коэффициенты связности по формулам

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\mu\nu}, \tag{4}$$

$$\Gamma_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right) \tag{5}$$

(полученным в гл. 13).

в. Найдем из формулы (3) тензор кривизны Римана.

г. Найдем тензор кривизны Эйнштейна согласно

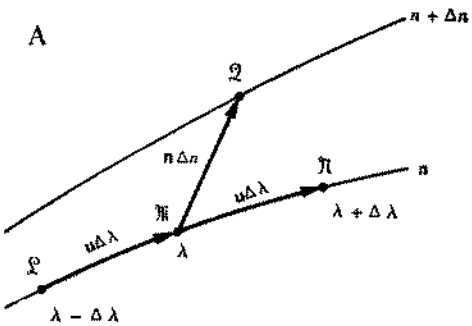
$$G_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\tau} R^\alpha{}_{\sigma\alpha\tau} \tag{6}$$

(геометрический смысл изучается в гл. 15).

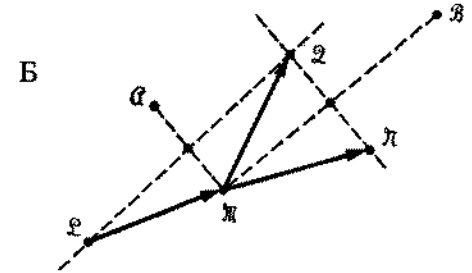
д. Подставим его в уравнения Эйнштейна (гл. 17):
$G_{\mu\nu} = 0$ (пустое пространство),
$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ (пространство, в котором есть масса-энергия).

е. Проверим, правильно ли было выбрано пробное выражение для динамической эволюции геометрии; если нет, то изменим его так, чтобы оно стало правильным.

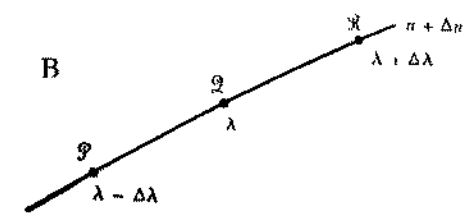
Дополнение 11.2. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПРЕДСТАВЛЕННОЕ В ВИДЕ СТРЕЛКИ



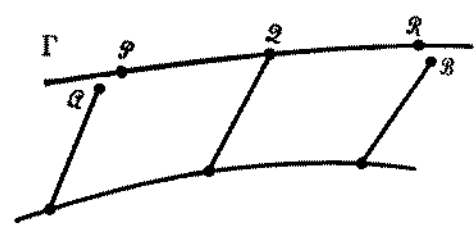
А. «Опорная геодезическая» n. Разделяющий вектор $\mathbf{n}\Delta n = \mathscr{M}\mathscr{Q}$ выходит из точки $\mathscr{M}$ на ней и направлен в точку $\mathscr{Q}$ с тем же значением аффинного параметра λ (времениподобной величины) на соседней «пробной геодезической» $n + \Delta n$.



Б. Параллельный перенос $\mathscr{M}\mathscr{Q}$ с помощью «лестницы Шилда» (дополнение 10.2) в $\mathscr{N}\mathscr{B}$ и $\mathscr{L}\mathscr{A}$. Если бы пробная геодезическая $n + \Delta n$ отстояла от опорной геодезической n на постоянную величину, то точка пантографа, скользящая по пробной геодезической, попала бы в $\mathscr{A}$ при значении аффинного параметра $(\lambda - \Delta\lambda)$ и в $\mathscr{B}$ — при значении $(\lambda + \Delta\lambda)$.

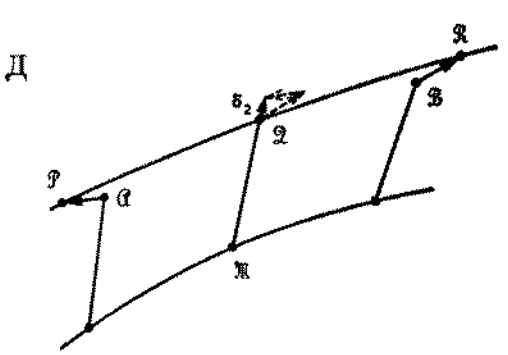


В. Действительные положения точки пантографа, скользящей по пробной геодезической, при значениях времениподобного аффинного параметра $(\lambda - \Delta\lambda)$, λ и $(\lambda + \Delta\lambda)$.



Г. Сопоставление действительной траектории точки пантографа, скользящей по пробной геодезической, с «канонической траекторией» — траекторией, вдоль которой эта точка должна была бы следовать, чтобы отстоять от опорной точки пантографа (скользящей по опорной геодезической) на постоянную величину.

Д. Та же пробная геодезическая, что и на предыдущем рисунке с аффинным параметром, масштаб которого подвергнут равномерному растяжению. Любая мера отклонения действительной траектории, совпадающей с геодезической, от канонической траектории $\mathscr{A}\mathscr{Q}\mathscr{B}$ не должна зависеть от этого растяжения, только тогда она может быть полезной. Поэтому в качестве меры отклонения геодезических возьмем не вектор $\mathscr{B}\mathscr{R}$ и не вектор $\mathscr{A}\mathscr{P}$ по отдельности, а независимую



от растяжения комбинацию $\delta_2 = (\mathscr{B}\mathscr{R}) + (\mathscr{A}\mathscr{P})$. Здесь подразумевается, что прежде, чем выполнять сложение, оба вектора перенесены параллельно в общую точку (на рисунке это $\mathscr{Q}$; в пределе дифференциального исчисления $\Delta n \to 0$, $\Delta\lambda \to 0$ это $\mathscr{M}$).

Е. Другие траектории, по которым могла бы пройти через точку $\mathscr{Q}$ пробная геодезическая [семейства геодезических, отличающиеся степенью расходимости (слева) или сходимости (справа)]. Другой наклон приводит к изменению $\mathscr{A}\mathscr{P}$ (переходит в $\mathscr{A}\overline{\mathscr{P}}$) и $\mathscr{B}\mathscr{R}$ (переходит в $\mathscr{B}\overline{\mathscr{R}}$) по отдельности, но не их суммы $\delta_2 = (\mathscr{B}\mathscr{R}) + (\mathscr{A}\mathscr{P})$ («правило рычага»).

Отметим, что стрелка $\mathscr{B}\mathscr{R}$ — первого порядка по $\Delta\lambda$ и первого порядка по Δn, то же справедливо и для $\mathscr{A}\mathscr{P}$; следовательно, сумма δ_2 — второго порядка по $\Delta\lambda$ и первого порядка по Δn. Отсюда заключаем, что *стрелка* $\delta_2/(\Delta\lambda)^2\,(\Delta n)$ *есть искомая мера отклонения геодезических* в том смысле, что она не зависит от

1) размера ячейки (в конце устремляется к нулю);
2) параметризации пробной геодезической;
3) наклона пробной геодезической.

Назовем эту стрелку *вектором относительного ускорения*; более тщательное рассмотрение (дополнение 11.3) позволяет найти для этого вектора следующее выражение:

$$\delta_2/(\Delta\lambda)^2\,(\Delta n) = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}.$$

Дополнение 11.3. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ: КАК ОТ СТРЕЛКИ ПЕРЕЙТИ КО ВТОРОЙ КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Стрелка δ_2 в дополнении 11.2 служит не мерой скорости изменения разделения между пробной геодезической $n + \Delta n$ и «канонической траекторией» $\mathscr{A}\mathscr{Q}\mathscr{B}$, играющей роль базисной линии, а мерой второй производной:

$$\left(\text{первая производная в } \lambda + \frac{1}{2}\Delta\lambda\right) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} = \frac{\mathscr{N}\mathscr{R} - \mathscr{N}\mathscr{B}}{\Delta\lambda\,\Delta n} = \frac{\mathscr{B}\mathscr{R}}{\Delta\lambda\,\Delta n},$$

$$\left(\text{первая производная в } \lambda - \frac{1}{2}\Delta\lambda\right) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} = \frac{\mathscr{L}\mathscr{A} - \mathscr{L}\mathscr{P}}{\Delta\lambda\,\Delta n} = \frac{-\mathscr{A}\mathscr{P}}{\Delta\lambda\Delta n}.$$

Перемещая к общему местоположению λ, вычитая и деля на $\Delta\lambda$, получаем вторую ковариантную производную вдоль вектора $\mathbf{u}$; таким образом,

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} = \frac{(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n})_{\lambda+\frac{1}{2}\Delta\lambda} - (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n})_{\lambda-\frac{1}{2}\Delta\lambda}}{\Delta\lambda} = \frac{(\mathscr{B}\mathscr{R}+\mathscr{A}\mathscr{P})_{\substack{\text{векторы, перенесенные}\\ \text{к общему местоположению}}}}{(\Delta\lambda)^2\,\Delta n} =$$

$$= \frac{\delta_2}{(\Delta\lambda)^2\,\Delta n} = \text{вектор относительного ускорения соседних геодезических.}$$

§ 11.3. ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ ТЯГОТЕНИЯ И ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНА

Определив «относительное ускорение», перейдем теперь к «приливным силам тяготения» (т. е. к «кривизне пространства-времени»), которые его вызывают. Приливные силы в рамках ньютоновской теории рассмотрены в дополнении 11.4. Это рассмотрение побуждает подобным же образом провести геометрический анализ приливных сил, что и сделано в том же дополнении. В результате получается замечательное уравнение

Выражение сил тяготения, вызывающих приливное воздействие, через коммутатор

$$\underbrace{\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}}_{\substack{\text{относительное}\\ \text{ускорение}}} + \underbrace{[\nabla_{\mathbf{n}}, \nabla_{\mathbf{u}}]\,\mathbf{u}}_{\substack{\text{силы тяготения, вызывающие}\\ \text{приливное воздействие}}} = 0. \tag{11.6}$$

Это уравнение замечательно тем, что с первого взгляда оно кажется абсурдным. Выражение $[\nabla_{\mathbf{n}}, \nabla_{\mathbf{u}}]\,\mathbf{u}$ включает вторые производные от $\mathbf{u}$ и первую производную от $\nabla_{\mathbf{n}}$:

$$[\nabla_{\mathbf{n}}, \nabla_{\mathbf{u}}]\,\mathbf{u} \equiv \nabla_{\mathbf{n}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}. \tag{11.7}$$

Значит оно должно зависеть от того, как $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ меняются от точки к точке. Но известно, что вызываемое им относительное ускорение $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$ зависит лишь от значений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ в опорной точке, но не от того, как изменяются $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ (см. дополнение 11.2, Е). В чем же тут дело?

Все производные в выражении для приливных сил $[\nabla_{\mathbf{n}}, \nabla_{\mathbf{u}}]\,\mathbf{u}$ должны каким-то образом сократиться. У нас должно быть право считать $[\nabla\ldots, \nabla\ldots]$ чисто локальной алгебраической машиной с тремя входными каналами, на выходе которой получается вектор. Но если она чисто локальна, а не дифференциальна, то она к тому же линейна (что сразу следует из свойств аддитивности ∇), и тогда это должен быть тензор. Назовем этот тензор $\mathbf{R}$ и снабдим его четвертым каналом для ввода 1-формы:

$$\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv [\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]\,\mathbf{C},$$

$$\mathbf{R}(\sigma, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \langle\sigma, [\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]\,\mathbf{C}\rangle.$$

Данное определение $\mathbf{R}$ является лишь предварительным. Прежде чем принять его, необходимо убедиться, что это действительно

тензор. Действительно ли он зависит только от значений $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ в той точке, где мы его вычисляем, а не от того, каким образом они в ней изменяются? Ответ (полученный в дополнении 11.5) гласит: «Почти». Он не удовлетворяет этому условию, но удовлетворит ему, если его слегка модифицировать. Модификация сводится к замене коммутатора $[\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]$ *оператором кривизны*

Определение оператора кривизны

$$\mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv [\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}] - \nabla_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}, \tag{11.8}$$

где $\nabla_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}$ — производная вдоль вектора $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ (коммутатора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$). [$\mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv [\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]$ для полей $\mathbf{A} = \mathbf{n}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{u}$ в задаче об отклонении геодезических лишь потому, что $[\mathbf{n}, \mathbf{u}] = 0$.] Тогда модифицированное и уже безупречное *определение тензора кривизны Римана* принимает вид

Определение тензора кривизны Римана

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) &\equiv \mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}, \\ \mathbf{R}(\sigma, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) &\equiv \langle \sigma, \mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C} \rangle. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Однако определить таким образом $\mathbf{R}$ и убедиться в его тензорном характере (упражнение 11.2) никоим образом не означает еще усвоить, что представляет собой кривизна. Чтобы понять, что такое кривизна, нужно тщательно изучить $\mathbf{R}$ со всех точек зрения. Этой задаче и посвящена остальная часть данной главы.

Для начала оценим тот запас знаний о тензоре кривизны Римана, который у нас уже имеется.

1. $\mathbf{R}$ есть тензор; несмотря на то что в определении (11.9) фигурирует ∇, никакие производные на самом деле не действуют на входные векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$.

2. $\mathbf{R}$ есть тензор ранга $\binom{1}{3}$; в его первый канал вводится 1-форма, в остальные — векторы.

3. $\mathbf{R}$ полностью определяется оператором ∇, или, что эквивалентно, геодезическими пространства-времени, или законом параллельного переноса в пространстве-времени; чтобы определить число на выходе $\mathbf{R}$ не требуется ничего, кроме оператора ∇ и векторов и 1-формы на входе.

4. $\mathbf{R}$ вызывает приливные силы тяготения, которые расталкивают или стягивают геодезические (траектории пробных частиц), т. е. он характеризует «кривизну пространства-времени»:

Выражение сил тяготения, вызывающих приливное воздействие, через $\mathbf{R}$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0. \tag{11.10}$$

(Это *уравнение отклонения геодезических* вытекает из уравнений 11.6, 11.8 и 11.9 и соотношения $[\mathbf{n}, \mathbf{u}] = 0$.)

Все эти аспекты $\mathbf{R}$ касались его облика с *наглядной* (например, отклонение геодезических; см. дополнения 11.2 и 11.3) или *абстрактной* (например, выражения для $\mathbf{R}$ (11.8) и (11.9) через ∇) точек зрения. Облик $\mathbf{R}$ с точки зрения компонентных обозначений

Выражение компонент $\mathbf{R}$ через коэффициенты связности

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \equiv \mathbf{R}(\omega^{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}, \mathbf{e}_{\gamma}, \mathbf{e}_{\delta}) \equiv \langle \omega^{\alpha}, \mathscr{R}(\mathbf{e}_{\gamma}, \mathbf{e}_{\delta})\,\mathbf{e}_{\beta} \rangle, \tag{11.11}$$

связан с аналогичным обликом ∇ следующим соотношением, справедливым в любом координатном базисе $\{\mathbf{e}_\alpha\} = \{\partial/\partial x^\alpha\}$:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}. \qquad (11.12)$$

(Вывод см. в упражнении 11.3, а обобщение на случай некоординатного базиса — в упражнении 11.4.) Увидев эти компоненты $\mathbf{R}$, в которых нет и намека на какой-либо оператор дифференцирования, читатель, возможно, почувствует некоторое облегчение после определения (11.8) с его недифференцирующими операторами дифференцирования!

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. $[\nabla_A, \nabla_B]\,\mathbf{C}$ зависит от производных $\mathbf{C}$

(Опирается на дополнение 11.5.) Пусть $\mathbf{C}_{\text{новое}}$ и $\mathbf{C}_{\text{старое}}$ — векторные поля, связанные соотношением

$$\mathbf{C}_{\text{новое}}(\mathcal{P}) = \underbrace{f(\mathcal{P})}_{\substack{\uparrow \\ \text{произвольная функция,} \\ \text{у которой } f(\mathcal{P}_0)=1}} \mathbf{C}_{\text{старое}}(\mathcal{P}).$$

Покажите, что

$$\{[\nabla_A, \nabla_B]\,\mathbf{C}_{\text{новое}}\}_{\text{в } \mathcal{P}_0} - \{[\nabla_A, \nabla_B]\,\mathbf{C}_{\text{старое}}\}_{\text{в } \mathcal{P}_0} = \mathbf{C}_{\text{старое}} \nabla_{[A,B]} f.$$

11.2. Доказательство того, что $\mathbf{R}$ есть тензор

Исходя из определения (11.8, 11.9), покажите, что $\mathbf{R}$ есть тензор. *Указание.* Воспользуйтесь следующей процедурой.

а. Покажите, что для произвольной функции $f(\mathcal{P})$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\, f\mathbf{C} = f\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}.$$

б. Подобным же образом покажите, что

$$\mathcal{R}(f\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C} = f\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C} \text{ и } \mathcal{R}(\mathbf{A}, f\mathbf{B})\,\mathbf{C} = f\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}.$$

в. Покажите, что оператор $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}$ линеен, т. е. что

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}+\mathbf{a}, \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C} + \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{B})\,\mathbf{C},$$
$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{b})\,\mathbf{C} = \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C} + \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\,\mathbf{C},$$
$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})(\mathbf{C}+\mathbf{c}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C} + \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{c}.$$

г. Используя полученные выше свойства, докажите самое важное свойство $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}$: любое варьирование скоростей изменения (градиентов) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, сохраняющее неизменными зна-

чения **A**, **B**, **C** в точке $\mathscr{P}_0$:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A} &\to \mathbf{A} + a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{B} &\to \mathbf{B} + b^\alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{C} &\to \mathbf{C} + c^\alpha \mathbf{e}_\alpha\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}[a^\alpha(\mathscr{P}),\ b^\alpha(\mathscr{P}),\ c^\alpha(\mathscr{P}) \text{ равны нулю при } \mathscr{P} = \mathscr{P}_0,\\ \text{а в остальном произвольны}]\end{array}$$

оставляет неизменным значение $\mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}$ в точке $\mathscr{P}_0$.

д. Исходя из этих фактов, придите к выводу, что **R** есть тензор.

11.3. Компоненты R в координатном базисе

Выведите выражение (11.12) для компонент тензора Римана в координатном базисе. [*Решение*:

$$\begin{aligned}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \mathbf{R}(\omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta) \text{ (обычный способ вычисления компонент)}\\ &= \langle \omega^\alpha, \mathscr{R}(\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta)\,\mathbf{e}_\beta\rangle \text{ (согласно определению (11.9))}\\ &= \langle \omega^\alpha, (\nabla_\gamma\nabla_\delta - \nabla_\delta\nabla_\gamma)\,\mathbf{e}_\beta\rangle \text{ (согласно определению (11.8)}\\ &\qquad\qquad \text{и условию } [\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\beta]=0 \text{ в координатном базисе)}\\ &= \langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\delta,\gamma} + (\mathbf{e}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\gamma})\,\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \mathbf{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma,\delta} - (\mathbf{e}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\delta})\,\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}\rangle =\\ &= (\Gamma^\mu{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma,\delta})\,\langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\mu\rangle + (\Gamma^\nu{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\nu{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma})\,\langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\nu\rangle,\end{aligned}$$

что сводится к (11.12), если учесть, что $\langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\mu\rangle = \delta^\alpha{}_\mu$.]

11.4. Компоненты R в некоординатном базисе

Выведите следующее выражение для компонент **R** в некоординатном базисе с коммутационными коэффициентами $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$, определяемыми соотношением (9.22):

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}c_{\gamma\delta}{}^\mu. \quad (11.13)$$

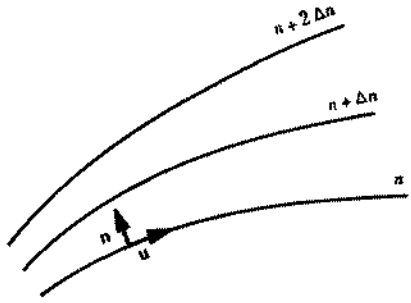
Дополнение 11.4. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ВЫПОЛНЕННЫЙ ПО СХЕМЕ НЬЮТОНОВСКОГО АНАЛИЗА

Ньютоновский анализ

1. Рассмотрим семейство траекторий пробных частиц $x^j(t, n)$ в обычном трехмерном пространстве: t — время, измеряемое по часам частиц или по любым другим часам, n — «параметр отбора».

Геометрический анализ

1. Рассмотрим семейство траекторий (геодезических) $\mathscr{P}(\lambda, n)$ в пространстве-времени: λ — аффинный параметр, т. е. время, измеряемое по часам частиц, n — «параметр отбора».



2. Уравнение движения для каждой траектории имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\right)_n + \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = 0,$$

где Φ — ньютоновский потенциал.

2. Уравнение геодезических для каждой траектории имеет вид

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0.$$

[По виду похоже на уравнение первого порядка; на самом деле это уравнение второго порядка, поскольку $\mathbf{u}$ само является производной, $\mathbf{u} = (\partial \mathscr{P}/\partial\lambda)_n$.]

3. Найдем разность между уравнениями движения для соседних траекторий n и $n+\Delta n$ и перейдем к пределу при $\Delta n \to 0$, т. е. возьмем производную

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t \left[\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\right)_n + \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right] = 0.$$

3. Найдем разность между уравнениями геодезических для соседних геодезических n и $n+\Delta n$ и перейдем к пределу при $\Delta n \to 0$, т. е. возьмем ковариантную производную

$$\nabla_{\mathbf{n}}[\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}] = 0.$$

4. Действие $\partial/\partial n$ на второе слагаемое перепишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t = \left(\frac{\partial x^k}{\partial n}\right)_t \frac{\partial}{\partial x^k} = n^k \frac{\partial}{\partial x^k};$$

отсюда получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n \left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right)_n + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j\, \partial x^k} n^k = 0.$$

4. Здесь нет второго слагаемого, поэтому оставляем уравнение в виде

$$\nabla_{\mathbf{n}}[\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}] = 0.$$

5. Чтобы получить уравнение для относительного ускорения, «протащим» $(\partial/\partial n)_t$ сквозь оба оператора $(\partial/\partial t)_n$ (допустимая операция, поскольку частные производные коммутируют!); получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n \left(\frac{\partial x^j}{\partial n}\right)_t + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j\, \partial x^k} n^k = 0.$$

5. Чтобы получить уравнение для относительного ускорения $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$, «протащим» $\nabla_{\mathbf{n}}$ через $\nabla_{\mathbf{u}}$ и через $\partial/\partial\lambda$ в $\mathbf{u} = \partial\mathscr{P}/\partial\lambda$:

а. *Первый этап*: «Протащим» $\nabla_{\mathbf{n}}$ через $\nabla_{\mathbf{u}}$ в $\nabla_{\mathbf{n}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$. В результате получим

Это эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 n^j}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} n^k = 0.$$

«относительное ускорение» | «силы тяготения, вызывающие приливное воздействие»

$$(\nabla_u \nabla_n + \underbrace{[\nabla_n, \nabla_u]}) \mathbf{u} = 0.$$

коммутатор; его присутствие необходимо, поскольку в общем случае $\nabla_u \nabla_n \neq \nabla_n \nabla_u$.

б. *Второй этап.* «Протащим» ∇_n через $\partial/\partial\lambda$ в $\mathbf{u} = \partial\mathcal{P}/\partial\lambda$. В результате получим

$$\nabla_n \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda} = \nabla_n \mathbf{u} = \nabla_u \mathbf{n} = \nabla_u \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial n}$$

определение $\mathbf{u}$ | определение $\mathbf{n}$

Почему? Потому что из симметрии ковариантной производной следует

$$\nabla_n \mathbf{u} - \nabla_u \mathbf{n} = [\mathbf{n}, \mathbf{u}] = \left[\frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right] = \frac{\partial^2}{\partial n\, \partial \lambda} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda\, \partial n} = 0.$$

в. В результате имеем

$$\nabla_u \nabla_u \mathbf{n} + [\nabla_n, \nabla_u] \mathbf{u} = 0$$

«относительное ускорение» | «силы тяготения, вызывающие приливное воздействие», т. е. «кривизна пространства-времени»

Дополнение 11.5. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНА

А. Определение R, мотивируемое приливными силами тяготения

1. Приливные силы (кривизна пространства-времени) вызывают относительное ускорение пробных частиц (геодезических), определяемое из уравнения

$$\nabla_u \nabla_u \mathbf{n} + [\nabla_n, \nabla_u] \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

2. Исходя из этого, было бы естественным положить по определению

$$\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]\,\mathbf{C}. \tag{2}$$

↑ [пустой канал для ввода 1-формы

Б. Несостоятельность этого определения

1. Определение можно считать приемлемым лишь в том случае, если $\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ является линейной машиной, не зависящей от того, как $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ меняются от точки к точке.
2. Проверим это на частном примере: проварьируем изменение $\mathbf{C}$, но не само $\mathbf{C}$, в событии $\mathscr{P}_0$:

$$\mathbf{C}_{\text{новое}}(\mathscr{P}) = f(\mathscr{P})\,\mathbf{C}_{\text{старое}}(\mathscr{P}).$$

↑ [произвольная функция для которой $f(\mathscr{P}_0) = 1$

3. Приведет ли это к изменению $[\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]\,\mathbf{C}$? *Да*! В упражнении 11.1 показано, что

$$\{[\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]\,\mathbf{C}_{\text{новое}}\}_{\mathbf{B}\,\mathscr{P}_0} - \{[\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}]\,\mathbf{C}_{\text{старое}}\}_{\mathbf{B}\,\mathscr{P}_0} = \mathbf{C}_{\text{старое}} \nabla_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} f.$$

В. Модифицированное определение R

1. От члена $\mathbf{C}_{\text{старое}} \nabla_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} f$, который нам мешает, можно избавиться, вычтя из $\mathbf{R}$ похожий на него «поправочный член», т. е. переопределив $\mathbf{R}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}, \tag{3}$$

$$\mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv [\nabla_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{B}}] - \nabla_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}. \tag{4}$$

2. Тогда результат изложенной выше процедуры не зависит от «варьирующей функции» f:

$$\{\mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}_{\text{новое}}\}_{\mathbf{B}\,\mathscr{P}_0} = \{\mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}_{\text{старое}}\}_{\mathbf{B}\,\mathscr{P}_0}.$$

Г. Совместимо ли модифицированное определение с уравнением для приливных сил тяготения?

1. Хотелось бы написать $\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0$.
2. Это соотношение справедливо как для первоначального определения $\mathbf{R}$, так и для модифицированного определения, поскольку

$$\mathscr{R}(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = [\nabla_{\mathbf{n}}, \nabla_{\mathbf{u}}] - \nabla_{[\mathbf{n}, \mathbf{u}]} = [\nabla_{\mathbf{n}}, \nabla_{\mathbf{u}}].$$

↑ $= 0$, так как $\mathbf{n} = (\partial/\partial n)_\lambda$ и $\mathbf{u} = (\partial/\partial\lambda)_n$ коммутируют

Отклонение геодезических и приливные силы не позволяют провести различие между $\mathscr{R}(\mathbf{n}, \mathbf{u})$ и $[\nabla_{\mathbf{n}}, \nabla_{\mathbf{u}}]$, а следовательно, между старым и новым определениями $\mathbf{R}$.

Д. Приемлемо ли модифицированное определение?

Иначе говоря, является ли $\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \mathscr{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{C}$ линейной машиной, результат на выходе которой не зависит от того, как $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ изменяются в окрестности той точки, где мы вычисляем $\mathbf{R}$? *Да!* (См. упражнение 11.2.)

§ 11.4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ПО ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ

Изменение вектора при параллельном переносе вдоль замкнутого контура

В чем проявляется кривизна пространства-времени и как эти проявления можно описать количественно? Одним из проявлений является отклонение геодезических (относительное ускорение пробных тел), описываемое уравнением (11.10). Другим проявлением, имеющим почти такое же значение, является изменение вектора в результате параллельного переноса по замкнутому контуру. Этот эффект отчетливее всего выступает в той же проблеме — отклонении геодезических,— анализ которой привел нас к понятию кривизны. Вектор относительного ускорения $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\eta}$ является в то же время изменением $\delta\mathbf{u}$ вектора $\mathbf{u}$, возникающим в результате параллельного переноса вдоль контура, ребрами которого являются векторы $\boldsymbol{\eta}$ и $\mathbf{u}$:

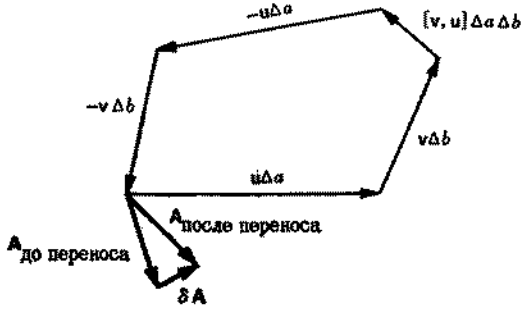
Связь с отклонением геодезических

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\eta} = \delta\mathbf{u}.$$

(Доказательство см. в дополнении 11.6.) Следовательно, в этом частном случае можно записать

$$\delta\mathbf{u} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}) = 0.$$

Легко получить соответствующее обобщение. Выбираем замкнутый четырехсторонник с ребрами $\mathbf{u}\Delta a$ и $\mathbf{v}\Delta b$ (фиг. 11.2; Δa и Δb — малые параметры, впоследствии устремляемые к нулю). Обносим вектор $\mathbf{A}$ параллельным образом вокруг этого четырехсторонника.



ФИГ. 11.2
Изменение $\delta\mathbf{A}$ вектора $\mathbf{A}$ в результате параллельного переноса по замкнутому контуру. Ребрами кривой являются векторные поля $\mathbf{u}\Delta a$ и $\mathbf{v}\Delta b$ вместе с «замыкающим четырехсторонник» $[\mathbf{v}\Delta b, \mathbf{u}\Delta a] = [\mathbf{v}, \mathbf{u}]\,\Delta a \Delta b$ (см. дополнение 9.2).

Результирующее изменение $\mathbf{A}$ должно удовлетворять уравнению

Уравнение, которому удовлетворяет это изменение

$$\delta\mathbf{A} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{A}, \mathbf{u}\Delta a, \mathbf{v}\Delta b) = 0, \tag{11.14}$$

или, что эквивалентно,

$$\delta\mathbf{A} + \Delta a \Delta b \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{A} = 0, \tag{11.14'}$$

или, точнее,

$$\lim_{\substack{\Delta a \to 0 \\ \Delta b \to 0}} \left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\Delta a \Delta b}\right) + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \tag{11.14''}$$

Доказательство этого соотношения крайне поучительно, поскольку оно выявляет геометрический смысл поправочного члена $\nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}$ в операторе кривизны.

Вывод уравнения для этого изменения

Контур обхода (фиг. 11.2) должен быть составлен из двух произвольных векторных полей $\mathbf{u}\Delta a$ и $\mathbf{v}\Delta b$. Однако контур, составленный из одних только этих полей, имеет разрыв по простой причине. Величина $\mathbf{u}$ отнюдь не обязана меняться от точки к точке именно таким образом, чтобы смещение $\mathbf{u}\Delta a$, соединяющее стрелки $\mathbf{v}$ внизу, соединяло эти же стрелки вверху, замыкая четырехсторонник. Аналогичным образом $\mathbf{v}$ тоже не обязано изменяться именно таким образом, чтобы соединять стрелки $\mathbf{u}$ справа и слева. Чтобы ликвидировать разрыв и замкнуть контур, вставим «замыкающий четырехсторонник» вектор $[\mathbf{v}\Delta b, \mathbf{u}\Delta a] = [\mathbf{v}, \mathbf{u}]\,\Delta a \Delta b$. (См. дополнение 9.2, где показано, что этот вектор действительно замыкает контур.)

Теперь, когда контур фиксирован, нужно перенести вдоль него вектор $\mathbf{A}$. Один способ — «геометрическое построение», осуществляемое многократным применением лестницы Шилда,— может служить основой при планировании возможного эксперимента. Чтобы наметить план абстрактной, свободной от координат вычислительной процедуры (принятый здесь метод рассуждений), введем «вспомогательное поле», которое будет отброшено по окончании этой процедуры. *План*: Будем считать, что $\mathbf{A}$ — не локализованный вектор, определенный в одной лишь начальной точке маршрута, а векторное поле (определенное по всему маршруту). *Цель*: Получить эталон сравнения (для сравнения $\mathbf{A}$, перенесенного из начальной точки, с $\mathbf{A}$ в интересующем нас месте). *Основание*: Эталон сравнения выпадает из окончательного результата. *Ход рассуждений*:

$$-\delta\mathbf{A} = -\left(\begin{array}{l}\text{полное изменение, возникающее в результате}\\ \text{того, что мы берем вектор } \mathbf{A}\text{, расположенный}\\ \text{в начальной точке контура, и переносим его}\\ \text{параллельно } (\mathbf{A} \text{ подвижный}) \text{ вдоль замкнутого}\\ \text{контура. Эту величину нельзя найти, пока кон-}\\ \text{тур не замкнут, поскольку вдоль пути переноса}\\ \text{нет заранее заданного эталона сравнения}\end{array}\right) =$$

$$= + \left\{ \begin{array}{l} \text{величина, которая может быть найдена для} \\ \text{каждого ребра контура по отдельности. Эту} \\ \text{новую величину можно определить лишь после} \\ \text{введения во всей области векторного поля } \mathbf{A}^{\text{поле}}, \\ \text{изменяющегося гладким образом и совпадаю-} \\ \text{щего в начальной точке с исходным локализо-} \\ \text{ванным вектором } \mathbf{A}, \text{ но в остальном произволь-} \\ \text{ного. Эта новая величина равна } \mathbf{A}^{\text{поле}} \text{ в начал}- \\ \text{ьной точке (совпадающий с } \mathbf{A}^{\text{локализованный}} \text{ в на-} \\ \text{чальной точке) минус } \mathbf{A}^{\text{подвижный}} \text{ в конечной} \\ \text{точке (после переноса)} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{\text{ребра} \\ \text{контура}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{изменение } \mathbf{A}^{\text{поле}} \text{ по отношению к } \mathbf{A}^{\text{подвижный}} \\ \text{в результате параллельного переноса вдоль дан-} \\ \text{ного ребра. Эта величина для каждого ребра} \\ \text{зависит от произвольно выбранного } \mathbf{A}^{\text{поле}}, \text{ но} \\ \text{этот произвол выпадает из окончательного ре-} \\ \text{зультата благодаря замкнутости контура} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{изменение } \mathbf{A}^{\text{поле}} \text{ по отношению к параллельно} \\ \text{перенесенному } \mathbf{A}^{\text{подвижный}}, \text{ взятому в каче-} \\ \text{стве эталона сравнения, составленное из вкла-} \\ \text{дов от следующих ребер, показанных} \\ \text{на фиг. 11.2:} \\ \mathbf{v}\Delta b, \text{ вклад которого } \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{A}^{\text{поле}}\Delta b \text{ (вдоль} \\ \text{линии, смещенной на } \mathbf{u}\Delta a \text{ от начала);} \\ -\mathbf{v}\Delta b, \text{ вклад которого } -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{A}^{\text{поле}}\Delta b \text{ (вдоль} \\ \text{линии, проходящей через начальную точку);} \\ -\mathbf{u}\Delta a, \text{ вклад которого } -\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A}^{\text{поле}}\Delta a \text{ (вдоль} \\ \text{линии, смещенной на } \mathbf{v}\Delta b \text{ от начала);} \\ \mathbf{u}\Delta a, \text{ вклад которого } \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A}^{\text{поле}}\Delta a \text{ (вдоль линии,} \\ \text{проходящей через начальную точку);} \\ +[\mathbf{v},\mathbf{u}]\,\Delta a\Delta b, \text{ вклад которого } \nabla_{[\mathbf{v},\mathbf{u}]}\mathbf{A}^{\text{поле}}\Delta a\Delta b \end{array} \right\} =$$

$$= \{\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}} + \nabla_{[\mathbf{v},\mathbf{u}]}\}\,\mathbf{A}\Delta a\Delta b =$$

$$= \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{A}^{\text{поле}}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\,\Delta a\Delta b = \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\mathbf{A}^{\text{поле}}\Delta a\Delta b. \qquad (11.15)$$

Что получаем: Оператор кривизны

$$\mathbf{R}(\ldots, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]},$$

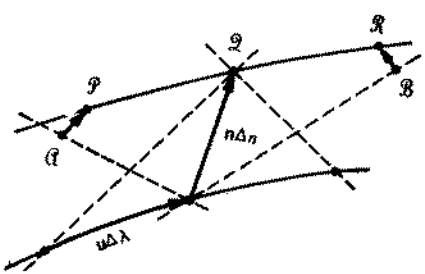
примененный к векторному полю $\mathbf{A}^{\text{поле}}$, дает изменение локализованного вектора $\mathbf{A}^{\text{локализованный}}$ (называемого в процессе переноса $\mathbf{A}^{\text{подвижный}}$) в результате параллельного переноса по замкнутому контуру, взятое с обратным знаком. Он не дает изменения $\mathbf{A}^{\text{поле}}$ по окончании переноса вдоль этого контура, поскольку значения $\mathbf{A}^{\text{поле}}$ в начале и конце пути совпадают. В уравнении (11.14′) это изменение выражено через представ

ленный в удобном виде дифференциальный оператор $\mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}$. *Парадокс*: Действие этого оператора на $\mathbf{A}^{\text{поле}}$ не должно давать и не дает изменения $\mathbf{A}^{\text{поле}}$. *В чем недостаток*: Оператор $\mathbf{R}(\ldots, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ по характеру своего действия на $\mathbf{A}$ имеет вид дифференциального, хотя на самом деле является локальным. Заменим предложенное гладкое векторное поле $\mathbf{A}^{\text{поле}}$ совсем другим, но тоже гладким векторным полем $\mathbf{A}^{\text{поле, новое}}$. Тогда совпадения значений этих полей лишь в одной интересующей нас точке вполне достаточно, чтобы при вводе этих полей в $\mathbf{R}$ на выходе в этой точке получался один и тот же результат $\mathbf{R}(\ldots, \mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{A}$. Мы это знаем из того факта, что существование и значение найденной величины $\delta\mathbf{A}$ никак не зависит от выбора $\mathbf{A}^{\text{поле}}$. В этом можно также убедиться и с помощью подробных выкладок (упражнение 11.2). *Сущность*: Хотя производные в операторе кривизны, отражающие изменение $\mathbf{A}$ от точки к точке, и сокращаются, они самым непосредственным образом выражают «скорость изменения геометрии от точки к точке» (отклонение геодезических). *Дальнейшее обобщение*: Замкнутый контур не обязательно должен быть черехсторонником. Оператор кривизны указывает, как изменяется вектор при параллельном перенесении вокруг малых кривых произвольной формы (дополнение 11.7).

УПРАЖНЕНИЕ **11.5. Компланарность замкнутых кривых**

Пусть $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ — бивекторы (см. дополнение 11.7) двух малых замкнутых кривых в одном и том же событии. Покажите, что эти кривые компланарны тогда и только тогда, когда $\mathbf{f}_1 = a\mathbf{f}_2$, где a — некоторое число.

Дополнение 11.6. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ПО ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ: ДВА АСПЕКТА ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ПОСТРОЕНИЯ



Отклонение геодезических. А

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} = \lim_{\substack{\Delta\lambda\to 0\\ \Delta n\to 0}} \left\{ \frac{\mathscr{A}\mathscr{P} + \mathscr{B}\mathscr{R}}{(\Delta\lambda)^2\,\Delta n} \right\}$$

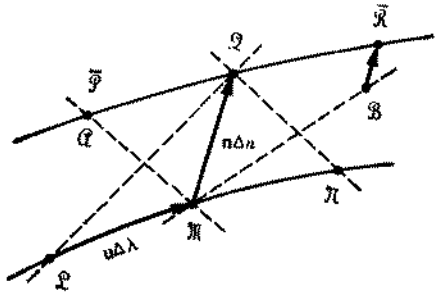
(см. дополнения 11.2 и 11.3).

Отклонение геодезических. Б

Тот же результат, но другое построение. Чтобы упростить установление связи с переносом по замкнутому контуру, изменим наклон и масштаб параметризации геодезической $\mathscr{P}\mathscr{Q}\mathscr{R}$ на первом

рисунке. В результате на втором рисунке точки $\overline{\mathcal{P}}$ и $\mathcal{A}$ совпадут. Из дополнения 11.2, Е, мы знаем, что $\mathcal{A}\overline{\mathcal{P}} + \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{A}\overline{\mathcal{P}} + \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}$, т. е. $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$ для данного семейства геодезических и для исходного семейства одно и то же:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} = \lim_{\substack{\Delta\lambda\to 0\\ \Delta n\to 0}} \left\{ \frac{\mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}}{(\Delta\lambda)^2\,\Delta n} \right\}.$$



Чтобы упростить рассмотрение, положим также $\Delta n = \Delta\lambda = 1$ и будем предполагать, что $\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}$ настолько малы, что $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$ можно вычислять, не переходя к пределу:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} = \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}.$$

Параллельный перенос по замкнутому контуру, осуществляемый с помощью того же построения

План: Перенесем параллельно вектор $\mathbf{u}\Delta\lambda = \mathcal{Q}\overline{\mathcal{R}}$ против часовой стрелки вдоль кривой $\mathcal{Q} \to \overline{\mathcal{P}} \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{Q}$. *Исполнение:* 1. Обозначим переносимый вектор $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$. 2. В точке $\mathcal{Q}$ имеем $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = \mathcal{Q}\overline{\mathcal{R}}$. 3. В точке $\overline{\mathcal{P}}$ $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = \overline{\mathcal{P}}\mathcal{Q}$, поскольку $\overline{\mathcal{P}}\mathcal{Q}\overline{\mathcal{R}}$ — геодезическая, а $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ — ее касательный вектор. 4. В точке $\mathcal{L}$ $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = \mathcal{L}\mathcal{M}$ согласно методу построения лестницы Шилда. 5. В точке $\mathcal{M}$ $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = \mathcal{M}\mathcal{N}$, поскольку $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$ — геодезическая, а $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ — ее касательный вектор. 6. В точке $\mathcal{Q}$ $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = \mathcal{Q}\mathcal{B}$ согласно методу построения лестницы Шилда. *Результат:* Изменение $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ равно $-\mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}$. При обходе кривой в противоположном направлении ($\mathcal{L} \to \overline{\mathcal{P}} \to \mathcal{Q} \to \mathcal{M} \to \mathcal{L}$) изменение было бы равно $+\mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}$:

$$(\delta\mathbf{u})_{\substack{\text{в результате параллельного переноса}\\ \text{вверх вдоль } \mathbf{n},\ \text{вбок вдоль } \mathbf{u},\ \text{вниз}\\ \text{вдоль } -\mathbf{n} \text{ и опять вбок вдоль } -\mathbf{u}\\ \text{к начальной точке}}} = \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}} = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}.$$

Дополнение 11.7. ЗАКОН ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ПО ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ

А. Частный случай

Кривая представляет собой замкнутый четырехсторонник, образованный векторными полями $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

1. Закон имеет вид (в компонентной форме)

$$\delta A^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} u^{\gamma} v^{\delta} = 0. \tag{1}$$

2. От каких характеристик замкнутой кривой он зависит?

   а. Заметим, что $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = -R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma}$ [антисимметрия по двум последним индексам очевидна из выражения (11.12) для компонент; очевидна также из того факта, что изменение направления обхода контура на противоположное, т. е. перестановка $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, должно изменять знак $\delta\mathbf{A}$].

б. В уравнении (1) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ свертывается по этим двум последним, антисимметричным индексам. Симметричная часть $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ должна давать нулевой вклад. Отличен от нуля только вклад антисимметричной части $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$:

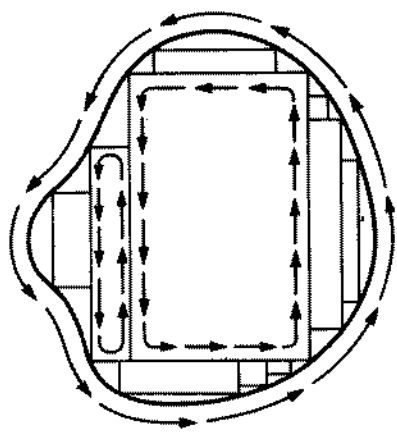
$$\delta A^{\alpha} + \frac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^{\gamma\delta} = 0. \tag{2}$$

3. Эта антисимметричная часть есть *бивектор*. Он не зависит от формы кривой, а зависит только от а) плоскости, в которой лежит кривая, и б) площади, которую она ограничивает. [Хотя без метрики понятие «площади» и лишено смысла, тем не менее «относительные площади в данном событии в данной плоскости» имеют точно такой же смысл, как и «относительные длины в данном событии в данном направлении». Два вектора в одном и том же событии лежат на одной и той же линии, если они отличаются друг от друга лишь множителем; их относительная длина в этом случае совпадает с их отношением. Аналогично, две малые замкнутые кривые в одном и том же событии лежат в одной и той же плоскости, если их бивекторы отличаются друг от друга лишь множителем (упражнение 11.5); их относительная площадь в этом случае совпадает с отношением их бивекторов.]

Б. Общий случай

Произвольная, но малая замкнутая кривая.

1. Разобъем кривую на совокупность четырехсторонников, лежащих в одной плоскости с данной кривой.
2. Обойдем каждый из четырехсторонников по одному разу в том же направлении, в котором нужно обойти кривую. В результате каждое внутреннее ребро будет обойдено дважды во взаимно противоположных направлениях (равносильно тому, что его вообще не обходили); внешний край (кривая) будет обойден один раз.
3. Таким образом, $\delta\mathbf{A}$, соответствующее обходу кривой, равно сумме $\delta\mathbf{A}$, полученных в результате обхода каждого четырехсторонника:



$$\delta A^{\alpha} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{четырех-}\\ \text{сторонники}}} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}_{\substack{\text{для данного}\\ \text{четырех-}\\ \text{сторонника}}})^{\gamma\delta},$$

Определим бивектор $\mathbf{f}$ кривой как сумму бивекторов четырехсторонников, из которых она составлена:

$$\mathbf{f} = \sum_{\substack{\text{четырех-}\\ \text{сторонники}}} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_{\text{четырехсторонника}}$$

(сложим «площади», оставив плоскость неизменной).

4. Тогда

$$\delta A^\alpha + \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} A^\beta f^{\gamma\delta} \equiv \delta A^\alpha + R^\alpha{}_{\beta\,|\gamma\delta|} A^\beta f^{\gamma\delta} = 0.$$

B. Предостережение

Все это справедливо лишь для замкнутых кривых малого размера: при удвоении площади $\delta\mathbf{A}$ тоже удваивается, а ошибка возрастает в $\sim 2^{3/2}$ раза [анализ, проведенный в § 11.4, показывает, что $\delta\mathbf{A} \sim \Delta a \Delta b$, а ошибка $\sim (\Delta a)^2 \Delta b$ или $\Delta a\,(\Delta b)^2$].

§ 11.5. НУЛЕВАЯ РИМАНОВА КРИВИЗНА ЭКВИВАЛЕНТНА ТОМУ, ЧТО МНОГООБРАЗИЕ ПЛОСКОЕ

Определение плоского многообразия

Сказать, что пространство, пространство-время или другое какое-либо многообразие является плоским, значит сказать, что в нем существует система координат $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$, в которой все геодезические представляются прямыми:

$$x^\alpha(\lambda) = a^\alpha + b^\alpha \lambda. \tag{11.16}$$

(Пример: Лоренцево пространство-время специальной теории относительности, где пробные тела движутся по таким прямым линиям.) Геодезические могут быть представлены в таком виде тогда и только тогда, когда коэффициенты связности в уравнении геодезических

$$\frac{d^2x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{11.17}$$

в этой системе координат все равны нулю:

$$\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} = 0. \tag{11.18}$$

Из того, что многообразие плоское, следует $\mathbf{R} = 0$

Равенство нулю коэффициентов связности сразу же влечет за собой [соотношение (11.12)] равенство нулю всех компонент тензора кривизны Римана:

$$R^\beta{}_{\gamma\mu\nu} = 0. \tag{11.19}$$

[Формулировка (11.16) → (11.18) → (11.19) на геометрическом языке: прямолинейность всех геодезических в данной системе координат означает, что разделение первоначально параллельных геодезических сохраняется; отклонение геодезических равно нулю и, следовательно, кривизна отсутствует.]

Верно ли обратное? Вытекает ли из равенства нулю римановой кривизны существование такой системы координат, в которой все геодезические представляются прямыми? Следующее построение показывает, что так оно и есть.

Доказательство того, что из $\mathbf{R} = 0$ следует, что многообразие плоское

Перенесем вектор параллельным образом из $\mathscr{P}_0$ в $\mathscr{Q}$, а затем обратно из $\mathscr{Q}$ в $\mathscr{P}_0$, но уже по слегка отличному пути. Он вернется в исходную точку, не изменившись ни по величине, ни по направлению, поскольку $\mathbf{R}$ везде равен нулю. Отсюда следует, что в результате параллельного переноса базисного вектора $\mathbf{e}_\mu$ из $\mathscr{P}_0$ в $\mathscr{Q}$ мы получим в $\mathscr{Q}$ базисный вектор $\mathbf{e}_\mu$, ни величина, ни направление которого не зависят от пути переноса (если каждый путь можно получить один из другого с помощью какой-либо последовательности непрерывных деформаций). Все сказанное относительно точки $\mathscr{Q}$ справедливо для всех точек многообразия; все сказанное относительно одного базисного вектора $\mathbf{e}_\mu$ справедливо для полной совокупности базисных векторов ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Параллельный перенос базиса $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathscr{P}_0)\}$ дает во всем многообразии «поле системы отсчета», каждый базисный вектор которого не меняется (по отношению к полю системы) при параллельном переносе из какой-либо точки в соседнюю; таким образом,

$$\nabla \mathbf{e}_\mu = 0 \tag{11.20}$$

или

$$\nabla_\nu \mathbf{e}_\mu \,(\equiv \nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{e}_\mu) = 0. \tag{11.21}$$

Равенство нулю отдельных производных влечет за собой равенство нулю коммутатора полей любых двух базисных векторов:

$$[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = \nabla_\mu \mathbf{e}_\nu - \nabla_\nu \mathbf{e}_\mu = 0 - 0 = 0 \tag{11.22}$$

Разрыв у четырехсторонника на фиг. 11.2 (где теперь под $\mathbf{u}$ следует понимать $\mathbf{e}_\mu$, а под $\mathbf{v}$ — $\mathbf{e}_\mu$) полностью исчезает. Основываясь на этом, можно ввести координаты x^μ, каждая из которых возрастает в направлении соответствующего векторного поля; выбрав соответствующим образом масштаб, можно записать

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{11.23}$$

(см. упражнение 9.9). Построив этот координатный базис, по формуле

$$\nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \tag{11.24}$$

можно найти коэффициенты связности. Поскольку все величины в левой части равны нулю, приходим к выводу, что все коэффициенты связности справа («искривление геодезических») тоже должны быть равны нулю, а значит, пространство-время действительно является плоским.

Вывод: *Пространство-время является плоским, т. е. в нем существуют «плоские координаты»*, в которых повсюду $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$ и геодезические суть прямые линии $x^\alpha(\lambda) = a^\alpha + b^\alpha\lambda$, *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R} = 0$.

Примечание. В пространстве-времени Эйнштейна, где есть метрика, в ходе предыдущих рассуждений можно выбрать ортонор-

мированные $\{\mathbf{e}_\mu(\mathscr{P}_0)\}$, для которых $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ в точке $\mathscr{P}_0$. Получающееся в результате поле системы отсчета будет всюду ортонормированным, а система координат — лоренцевой. Таким образом, в эйнштейновской теории тяготения полученный выше вывод может быть переписан в виде: *пространство-время является плоским (в нем существует лоренцева система координат) тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R} = 0$.

Лоренцевы координаты существуют тогда и только тогда, когда $\mathbf{R} = 0$

Предостережение: Если многообразие плоское, то это еще не означает, что у него эвклидова топология. Возьмем лист бумаги. Он плоский. Свернем его в цилиндр. Внутренне он остается плоским. Траектории геодезических на нем не изменились. Изменилась лишь топология — с точки зрения наблюдателя, живущего на этом листе. («Внешняя геометрия»— способ погружения этого листа в окружающее трехмерное пространство — также изменилась, но наблюдатель на самом листе ничего об этом не знает; однако это уже выходит за рамки материала данной главы. Подробнее об этом см. в § 21.5.)

Из того, что многообразие плоское, не следует, что его топология эвклидова

Возьмем такой цилиндр. Согнем его и склеим концы, не меняя его плоской внутренней геометрии. Это невозможно сделать, если цилиндр остается погруженным в плоское трехмерное эвклидово пространство, и легко осуществляется, если он погружен в эвклидово пространство четырех измерений. Однако погружение не имеет никакого значения для наблюдателей, обитающих на цилиндре, так как внутренняя геометрия — это единственное, что они могут измерить; поэтому единственное, что имеет для них значение, это *топологическое отождествление* двух концов цилиндра. Результат с топологической точки зрения представляет собой тор; но траектории геодезических так и не изменились, внутренняя геометрия осталась плоской, тензор $\mathbf{R}$ равен нулю.

По аналогии рассмотрим плоское пространство-время Минковского. Выберем некоторую лоренцеву систему отсчета и возьмем в ней куб с ребром 10^{10} световых лет ($0 < x < 10^{10}$ световых лет; то же самое для y и z). Отождествим противоположные грани куба таким образом, что геодезические, выходящие через одну грань, входят через другую. Результат с топологической точки зрения представляет собой тритор — «замкнутый мир» с конечным объемом, плоской геометрией Минковского и формой, которая совершенно не меняется с течением лоренцева времени t (нет ни сжатия, ни расширения).

§ 11.6. НОРМАЛЬНЫЕ РИМАНОВЫ КООРДИНАТЫ

В искривленном пространстве-времени невозможно ввести систему координат, в которой повсюду $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$. Но в данном событии $\mathscr{P}_0$ всегда можно построить локально инерциальные системы отсчета; для наблюдателя в такой системе свободные частицы должны двигаться по прямым линиям, по крайней мере локально, а это

означает, что $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ должны обращаться в нуль, по крайней мере локально.

Нормальные римановы координаты — реализация локально инерциальной системы

Крайне полезным частным случаем такой локально инерциальной системы является *система нормальных римановых координат*. Выберем событие $\mathcal{P}_0$ и совокупность базисных векторов $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P}_0)\}$, используемых в нем инерциальным наблюдателем. Заполним пространство-время вблизи $\mathcal{P}_0$ геодезическими, выходящими из $\mathcal{P}_0$ во все стороны, как иглы у ежа или дикобраза. Каждая геодезическая в $\mathcal{P}_0$ определяется своим касательным вектором $\mathbf{v}$; в общем случае точка на геодезической может быть обозначена

Геометрическое построение нормальных римановых координат

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}(\lambda; \mathbf{v}) \tag{11.25}$$

аффинный параметр; указывает, «где» на данной геодезической — касательный вектор в $\mathcal{P}_0$; указывает, «которая из геодезических»

На самом деле здесь гораздо больше геодезических, чем нужно. Одной и той же точки можно достичь на длине с параметром λ при начальном касательном векторе $\mathbf{v}$ и на длине с параметром $\frac{1}{2}\lambda$ при начальном касательном векторе $2\mathbf{v}$:

$$\mathcal{G}(\lambda; \mathbf{v}) = \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{2}\lambda; 2\mathbf{v}\right) = \mathcal{G}(1; \lambda\mathbf{v}).$$

Таким образом, фиксируя $\lambda = 1$ и варьируя всевозможным образом $\mathbf{v}$, можно достичь любой точки в некоторой окрестности $\mathcal{P}_0$. На этом основано построение нормальных римановых координат. Выберем событие $\mathcal{P}$. Найдем в $\mathcal{P}_0$ такой касательный вектор $\mathbf{v}$, для которого $\mathcal{P} = \mathcal{G}(1; \mathbf{v})$. Разложим $\mathbf{v}$ по выбранному базису и обозначим его компоненты x^α:

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{G}(1; x^\alpha \mathbf{e}_\alpha).} \tag{11.26}$$

Точка $\mathcal{P}$ однозначно определяет x^α (если $\mathcal{P}$ достаточно близка к $\mathcal{P}_0$, так что геодезические еще не пересекают друг друга из-за кривизны пространства-времени). Точно так же и x^α определяют $\mathcal{P}$ однозначным образом. Следовательно, x^α можно выбрать в качестве координат $\mathcal{P}$ — ее «нормальных римановых координат, базирующихся на событии $\mathcal{P}_0$ и базисе $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P}_0)\}$».

Математические свойства нормальных римановых координат

Соотношение (11.26) есть краткая запись нормальных римановых координат. Другие соотношения, выведенные в упражнении 11.9, выражают их замечательные свойства:

$$\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P}_0) = (\partial/\partial x^\alpha)_{\mathcal{P}_0}, \tag{11.27}$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0, \tag{11.28}$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\mu}(\mathcal{P}_0) = -\frac{1}{3}(R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu} + R^{\alpha}{}_{\gamma\beta\mu}). \tag{11.29}$$

Если пространство-время наделено метрикой (как это и есть на самом деле) и если система отсчета в $\mathcal{P}_0$ была выбрана орто-

нормированной ($\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$), то

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\alpha\beta}, \tag{11.30}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}(\mathcal{P}_0) = 0, \tag{11.31}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = -\frac{1}{3}(R_{\alpha\mu\beta\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu}) = -\frac{2}{3} J_{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{11.32}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathcal{P}_0) = g_{\alpha\delta,\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\mathcal{P}_0). \tag{11.32'}$$

Здесь $J_{\alpha\beta\mu\nu}$ — компоненты тензора кривизны Якоби (см. упражнение 11.7).

Другие математические реализации локально инерциальной системы

Является ли эта система координат единственной из локально инерциальных в $\mathcal{P}_0$ (т. е. имеющих там $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$) и связанных с базисными векторами $\mathbf{e}_\alpha$ в нем (т. е. имеющих там $\partial/\partial x^\alpha = \mathbf{e}_\alpha$)? Нет. Но все такие системы координат (называемые *нормальными координатами*) совпадают друг с другом вплоть до членов второго порядка:

$$x^\alpha_{\text{новые}}(\mathcal{P}) = x^\alpha_{\text{старые}}(\mathcal{P}) + \text{поправки порядка } (x^\alpha_{\text{старые}})^3.$$

Более того, лишь системы, совпадающие вплоть до членов третьего порядка

$$x^\alpha_{\text{новые}}(\mathcal{P}) = x^\alpha_{\text{старые}}(\mathcal{P}) + \text{поправки порядка } (x^\alpha_{\text{старые}})^4$$

сохраняют красивую связь (11.29) и (11.32) с тензором кривизны Римана.

УПРАЖНЕНИЯ

11.6. Симметрии R

(Обсуждаются в гл. 13.) Покажите, что **R** обладает следующими симметриями:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta]} \quad \text{(антисимметричен по двум последним индексам)}, \tag{11.33а}$$

$$R^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0 \quad \text{(совершенно антисимметричная часть обращается в нуль)}. \tag{11.33б}$$

11.7. Отклонение геодезических позволяет найти все компоненты кривизны

Уравнение отклонения геодезических, которое мы до сих пор писали в виде

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{R}(\ldots, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}) = 0,$$

или

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\eta} + \mathscr{R}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})\,\mathbf{u} = 0,$$

может быть также записано в форме Якоби $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\eta} + \mathscr{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\,\boldsymbol{\eta} = 0$. Здесь $\mathscr{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — *оператор кривизны Якоби*, определяемый соотно-

шением

$$\mathscr{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\mathbf{n} \equiv \frac{1}{2}[\mathscr{R}(\mathbf{n}, \mathbf{u})\,\mathbf{v} + \mathscr{R}(\mathbf{n}, \mathbf{v})\,\mathbf{u}]. \tag{11.34}$$

Он связан с «тензором кривизны Якоби»

$$\mathbf{J}(\ldots, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathscr{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\mathbf{n}, \tag{11.35}$$

откуда следует, что

$$J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = J^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}(R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\alpha}). \tag{11.36}$$

а. Покажите, что из $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = R^{\mu}{}_{\alpha[\beta\gamma]}$ следует $J^{\mu}{}_{(\alpha\beta\gamma)} = 0$.

б. Покажите, что анализ отклонения геодезических (подстановка произвольных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ в $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} + \mathscr{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\,\mathbf{n} = 0$) позволяет определить *все* компоненты $\mathbf{J}$.

в. Покажите, что $\mathbf{J}$ несет в точности ту же информацию, что и $\mathbf{R}$ [*Указание.* Покажите, что

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \frac{2}{3}(J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} - J^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu}); \tag{11.37}$$

это в совокупности с (11.36) доказывает «одинаковый объем информации».] Следовательно, анализ отклонения геодезических позволяет найти все компоненты $\mathbf{R}$.

г. Покажите, что эквивалентность $\mathbf{J}$ и $\mathbf{R}$ существенным образом опирается на симметрию $R^{\mu}{}_{[\nu\alpha\beta]} = 0$. Для этого приведите пример таких значений $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = -R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}$, для которых $R^{\mu}{}_{[\nu\alpha\beta]} \neq 0$, а $J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = 0$.

11.8. Отклонение геодезических во всех подробностях

Выпишите уравнение отклонения геодезических в компонентах в произвольной системе координат. Выразите все ковариантные производные (обозначаемые точкой с запятой) через обычные производные (обозначаемые запятыми) и Γ-члены, чтобы все Γ- и ∂-члены появились в явном виде.

11.9. Нормальные римановы координаты в общем случае

Выведите свойства (11.27) — (11.29), (11.31) — (11.32′) нормальных римановых координат. *Указание.* Поступите следующим образом.

а. Из определения (11.26) докажите, что $(\partial\mathscr{P}/\partial x^{\alpha})_{\mathscr{P}_0} = \mathbf{e}_{\alpha}$.

б. Подобным же образом из определения (11.26) покажите, что каждая из кривых $x^{\alpha} = v^{\alpha}\lambda$ (где v^{α} — постоянные) является геодезической с аффинным параметром λ, проходящей через $\mathscr{P}_0$.

в. Покажите, что $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathscr{P}_0) = 0$, подставив $x^{\alpha} = v^{\alpha}\lambda$ в уравнение геодезических.

г. Поскольку кривые $x^{\alpha} = v^{\alpha}\lambda$ являются геодезическими при любом выборе параметров v^{α}, они позволяют определить не только

касательный вектор геодезической $\mathbf{u} \equiv (\partial/\partial\lambda)_{\mathscr{P}\alpha}$, но и векторы отклонения $\mathbf{N}_{(\alpha)} \equiv (\partial/\partial v^{\alpha})_{\lambda}$. Найдите компоненты этих векторов в системе нормальных римановых координат и подставьте в уравнение геодезического отклонения в том виде, как оно было записано в упражнении 11.8.

д. Приравняйте нулю коэффициенты при нулевой и первой степенях λ в уравнении отклонения геодезических пункта «г», воспользовавшись разложением

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}|_{x^{\mu}=v^{\mu}\lambda} = \lambda v^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\mu}(\mathscr{P}_0) + O(\lambda^2),$$

представляющим собой ряд Тэйлора для Γ. Таким способом получите выражение (11.29) для $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\mu}$ через тензор Римана.

е. Из соотношений (11.28), (11.29) и (8.24) для коэффициентов связности, выраженных через метрику, получите соотношения (11.31), (11.32) и (11.32′).

11.10. Тождества Бианки

Покажите, что тензор кривизны Римана удовлетворяет «тождествам Бианки»

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\,\varepsilon]} = 0. \tag{11.38}$$

Геометрический смысл этих тождеств обсуждается в гл. 15. (*Указание.* Проведите выкладки в начале системы нормальных римановых координат.)

11.11. Действие оператора кривизны на 1-формы

Пусть $\mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ есть оператор $\mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}$, который наряду с касательными векторами действует также и на 1-формы σ (или на другие тензоры). Покажите, что

$$\langle \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\sigma, \mathbf{w}\rangle = -\langle \sigma, \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\mathbf{w}\rangle.$$

11.12. Группа вращений: риманова кривизна

(Продолжение упражнений 9.13, 9.14 и 10.17.) Найдите компоненты тензора кривизны Римана в многообразии группы вращений $SO(3)$; воспользуйтесь базисом генераторов $\{\mathbf{e}_{\alpha}\}$. [*Ответ*:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}, \tag{11.39}$$

где $\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ — символ перестановок, определяемый соотношением (3.50м):

$$\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \equiv (\delta^{\alpha}{}_{\gamma}\delta^{\beta}{}_{\delta} - \delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta}{}_{\gamma}).$$

Отметим, что полученный ответ не зависит от положения точки $\mathscr{P}$ в групповом многообразии.]

12. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА НА ЯЗЫКЕ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Самый большой промежуток времени,
в течение которого современная картина провисела
в публичной галерее вверх ногами незамеченной,
равен 47 дням. Это была «Лодка» Матисса,
выставленная в Музее современного искусства в Нью-Йорке.
За это время галерею посетило 116 000 человек.

Н. МАКВИРСТЕР И. Р. МАКВИРСТЕР

Эта глава целиком относится к курсу 2.
Необходимым подготовительным материалом для нее являются главы 9—11.
Она не является необходимой для последующих глав,
но знание ее материала полезно при изучении
1) гл. 17 (уравнения поля Эйнштейна) и
2) гл. 38 и 39 (экспериментальные тесты и другие теории гравитации).

§ 12.1. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА В КРАТКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Принцип эквивалентности не является особенностью одного только эйнштейновского описания тяготения. Особенностью эйнштейновского описания является сочетание принципа эквивалентности и локально лоренцевой геометрии. Возвращаясь к теории Ньютона, забудем все открытия последнего столетия, касающиеся специальной теории относительности, световых конусов, ограничения всех скоростей скоростью света и собственного времени. Вернемся к «мировому времени» t предыдущих столетий. В терминах этого мирового времени и прямоугольных «галилеевых» пространственных координат траектории нейтральных пробных частиц описываются в ньютоновской теории уравнением

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = 0, \tag{12.1}$$

Ньютоновское тяготение: исходная формулировка

Φ (иногда обозначаемый $-U$) = ньютоновский потенциал. (12.2)

Обычная интерпретация этих уравнений подразумевает, что они описывают «кривые траектории» $x^j(t)$, вдоль которых пробные частицы падают в эвклидовом пространстве (*не* в пространстве-

времени). К этим кривым траекториям относятся круговые орбиты вокруг Земли и параболические траектории футбольного мяча. Согласно Картану [136, 137], мы должны отказаться от этой точки зрения. Вместо этого мы должны считать такие траектории геодезическими $[t(\lambda), x^j(\lambda)]$ в искривленном пространстве-времени. (Такой переход от одной точки зрения к другой показан на фиг. Б и В дополнения 1.6.) Поскольку «аффинно идущие» ньютоновские часы, переносимые пробными частицами, отсчитывают мировое время (или время, отличающееся от него числовым множителем, $\lambda = at + b$), уравнение движения (12.1) можно переписать в виде

Ньютоновское тяготение: перевод на язык искривленного пространства-времени

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^2x^j}{d\lambda^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0. \tag{12.3}$$

Сравнивая его с уравнением геодезических

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0,$$

можно найти значения коэффициентов связности:

$$\Gamma^j_{00} = \partial\Phi/\partial x^j; \text{ все остальные } \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \text{ равны нулю.} \tag{12.4}$$

Подставляя их в обычное выражение (11.12) для компонент тензора Римана, получаем (упражнение 12.1):

$$R^j_{0k0} = -R^j_{00k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\,\partial x^k}, \text{ все остальные } R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \text{ равны нулю.} \tag{12.5}$$

Наконец, уравнение источников для ньютоновского потенциала

$$\nabla^2\Phi \equiv \sum_j \Phi_{,jj} = 4\pi\rho \tag{12.6}$$

можно переписать с помощью «тензора кривизны Риччи»

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} \text{ (свертка } \mathbf{R}) \tag{12.7}$$

в геометрической форме (упражнение 12.2):

$$R_{00} = 4\pi\rho, \text{ все остальные } R_{\alpha\beta} \text{ равны нулю.} \tag{12.8}$$

Уравнение (12.4) для $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$, уравнение (12.5) для $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$, уравнение (12.8) для $R_{\alpha\beta}$ и уравнение геодезических несут в себе все содержание ньютоновской теории тяготения, переписанной на геометрическом языке.

Одно дело — быстро перечислить эти выкладки с компонентами. Совсем другое дело — полностью разобраться (как в абстрактном, так и в наглядном представлении) в смысле этих уравнений и в структуре ньютоновского пространства-времени. Достичь такого понимания и сравнить ньютоновское пространство-время с пространством-временем Эйнштейна — вот цель данной главы, основанной на работах Картана [136, 137], Траутмана [132] и Мизнера [119].

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Риманова кривизна ньютоновского пространства-времени

Выведите выражение (12.5) для $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ из выражения (12.4) для $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.

12.2. Уравнение поля Ньютона

Выведите из (12.5) с помощью (12.7) уравнение поля Ньютона в геометрической форме (12.8).

§ 12.2. РАССЛОЕНИЕ НЬЮТОНОВСКОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Галилей и Ньютон говорили о плоском, эвклидовом «абсолютном пространстве» и об «абсолютном времени»— двух совершенно разных и несвязанных понятиях. В абсолютном пространстве действовали ньютоновские законы физики, а абсолютное время текло само по себе. Не было и намека на то, что пространство и время могут представлять собой два аспекта единой сущности — искривленного «*пространства-времени*»,—пока Эйнштейн не объединил их в теории относительности, а Картан [104] не последовал его примеру в ньютоновской физике с целью более глубокого проникновения в идеи Эйнштейна.

Геометрия ньютоновского пространства-времени

Как же абсолютное пространство Галилея и Ньютона и их абсолютное время укладываются в «*ньютоновское пространство-время*» Картана? Ключом к пониманию этого является расслоение, вызываемое координатой мирового времени t.

«Мировое время» как поле скаляра

Будем считать t функцией (скалярным полем), определенной в ньютоновском пространстве-времени раз и навсегда:

$$t = t(\mathscr{P}). \tag{12.9}$$

Без нее пространство-время не было бы ньютоновским, ибо t в той же мере присуще ньютоновскому пространству-времени, в которой метрика $\mathbf{g}$ присуща лоренцеву пространству-времени. Слоями пространства-времени являются сечения постоянного t — *пространственные сечения*, у каждого из которых одна и та же геометрическая структура — старое «абсолютное пространство».

Став на точку зрения Картана, зададимся вопросом, какую геометрию накладывает на каждое пространственное сечение окружающая геометрия пространства-времени. Данное пространственное сечение наделено галилеевыми координатами, о которых шла речь в § 12.1, с базисными векторами $\mathbf{e}_j = \partial/\partial x^j$; и в этом базисе коэффициенты связности обращаются в нуль: $\Gamma^j{}_{kl} = 0$ [ср. урав-

нение (12.4)]. Следовательно, *геометрия каждого пространственного сечения абсолютно плоская.*

Пространственные сечения с эвклидовой геометрией

Согласно старой точке зрения, «абсолютное пространство» по своей геометрии является эвклидовым, а галилеевы координаты — декартовыми. На языке Картана это можно выразить так: каждое пространственное сечение ($t = \text{const}$) не только плоско, а его галилеевы координаты не только обладают нулевыми коэффициентами связности, но *каждое пространственное сечение наделено к тому же трехмерной метрикой и базис его галилеевой системы координат ортонормирован:*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (\partial/\partial x^i) \cdot (\partial/\partial x^j) = \delta_{ij}. \tag{12.10}$$

Кривизна проявляется в пространстве-времени, а не в пространственных сечениях

Если пространственные сечения на самом деле такие плоские, то откуда берутся кривизна и отклонение геодезических? Они суть свойства *пространства-времени*. Перенесем параллельно вектор по замкнутому контуру, целиком лежащему в пространственном сечении; он возвратится в исходную точку, не изменившись. Но перенесем его вперед во времени на Δt, к северу в пространстве на Δx^k, назад во времени на $-\Delta t$ и в исходную точку к югу на $-\Delta x^k$; он возвратится, изменившись на

$$\delta \mathbf{A} = -\mathscr{R}\left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t}, \Delta x^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \mathbf{A};$$

т. е.

$$\delta A^0 = 0, \quad \delta A^j = -R^j_{0k} A^0 (\Delta t)(\Delta x^k) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} A^0 (\Delta t)(\Delta x^k). \tag{12.11}$$

Геодезические пространственного сечения (эвклидовы прямые линии), которые вначале были параллельными, остаются параллельными всегда. Но геодезические пространства-времени (траектории свободно падающих частиц), которые вначале были параллельными, впоследствии расталкиваются и стягиваются кривизной пространства-времени:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n} + \mathscr{R}(\mathbf{n}, \mathbf{u})\,\mathbf{u} = 0,$$

или, эквивалентным образом, в галилеевых координатах:

$$n^0 = dn^0/dt = 0 \text{ вначале } \Rightarrow n^0 = 0 \text{ всегда}, \tag{12.12а}$$

$$\frac{d^2 n^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} n^k = 0 \tag{12.12б}$$

(см. дополнение 12.1 и упражнение 12.3).

УПРАЖНЕНИЕ

12.3. Вывод отклонения геодезических

Составьте третью колонку в дополнении 11.4, содержащую «геометрический анализ» в компонентных обозначениях с использованием галилеевых коэффициентов связности (12.4) ньютоновского пространства-времени. Это поможет вам глубже усвоить параллель между геометрическим анализом и старым ньютоновским анализом.

§ 12.3. ГАЛИЛЕЕВЫ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Существование и структура лоренцева пространства-времени специальной теории относительности совершенно не зависят от какой бы то ни было системы координат. Но особое свойство его геометрии (нулевая кривизна) позволяет ввести специальный класс координат (лоренцевы координаты), которые особым образом связаны с точками пространства-времени:

$$(\partial/\partial x^\alpha)\cdot(\partial/\partial x^\beta) = \eta_{\alpha\beta} \text{ повсюду.}$$

Изучая эти специальные системы координат и соотношения между ними (преобразования Лоренца), мы много узнаем о структуре самого пространства-времени (нарушение одновременности, лоренцево сокращение, замедление времени, ...).

Определение галилеевых координат

Аналогичным образом можно поступить и в ньютоновском пространстве-времени. Особые свойства его геометрии (изучаемые в абстрактном виде в дополнении 12.4) позволяют ввести специальные координаты (галилеевы координаты), которые особым образом связаны с событиями пространства-времени:

$$x^0(\mathcal{P}) = t(\mathcal{P}),$$

$$(\partial/\partial x^j)\cdot(\partial/\partial x^k) = \delta_{jk},$$

$$\Gamma^j{}_{00} = \Phi_{,j} \text{ для некоторого скалярного поля } \Phi,$$
$$\text{а все остальные } \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \text{ обращаются в нуль.}$$

Чтобы глубже понять структуру ньютоновского пространства-времени, изучим соотношения между этими галилеевыми системами координат.

Принципиальный вопрос: Как можно сначала записать в галилеевых координатах законы тяготения и свойства пространства-времени (§ 12.1), а затем уж (данный параграф) прийти к пониманию природы этой системы координат и ее неединственности? Ответ (слегка видоизмененная цитата из § 3.1): «Как неоднократно подчеркивал Анри Пуанкаре, в этой и других областях науки уже устарел принцип, утверждающий: «Прежде, чем излагать, дай определение используемым понятиям». Все физические

законы и теории, в том числе и ньютоновские законы тяготения, обладают тем глубоким и трудноуловимым свойством, что в них как дается определение используемым понятиям (здесь галилеевы координаты), так и делаются утверждения о них».

Ньютоновские законы тяготения, записанные в галилеевой системе координат

$$x^0 = t,\ (\partial/\partial x^j)\cdot(\partial/\partial x^k) = \delta_{jk},$$

делают утверждение «$\Gamma^i{}_{00} = \Phi,_i$, а все остальные $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$» о геометрии пространства-времени. Это утверждение в свою очередь дает информацию о соотношениях между различными галилеевыми системами. Пусть дана одна галилеева система $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$; попробуем найти преобразование координат самого общего вида, приводящее к другой галилеевой системе $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$. Имеются следующие ограничения: 1) $x^{0'} = x^0 = t$ (обе временные координаты должны представлять собой мировое время); 2) при фиксированном t (т. е. в фиксированном пространственном сечении) обе совокупности пространственных координат должны быть эвклидовыми, т. е. они должны быть связаны поворотом и трансляцией:

$$x^{j'} = A_{j'k}x^k + a^{j'}, \qquad (12.13а)$$

($a^{j'}$ — трансляция; $A_{j'k}$ — матрица вращения, т. е. $A_{j'l}A_{k'l} = \delta_{j'k'}$)

$$x^k = A_{j'k}x^{j'} - a^k, \text{ где } a^k \equiv A_{j'k}a^{j'}. \qquad (12.13б)$$

Априори поворот и трансляция могут быть разными на разных пространственных сечениях: $A_{j'k} = A_{j'k}(t)$ и $a^j = a^j(t)$; но 3) на них накладывается ограничение — специальный вид коэффициентов связности. Задавшись коэффициентами связности в старой системе координат, найдем их значения в новой системе. Результат имеет вид (упражнение 12.4)

$$\Gamma^{j'}{}_{0'k'} = \Gamma^{j'}{}_{k'0'} = A_{j'l}\dot{A}_{k'l} \text{ (приводит к «силам Кориолиса»)},$$

$$\Gamma^{j'}{}_{0'0'} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^{j'}} + A_{j'k}(\ddot{A}_{l'k}x^{l'} - \ddot{a}^k); \qquad (12.14)$$

($\frac{\partial\Phi}{\partial x^{j'}}$ — «центробежные силы»; $\ddot{a}^k$ — «силы инерции»)

все остальные $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}$ равны нулю. (Везде принято «эвклидово» правило суммирования: по повторяющимся индексам производится суммирование, даже если оба они стоят внизу; точкой обозначена производная по времени.) Новые коэффициенты связности имеют

стандартный галилеев вид (12.4) тогда и только тогда, когда

$$\dot{A}_{j'k}=0, \quad \Phi'=\Phi-\ddot{a}^k x^k+\text{const}. \tag{12.15}$$

ньютоновский потенциал в новой системе координат

ньютоновский потенциал в старой системе координат

Преобразования, связывающие галилеевы системы координат

Эти результаты можно сформулировать словами: любые две галилеевы системы координат связаны 1) не зависящим от времени поворотом пространственной решетки (один и тот же поворот на каждом пространственном сечении) и 2) зависящей от времени трансляцией пространственной решетки (в разных пространственных сечениях трансляции могут *отличаться*):

$$x^{j'}=A_{j\ k}x^k+a^{j'}(t). \tag{12.16}$$

постоянны зависят от времени

Ньютоновский потенциал зависит от выбора галилеевой системы координат

Ньютоновский потенциал не есть функция, определенная в пространстве-времени и существующая там независимо от систем координат. (Не существует независящего от координат метода ее измерения.) Напротив, его существование зависит от конкретного выбора галилеевых координат; если мы переходим к другим координатам с помощью соотношений (12.16), то Φ меняется:

$$\Phi'=\Phi-\ddot{a}^k x^k. \tag{12.17}$$

[Зато совершенно независимо от координат существуют мировое время t ($\mathscr{P}$) и ковариантная производная ∇.]

Определение абсолютных галилеевых координат

Если бы все вещество во Вселенной было заключено в конечной области пространства и окружено пустотой («островная Вселенная»), то можно было бы наложить глобальное граничное условие

$$\Phi\to 0 \text{ при } r\equiv(x^k x^k)^{1/2}\to\infty. \tag{12.18}$$

Это привело бы к выделению подкласса галилеевых координат (*абсолютных* галилеевых координат) с единым общим ньютоновским потенциалом. Преобразование от одной абсолютной галилеевой системы координат к другой происходит по закону

Преобразования, связывающие абсолютные галилеевы системы координат

$$x^{j'}=A_{j'k}x^k \quad + \quad a^{j'} \quad + \quad v\cdot t \tag{12.19}$$

постоянный поворот

постоянное смещение

постоянная скорость

(«галилеево преобразование»). *Однако* 1) никакие локальные измерения никогда не позволят отличить эти абсолютные галилеевы системы координат от более широкого класса галилеевых систем (чтобы обнаружить отличие, необходимо проинтегрировать локально измеримую величину $\Phi_{,j}=\Gamma^j{}_{00}$ до бесконечности), а

2) астрономические данные противоречат тому, что реальный мир представляет собой остров материи, окруженный пустотой.

Полезно провести сравнение между галилеевыми координатами и ньютоновским пространством-временем, описанным выше, лоренцевыми координатами и пространством-временем Минковского специальной теории относительности и координатами в общем случае и эйнштейновским пространством-временем общей теории относительности (см. дополнения 12.2 и 12.3).

УПРАЖНЕНИЯ

12.4. Коэффициенты связности для вращающихся ускоренных координат

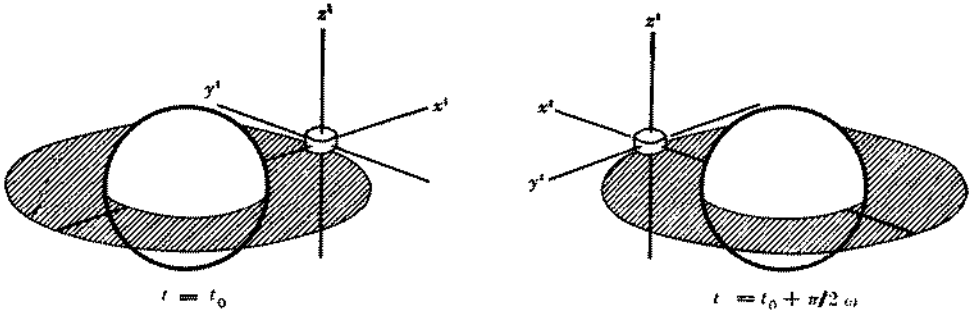
Исходя из выражения (12.4), для коэффициентов связности галилеевой системы координат $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$, выведите выражения (12.14) для коэффициентов связности системы координат $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$, определяемой соотношениями (12.13). Сделав это, убедитесь, что условия (12.15) необходимы и достаточны для того, чтобы $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$ были галилеевыми.

12.5. Лифт Эйнштейна

Используя формализм этой главы, рассмотрите «лифт Эйнштейна», т. е. эквивалентность тяготения и ускорения системы отсчета. В каких отношениях тяготение эквивалентно ускорению, а в каких нет?

12.6. Отклонение геодезических у Земли

Орбитальная лаборатория с людьми на борту выведена на круговую орбиту вокруг Земли [радиус орбиты r_0, угловая скорость $\omega = (M/r_0^3)^{1/2}$ — почему?]. Космонавт выбрасывает пакет с мусором и наблюдает, как он движется вдоль своей геодезической. Он следит за движением пакета по отношению к (негалилеевым)

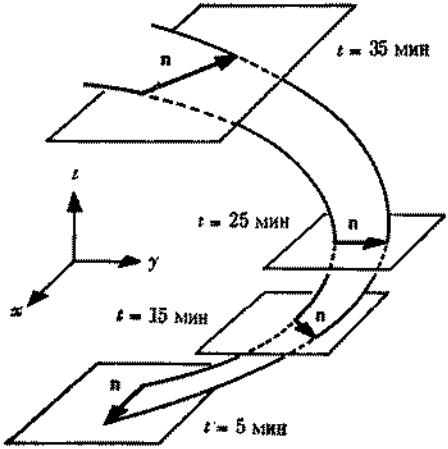


ФИГ. 12.1
Система координат, связанная с орбитальной лабораторией, движущейся по круговой орбите вокруг Земли.

пространственным координатам $\{x^{j'}(\mathscr{P})\}$, которые (фиг. 12.1) 1) эвклидовы в каждый момент мирового времени $(\partial/\partial x^{j'})\cdot(\partial/\partial x^{k'}) = \delta_{j'k'}$, 2) начало которых находится в центре лаборатории, 3) у которых $\partial/\partial x'$ направлен от Земли, а 4) $\partial/\partial x'$ и $\partial/\partial y'$ лежат в плоскости орбиты. Воспользовавшись уравнением отклонения геодезических, рассчитайте движение пакета с мусором в этой системе координат. Проверьте ответ, рассмотрев кеплеровские орбиты лаборатории и мусора. *Указания.* 1. Найдите $R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}$ в этой системе координат простым преобразованием тензорных компонент. 2. Используя соотношения (12.14), найдите $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}$ в центре лаборатории (т. е. на опорной геодезической).

Дополнение 12.1. ОТКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В НЬЮТОНОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Система координат, в которой проводятся выкладки: галилеевы пространственные координаты x^j и координата мирового времени t. Общий вид уравнения в компонентах



$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda} = 0.$$

Условия, специфичные для данной процедуры: пусть у всех частиц часы (аффинные параметры) нормированы таким образом, что показывают мировое время $\lambda = t$. Это означает, что разделяющий вектор

$$n^\alpha = (\partial x^\alpha/\partial n)_\lambda$$

между геодезическими имеет нулевую временную компоненту $n^0 = 0$, т.е. на абстрактном языке

$$\langle \mathbf{d}t, \mathbf{n}\rangle = t_{,\alpha}n^\alpha = n^0 = 0;$$

на геометрическом языке это означает, что $\mathbf{n}$ лежит в пространственном сечении (на поверхности постоянного значения t).

Вычисление ковариантной производной:

$$\frac{Dn^\alpha}{D\lambda} = \frac{dn^\alpha}{d\lambda} + \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}_{0,\ \text{если}\ \beta\neq 0]}\underbrace{n^\beta}_{[0,\ \text{если}\ \beta\ \text{не пространственный индекс}\ (n^0=0)}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dn^\alpha}{d\lambda},$$

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d(Dn^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} + \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}_{0,\ \text{если}\ \beta\neq 0]}\underbrace{\frac{dn^\beta}{d\lambda}}_{[0,\ \text{если}\ \beta\ \text{не пространственный индекс}}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d(Dn^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} = \frac{d^2n^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d^2n^\alpha}{dt^2}.$$

[поскольку $\lambda = t$

Вычисление приливных ускорений:

$R^0{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=0$, поскольку отличны от нуля лишь компоненты $R^j{}_{0k0}$ и $R^j{}_{00k}$;

$$\underbrace{R^j{}_{\beta\gamma\delta}}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=R^j{}_{0k0}\frac{dt}{d\lambda}n^k\frac{dt}{d\lambda}=R^j{}_{0k0}n^k=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\,\partial x^k}n^k.$$

↑ — [0, если γ не пространственный индекс

[если γ пространственный индекс, то отличны от нуля лишь при $\beta=\delta=0$

Получающееся в результате уравнение отклонения геодезических:

$$\frac{d^2n^0}{dt^2}=0\quad\left(\begin{array}{l}\text{согласуется с результатом, что повсюду } n^0=0,\\ \text{вытекающим из выбранного для всех частиц } \lambda=t\end{array}\right),$$

$$\frac{d^2n^j}{dt^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\,\partial x^k}n^k=0\quad\left(\begin{array}{l}\text{согласуется с результатом ньютоновской процедуры}\\ \text{в дополнении 11.4; см. также упражнение 12.3}\end{array}\right)$$

Дополнение 12.2. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ НЬЮТОНА, ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ МИНКОВСКОГО И ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ЭЙНШТЕЙНА: СРАВНЕНИЕ И ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ

Вопрос	Пространство-время Ньютона	Пространство-время Минковского (специальная теория относительности)	Пространство-время Эйнштейна (общая теория относительности)
Какой геометрической структурой пространство-время обладает априори?	1. Функцией мирового времени t 2. Ковариантной производной ∇ 3. Пространственной метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$; но метрику пространства-времени определить невозможно (упражнение 12.10)	Плоской метрикой пространства-времени (нулевой римановой кривизной)	Метрикой пространства-времени
Какие существуют выделенные системы координат?	1. Галилеевы координаты в общем виде 2. Абсолютные галилеевы координаты в островной Вселенной (этот случай здесь не рассматривается)	Лоренцевы координаты	В общем случае выделенных систем координат нет (хотя в особых случаях при наличии симметрии появляются особые выделенные координаты)

Продолжение

Вопрос	Пространство-время Ньютона	Пространство-время Минковского (специальная теория относительности)	Пространство-время Эйнштейна (общая теория относительности)
Что нужно для того, чтобы можно было выбрать конкретную выделенную систему координат?	1. Одна пространственная ориентация — одна и та же во всем пространстве-времени (три угла Эйлера) 2. Произвольная мировая линия начала пространственных координат (три функции времени)	1. Одна пространственная ориентация — одна и та же во всем пространстве-времени (три угла Эйлера) 2. Положение начала системы координат (четыре числа) 3. Скорость начала пространственных координат (три числа)	Все четыре функции точки $x^\alpha(\mathcal{P})$
При каких условиях определено высказывание: «$\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ одновременны»?	В самом общем случае; это есть геометрическое понятие, не зависящее от наличия координат	Лишь после того, как выбрана лоренцева система, «одновременность» зависит от скорости системы	Лишь после того, как произвольным образом выбрана временная координата
При каких условиях определено высказывание: «$\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ имеют место в одной и той же точке пространства»?	Лишь после того, как выбрана галилеева система координат	Лишь после того, как выбрана лоренцева система координат	Лишь после того, как произвольным образом выбраны пространственные координаты
При каких условиях определено высказывание: «$\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в разных событиях направлены в одну и ту же сторону»?	Только если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — оба пространственные векторы ($\langle dt, \mathbf{u}\rangle = \langle dt, \mathbf{v}\rangle = 0$; или они произвольны, но лежат в одном и том же пространственном сечении; или существует выделенная траектория, соединяющая точки их расположения, вдоль которой их можно сравнить с помощью параллельного переноса	Всегда	Только если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ расположены в событиях, бесконечно близких друг к другу; или существует выделенная траектория (например, единственная геодезическая), соединяющая точки их расположения, вдоль которой их можно сравнить с помощью параллельного переноса
При каких условиях определено «инвариантное расстояние между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$»?	Лишь тогда, когда $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ принадлежат одному и тому же пространственному сечению	Всегда	Только если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ достаточно близки друг к другу; или существует единственная выделенная мировая линия (например, геодезическая), которая их соединяет и вдоль которой можно измерить расстояние

Дополнение 12.3. НЬЮТОНОВСКОЕ ТЯГОТЕНИЕ В ФОРМУЛИРОВКЕ КАРТАНА И ЭЙНШТЕЙНОВСКОЕ ТЯГОТЕНИЕ: СРАВНЕНИЕ И ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЕ

Свойство	Ньютон — Картан	Эйнштейн
Идея вкратце (формулировки принципа эквивалентности, охватывающие разный круг явлений)	Законы движения свободных частиц в локальной, свободно падающей, невращающейся системе совпадают с ньютоновскими законами движения, выраженными в галилеевой системе без тяготения	Законы физики в локальной, свободно падающей, невращающейся системе совпадают с законами физики, сформулированными в специальной теории относительности в лоренцевой системе
Идея в еще более краткой формулировке	Механика точек проста в локально инерциальной системе отсчета	Все просто в локально инерциальной системе отсчета
Следствие (проверенное в эксперименте Ролла — Кроткова — Дикке с точностью 10^{-11})	Пробные частицы различного состава, находящиеся вначале в одном и том же месте и имеющие одну и ту же начальную скорость, следуют вдоль одной и той же мировой линии (определение геодезической)	Пробные частицы различного состава, находящиеся вначале в одном и том же месте и имеющие одну и ту же начальную скорость, следуют вдоль одной и той же мировой линии (определение геодезической)
Еще одно следствие	В каждой локальной области существует локальная система отсчета («свободно падающая система»), в которой все геодезические прямолинейны (все $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=0$)	В каждой локальной области существует локальная система отсчета («свободно падающая система»), в которой все геодезические прямолинейны (все $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=0$)
Следствие того, каким образом лучи света распространяются в реальном физическом мире	Не рассматривается или не принимается во внимание. Имеют ли все световые лучи одинаковую скорость? Зависит ли скорость от движения источника? Зависит ли скорость от движения наблюдателя? Можно ли двигаться настолько быстро, чтобы догнать луч света? Никакой удовлетворительной позиции по этим вопросам	Пространство-время всегда и везде имеет локально лоренцев характер
Основные особенности структуры пространства-времени	Расслаивается на пространственноподобные сечения; геометрия в каждом сечении эвклидова; каждое сечение характеризуется значением мирового времени (параметра геодезических); смещение одного пространственного сечения по отношению к другому не конкретизируется; не существует такого понятия, как пространственно-временной интервал	Никакого расслоения. Между каждыми двумя близлежащими событиями определен интервал; пространство-время везде имеет локально лоренцев характер, причем одна локальная система (заданные временная и пространственные оси) ничем не хуже другой (другие временная и пространственные оси); скорее «однородное», чем расслоенное

Продолжение

Свойство	Ньютон — Картан	Эйнштейн
Структура, выраженная на математическом языке	Есть $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, но нет метрики пространства-времени $g_{\mu\nu}$; $\Gamma^{t}_{00} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^t}$ $(t = 1,2,3)$; все остальные $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ равны нулю	$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ существуют не независимо, все они определяются из соотношения $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)$ («метрическая теория тяготения»).

§ 12.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ, СВОБОДНАЯ ОТ КООРДИНАТ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

Основная цель данной главы состоит в том, чтобы переформулировать теорию тяготения Ньютона на геометрическом, свободном от координат языке. Мы достигли этого выше при активном использовании особого класса координатных систем — галилеевых координат. Перейти от галилеевых координат на язык, совершенно не связанный ни с какими координатами, в принципе совсем несложно. Нужно просто перейти от индексных обозначений к абстрактным обозначениям.

Пример. Переформулируем на свободном от координат языке условие $\Gamma^{0}{}_{\alpha\beta} = 0$ того, что координаты галилеевы.

Решение. Пишем $\Gamma^{0}{}_{\alpha\beta} = -\langle \nabla_{\beta}\mathbf{d}t, \mathbf{e}_{\alpha}\rangle$; обращение этой величины в нуль при всех α означает, что $\nabla_{\beta}\mathbf{d}t = 0$ для всех β, откуда в свою очередь следует, что $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{d}t = 0$ для всех $\mathbf{u}$, т. е. *градиент мирового времени ковариантно постоянен.*

Свободные от координат геометрические аксиомы ньютоновской теории тяготения

При помощи аналогичной процедуры можно сделать ряд утверждений о ньютоновском пространстве-времени, которые никак не связаны с координатами (дополнение 12.4) и совершенно эквивалентны теории тяготения Ньютона в ее классическом, негеометрическом варианте. Эти геометрические утверждения могут быть выведены из классической теории Ньютона (упражнение 12.7); если эти геометрические утверждения принять за аксиомы, то из них можно вывести классическую теорию Ньютона (упражнение 12.8).

УПРАЖНЕНИЯ

12.7. От Ньютона к Картану

Выведите геометрические аксиомы (первый раздел дополнения 12.4) из классических аксиом теории Ньютона (последний раздел дополнения 12.4). *Рекомендуемая процедура:*

Проверьте каждую из геометрических аксиом с помощью выкладок в галилеевой системе координат. Воспользуйтесь выкладками и результатами § 12.1.

12.8. От Картана к Ньютону

Из геометрических аксиом теории Ньютона (первый раздел дополнения 12.4) выведите классические аксиомы (последний раздел дополнения 12.4). *Рекомендуемая процедура*:

1. В некотором событии $\mathcal{P}_0$ выберите три ортонормированных пространственных базисных вектора ($\mathbf{e}_j$, причем $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$). Перенесите каждый из них параллельно во все остальные события пространства-времени, воспользовавшись произвольными траекториями.

2. Используя условие $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{n})\,\mathbf{e}_j = 0$ для всех $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ (аксиома 3) и соображения, аналогичные изложенным в § 11.5, докажите, что а) получившиеся в результате векторные поля $\mathbf{e}_j$ не зависят от произвольных траекторий, вдоль которых осуществлялся перенос, б) для этих полей $\nabla \mathbf{e}_j = 0$ и в) $[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = 0$.

3. Выберите произвольную «линию времени», которая пересекает каждое пространственное сечение (сечение постоянного значения t) один и только один раз. В качестве параметра на ней возьмите t, а ее касательный вектор выберите в качестве базисного вектора $\mathbf{e}_0$ в каждом событии этой линии. Разнесите параллельно каждый $\mathbf{e}_0$ по соответствующему ему пространственному сечению вдоль произвольных траекторий.

4. С помощью аксиомы 4 покажите, что получившееся в результате векторное поле не зависит от использованных траекторий переноса; покажите также, что такое построение обеспечивает $\nabla_j \mathbf{e}_0 = \nabla_0 \mathbf{e}_j = 0$.

5. Покажите, что $[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = 0$ для любых пар из четырех полей базисных векторов, откуда сделайте вывод, что существует система координат («галилеевы координаты»), в которой $\mathbf{e}_\alpha = \partial/\partial x^{\underline{\alpha}}$ (см. § 11.5 и упражнение 9.9).

6. Покажите, что в этой системе координат повсюду $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ (пространственные координаты эвклидовы) и единственными отличными от нуля компонентами коэффициентов связности являются $\Gamma^j{}_{00}$; при этом будут полезны аксиомы 6 и 2.

7. Из свойства самосопряженности оператора кривизны Якоби (аксиома 7) покажите, что $R^j{}_{0k0} = R^k{}_{0j0}$; покажите, что, выраженное через коэффициенты связности, это свойство гласит: $\Gamma^j{}_{00,k} = \Gamma^k{}_{00,j}$; отсюда выведите, что существует потенциал Φ, такой, что $\Gamma^j{}_{00} = \Phi_{,j}$.

8. Покажите, что геометрическое уравнение поля (аксиома 5) сводится к уравнению Пуассона $\nabla^2\Phi = 4\pi\rho$.

9. Покажите, что уравнение геодезических для свободного падения (аксиома 8) сводится к ньютоновскому уравнению движения $d^2x^j/dt^2 + \Phi_{,j} = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

12.9. Пространственная метрика не противоречит другим аксиомам

Покажите, что геометрические аксиомы 1, 2 и 3 дополнения 12.4 позволяют ввести пространственную метрику, удовлетворяющую аксиоме 6. *Указание*: Выберите в некотором событии произвольный пространственный базис $\{\mathbf{e}_j\}$. *Положите по определению*, что он ортонормирован, т. е. $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \equiv \delta_{jk}$. Разнесите этот базис по всему пространству-времени тем же способом, как это было сделано в пункте 1 упражнения 12.8. Положите для этого базиса по определению, что $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \equiv \delta_{jk}$ повсюду в пространстве-времени. После этого докажите, что получившаяся в результате метрика удовлетворяет условию совместности аксиомы 6.

12.10. Метрика пространства-времени не совместима с другими аксиомами

Покажите, что в ньютоновском пространстве-времени невозможно ввести невырожденную метрику $\mathbf{g}$, определенную на всех векторах и совместимую с ковариантной производной в том смысле, что

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{p}) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n}, \mathbf{p}) + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{p}). \tag{12.20}$$

Примечание. Чтобы доказать это, требуется знать материал гл. 8 или гл. 13; поэтому, прежде чем приступить к доказательству, изучите одну из этих глав. *Указание.* Предположите, что такое $\mathbf{g}$ существует. Воспользовавшись методами упражнения 12.8, покажите, что в галилеевой системе координат пространственные компоненты g_{jk} не зависят от положения в пространстве-времени. Отсюда, использовав вид $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ в галилеевых координатах, докажите, что R_{j0k0} и $-R_{0jk0}$ не совпадают — результат, противоречащий симметрии тензора Римана [соотношение (8.45)] в многообразии, в котором метрика совместима с ковариантной производной.

Дополнение 12.4. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА: ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА В СРАВНЕНИИ С КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКОЙ

Геометрическая формулировка

Теория тяготения Ньютона и свойства ньютоновского пространства-времени могут быть выведены из следующей совокупности аксиом. (Вывод см. в упражнении 12.8.)

1. Существует функция t, называемая «мировым временем», и симметричная ковариантная производная ∇ (с вытекающими отсюда геодезическими, законом параллельного переноса, оператором кривизны и т.д.).
2. 1-форма $\mathbf{d}t$ ковариантно постоянна, т. е.

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{d}t = 0 \text{ для всех } \mathbf{u}.$$

[Следствие: если $\mathbf{w}$ — поле пространственного вектора (т. е. $\mathbf{w}$ повсюду лежит на поверхности постоянного значения t, т. е. повсюду $\langle \mathbf{d}t, \mathbf{w}\rangle = 0$), то при любом $\mathbf{u}$ вектор $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}$ тоже пространственный:

$$\langle \mathbf{d}t, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}\rangle = \nabla_{\mathbf{u}}\underbrace{\langle \mathbf{d}t, \mathbf{w}\rangle}_{0 \text{ всегда}} - \underbrace{\langle \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{d}t, \mathbf{w}\rangle}_{0 \text{ всегда}} = 0.]$$

3. Пространственные векторы не изменяются при параллельном переносе по бесконечно малому замкнутому контуру, т. е. $\mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{n})\,\mathbf{w} = 0$ при $\mathbf{w}$ пространственном для всех $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$.
4. Ни один вектор не изменяется при параллельном переносе по бесконечно малому замкнутому пространственному контуру, т. е.

$$\mathscr{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \text{ для любых пространственных } \mathbf{v} \text{ и } \mathbf{w}.$$

5. Тензор кривизны Риччи $R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$ имеет вид

$$\mathbf{Rc} = 4\pi\rho\,\mathbf{d}t \otimes \mathbf{d}t,$$

где ρ — плотность массы
6. Существует метрика «·», определенная на одних только пространственных векторах, которая совместима с ковариантной производной в следующем смысле: для любых пространственных $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ и для любого $\mathbf{u}$

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})\cdot\mathbf{v} + \mathbf{w}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}).$$

(*Примечание.* Аксиомы 1, 2 и 3 являются гарантией, что пространственная метрика может существовать, см. упражнение 12.9.)
7. Оператор кривизны Якоби $\mathscr{J}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$, определяемый для произвольных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ соотношением

$$\mathscr{J}(\mathbf{u}, \mathbf{n})\,\mathbf{p} = \frac{1}{2}[\mathscr{R}(\mathbf{p}, \mathbf{n})\,\mathbf{u} + \mathscr{R}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\,\mathbf{n}],$$

является *самосопряженным*, когда действует на пространственные векторы, т. е.

$$\mathbf{v}\cdot[\mathscr{J}(\mathbf{u}, \mathbf{n})\,\mathbf{w}] = \mathbf{w}\cdot[\mathscr{J}(\mathbf{u}, \mathbf{n})\,\mathbf{v}] \text{ для всех пространственных } \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ и произвольных } \mathbf{u}, \mathbf{n}.$$

8. «Идеальные линейки» отмеряют длины, численные значения которых задаются пространственной метрикой: «идеальные часы» отмеряют мировое время t (или отличающееся от него числовым множителем); «свободно падающие частицы» движутся по геодезическим ∇. [*Примечание.* Эти утверждения можно считать определением «идеальных линеек», «идеальных часов» и «свободно падающих частиц». Более полная теория (т. е. общая теория относительности, см. § 16.4) заранее предсказывает, будут ли данные часы или линейка идеальными и является ли данная реальная частица свободно падающей.]

Примечание. Другая, эквивалентная система аксиом приведена в работе [32].

Классическая формулировка

Следующие классические аксиомы эквивалентны аксиомам, приведенным выше.

1. Существуют мировое время t, совокупность декартовых пространственных координат x^j (называемых «галилеевыми координатами») и ньютоновский гравитационный потенциал Φ.

2. Плотность массы ρ создает ньютоновский потенциал согласно уравнению Пуассона

$$\nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\,\partial x^j} = 4\pi\rho.$$

3. Уравнение движения свободной частицы имеет вид

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} = 0.$$

4. «Идеальные линейки» отмеряют длины в галилеевых координатах; «идеальные часы» отмеряют мировое время.

§ 12.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ФИЗИКЕ: КРИТИКА

Необходимо сделать важное отступление.

«Каждая физическая величина должна описываться геометрическим объектом (независимо от наличия координат), а все законы физики должны выражаться в виде геометрических соотношений между этими геометрическими объектами». Эта точка зрения в физике, известная как *принцип всеобщей ковариантности*, пронизывает все достижения двадцатого столетия. Но приводит ли она к каким-либо ограничениям? Согласно одной точке зрения, восходящей к Кречману [118], нет, не приводит. Любую физическую теорию, записанную сначала в некоторой определенной системе координат, можно переформулировать на геометрическом, свободном от координат языке. Ньютоновская теория, имеющая эквивалентные геометрическую и классическую формулировки (дополнение 12.4), является хорошим примером. Следовательно, принцип всеобщей ковариантности нельзя использовать в качестве сита, с помощью которого можно было бы отсеять жизнеспособные теории от нежизнеспособных.

Принцип всеобщей ковариантности не приводит ни к каким ограничениям

Но существует и другая, довольно убедительная точка зрения. Она дает очень эффективный метод отбора в виде слегка измененного и немного более туманного принципа: «Природе нравятся теории, которые, будучи сформулированы на свободном от координат геометрическом языке, имеют простой вид» [1]). Согласно этому принципу, Природа должна любить общую теорию относительности и питать неприязнь к ньютоновской теории. Из всех теорий, которые физики могли когда-либо себе представить, общая теория относительности имеет самую простую и изящную геометрическую основу (три аксиомы: 1) существует метрика; 2) метрика подчиняется уравнению поля Эйнштейна $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$; 3) все законы физики, справедливые в специальной теории отно-

С точки зрения двадцатого века о теории судят по простоте ее геометрической формулировки

Теория тяготения Эйнштейна проста; теория Ньютона сложна

[1]) Следует признать, что этот принцип антропоморфичен: физикам двадцатого столетия нравятся такие теории, и они даже с успехом пользуются ими для объяснения данных наблюдений. А значит они должны нравиться и Природе!

сительности, справедливы в локально лоренцевых системах отсчета этой метрики). С другой стороны, какому физику придет в голову, проявляя дьявольское хитроумие, строить теорию на такой сложной геометрической основе, которой обладает ньютоновская теория?

С точки зрения физика девятнадцатого столетия, роли, безусловно, меняются. Он судит о простоте теорий по тому, как они выглядят в координатной формулировке. В галилеевых координатах теория Ньютона удивительно проста. Если же уравнения поля Эйнштейна (всего их десять!) выразить в виде дифференциальных уравнений для метрических коэффициентов в определенной системе координат, то они примут устрашающе сложный вид.

Геометрическая точка зрения двадцатого столетия господствует потому, что она лучше согласуется с данными наблюдений (см. гл. 38—40). И мы безоговорочно воспользуемся ею в гл. 17, чтобы сделать уравнение поля Эйнштейна как можно более убедительным.

13. РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ: МЕТРИКА — ОСНОВА ВСЕГО

Философия написана в этой великой книге
(под которой я подразумеваю Вселенную),
которая всегда открыта нашему взору, но которую нельзя понять,
если не научиться сначала понимать язык и толковать знаки,
которыми она писана; а знаки эти суть треугольники,
окружности и другие геометрические фигуры,
без которых человеку невозможно понять
ни единого слова в ней, без которых он блуждает
в темном лабиринте.

ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ

Эта глава целиком относится к курсу 2.
Необходимым подготовительным материалом для нее являются гл. 9—11.
Она нужна в качестве подготовительного материала для
1) второй половины гл. 14 (вычисление кривизны) и
2) подробностей, но не идеи гл. 15 (тождества Бианки).
Материал § 13.6 (собственная система отсчета) будет полезен во всех приложениях теории гравитации (гл. 18—40).

§ 13.1. НОВЫЕ ЧЕРТЫ ГЕОМЕТРИИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЛОКАЛЬНОЙ СПРАВЕДЛИВОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Свободно падающие частицы (геодезические) определяют и позволяют исследовать структуру пространства-времени. Пространство-время является искривленным. Тяготение есть проявление его кривизны. Все это прекрасно подходит и к ньютоновской теории тяготения, переформулированной Картаном на геометрическом языке. Но совершенно недопустимым является, однако, следующее следствие точки зрения Картана — Ньютона (гл. 12) — расслоение пространства-времени на отдельные сечения, при котором нельзя придать никакого смысла тому, насколько событие в одном сечении отстоит в пространстве-времени от события в другом сечении.

Ограничения, накладываемые на пространство-время специальной теорией относительности

Из всех основ физики наиболее твердо установленной следует считать специальную теорию относительности; из всех положений специальной теории относительности сильнее всего звучат следующие. 1. Пространство-время отнюдь не расслоено, а однородно и изотропно в любой достаточно малой области («локальной области»), такой, что гравитационные эффекты, вызывающие приливное воздействие («кривизна пространства-времени») пренебрежимо

малы. 2. Не существует таких локальных экспериментов, с помощью которых можно было бы отличить одну локально инерциальную систему отсчета от другой. 3. В каждой локально инерциальной системе отсчета скорость света имеет одно и то же значение. 4. Понятию разделения во времени невозможно придать не зависящий от системы координат смысл («никакого ньютоновского расслоения»). 5. Между любыми двумя близкими событиями существует не зависящий от системы отсчета и от координат пространственно-временной интервал («риманова геометрия»). 6. Пространство-время всегда и везде по своему характеру локально лоренцево («локально лоренцев характер римановой геометрии»).

Какая математика приводит ко всем этим физическим свойствам? Метрика; метрика, которая является локально лоренцевой (§ 13.2 и 13.6). Все остальное из нее следует. В частности, метрика разрушает слоистую структуру ньютоновского пространства-времени вместе с его гравитационным потенциалом и координатой мирового времени. Но остаются нетронутыми наиболее глубокие особенности ньютоновской теории тяготения: 1) принцип эквивалентности (воплощенный в описании свободного падения с помощью геодезических, § 13.3 и 13.4) и 2) кривизна пространства-времени (мерой которой являются приливные эффекты, § 13.5).

Метрика: аппарат, накладывающий ограничения

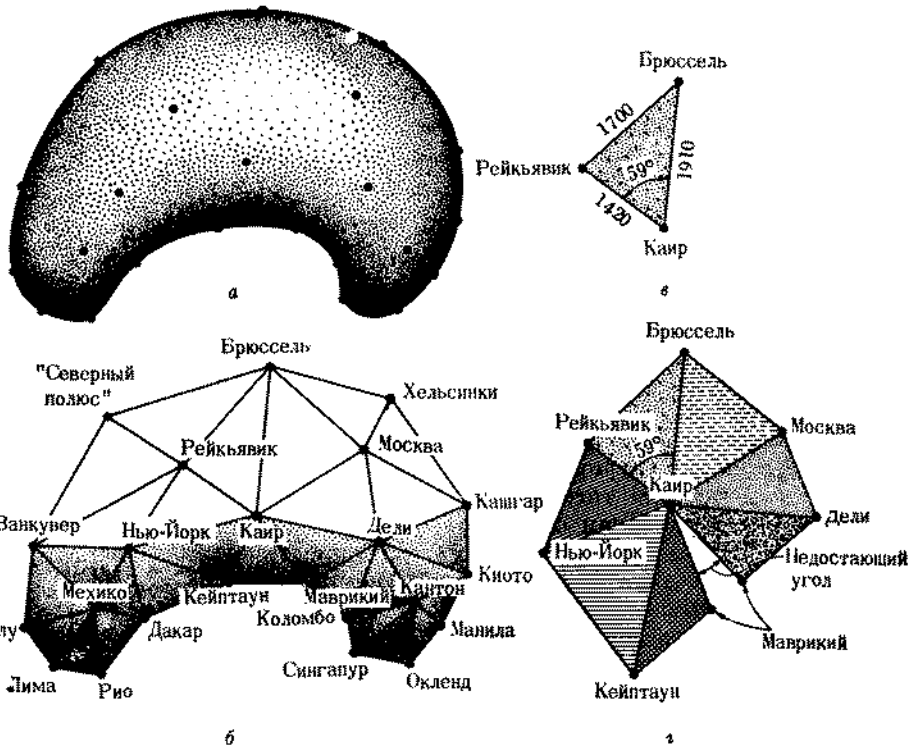
Весь небоскреб из векторов, форм, тензоров (гл. 9), геодезических, параллельного переноса, ковариантной производной (гл. 10) и кривизны (гл. 11) покоился до сих пор на разрушающемся фундаменте — на ньютоновской физике и законе геодезических, основанном на ньютоновской физике. Но как только вводится метрика, у небоскреба появляется новый фундамент без единой трещины. Необходимо внести только одно изменение: закон геодезических должен быть введен по-новому, релятивистским способом, основанным на метрике (§ 13.3 и 13.4). Оказавшись на фундаменте из метрики, кривизна пространства-времени приобретает ряд дополнительных и более сильных свойств (небоскреб надстраивается и заново отделывается), изучаемых в § 13.5 и в гл. 14 и 15; эти свойства почти неизбежно ведут к уравнению поля Эйнштейна.

§ 13.2. МЕТРИКА

Метрика пространства-времени, метрика искривленного пространства-времени, локально лоренцева метрика искривленного пространства-времени. Вот что лежит в основе геометрии пространства-времени в реальном физическом мире. Задержимся поэтому на некоторое время, чтобы вспомнить, что представляет собой «метрика» на трех различных языках.

Описание метрики на трех языках

На языке элементарной геометрии метрика представляет собой таблицу, в которой указаны значения интервалов между каждыми двумя событиями (дополнение 13.1 и фиг. 13.1). На языке коор-



ФИГ. 13.1.

Расстояния определяют геометрию. *а* — достаточно мощные приливные силы, приложенные к Земле, соответствующим образом деформировали ее и придали ей форму капли. *б* — эта капля аппроксимирована полиэдром, построенным из треугольников («скелетная геометрия»). Аппроксимацию можно сделать как угодно хорошей, взяв достаточно большое число треугольников достаточно малого размера. *в* — в пределах каждого треугольника геометрия является эвклидовой: задание длин трех сторон треугольника определяет все характерные черты этой фигуры, в том числе и указанный угол. *г* — треугольники, которые сходятся к данной вершине, будучи разложены на поверхности, не стыкуются. Недостающий угол служит мерой значения кривизны в данной вершине (в Каире) на поверхности Земли, имеющей форму капли. Сумма недостающих углов для всех вершин равна 4π. Эта «теорема Гаусса — Бонне» справедлива для любой фигуры с топологией 2-сферы; в случае простейшей фигуры — тетраэдра имеется четыре вершины, недостающий угол в каждой из которых составляет 180° (3 треугольника по 60° на треугольник дают недостающий угол 180°). Короче, форма данной капли в данном приближении скелетной геометрии определяется длинами 50 ее видимых ребер и длинами, допустим, еще 32 ребер, принадлежащих задней стороне фигуры, т. е. в целом длинами 82 ребер и ничем более («расстояния определяют геометрию»). «Метрика» указывает расстояния между всевозможными парами близких точек. Если в результате вулканической деятельности Рейкьявик поднимется, то расстояния между исландской столицей и близлежащими точками соответствующим образом увеличатся; расстояния снова позволят найти форму поверхности. И наоборот, то, что в районе Исландии на поверхности Земли нет огромного вздутия, то, что Земля не имеет форму капли, можно совершенно однозначно установить, проанализировав распределение расстояний между различными точками для достаточно хорошо распределенной совокупности точек, не опираясь ни на какие иные наблюдения, кроме измерения расстояний.

динат метрика есть совокупность десяти функций точки $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$, таких, что выражение

$$\Delta s^2 = -\Delta\tau^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)\,\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{13.1}$$

дает значение интервала между произвольным событием x^α и произвольным близким событием $x^\alpha + \Delta x^\alpha$. На языке абстрактной дифференциальной геометрии метрика является билинейной машиной $\mathbf{g} \equiv (\ldots \cdot \ldots)$, производящей число («скалярное произведение $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$») из двух касательных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Легко установить связь между абстрактным, машинным представлением и представлением в данной конкретной системе координат. Пусть смещение между двумя соседними точками представлено касательным вектором

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \Delta x^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \Delta x^\alpha (\partial/\partial x^\alpha).$$

В абстрактном представлении для интервала между двумя этими событиями имеем

$$\Delta s^2 \equiv \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{g}(\Delta x^\mu \mathbf{e}_\mu,\ \Delta x^\nu \mathbf{e}_\nu) = \Delta x^\mu \Delta x^\nu \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu,\ \mathbf{e}_\nu);$$

сравнение с координатным представлением [выражение (13.1)] позволяет написать

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu,\ \mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \tag{13.2}$$

Ковариантные компоненты метрики

(обычное выражение для нахождения компонент тензора).

Подобно тому как в современной дифференциальной геометрии на место старого понятия «дифференциала» df приходит понятие «дифференциальной формы» $\mathbf{d}f$ (дополнение 2.3, стр. 100), так и на место старого «линейного элемента»

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu \text{ (интервал между } x^\alpha \text{ и } x^\alpha + dx^\alpha) \tag{13.3}$$

Сравнение «линейного элемента» и «метрики как билинейной машины»

приходит билинейная машина («метрический тензор»)

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\,\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu. \tag{13.4}$$

Продукция на выходе этой машины $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$ при заданном векторе смещения на входе тождественно равна старому интервалу. Следовательно, $\mathbf{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$ представляет интервал неконкретизированного смещения; вводя $\boldsymbol{\xi}$ во входные каналы $\mathbf{d}s^2$, мы тем самым придаем определенное значение интервалу $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$ для данного определенного смещения.

В искривленном пространстве-времени с метрикой, так же как и в плоском пространстве-времени с метрикой (§ 2.5), каждому касательному вектору $\mathbf{u}$ соответствует своя 1-форма $\tilde{\mathbf{u}}$:

Метрика устанавливает соответствие между 1-формами и касательными векторами

$\mathbf{u}$ определяется так, что $\langle\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}\rangle \equiv \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v}$ (13.5)

[«представление одной и той же физической величины двумя различными способами — в виде вектора и в виде 1-формы»; «соответствующие представления» в виде тензора $\binom{1}{0}$ и в виде тензора $\binom{0}{1}$]. Пример: 1-форма $\tilde{\mathbf{u}}$, соответствующая базисному вектору $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\alpha$, имеет компоненты

$$u_\beta = \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_\beta \rangle \equiv \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = g_{\alpha\beta};$$

обычный способ нахождения u_β — определение (13.5) — [соотношение (13.2) — [поскольку $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\alpha$

таким образом,

$$g_{\alpha\beta}\omega^\beta \text{ есть 1-форма } \tilde{\mathbf{e}}_\alpha, \text{ соответствующая } \mathbf{e}_\alpha. \tag{13.6}$$

Так же как в плоском пространстве-времени (§ 3.2), в любой данный канал тензора можно наряду с вектором вводить 1-форму:

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{u}}, \sigma, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{S}(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{v}). \tag{13.7}$$

Опускание индексов

На компонентном языке это означает, что индексы тензора можно опускать с помощью ковариантных компонент метрики

$$S_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \mathbf{S}(\mathbf{e}_\alpha, \omega^\beta, \mathbf{e}_\gamma) =$$

[согласно определению $S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$

$$= \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{e}}_\alpha, \omega^\beta, \mathbf{e}_\gamma) = \mathbf{S}(g_{\alpha\mu}\omega^\mu, \omega^\beta, \mathbf{e}_\gamma) = g_{\alpha\mu}S^{\mu\beta}{}_\gamma. \tag{13.8}$$

[согласно соотношению (13.6)

В каждом событии базисные векторы $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ могут быть выбраны произвольным образом. Следовательно, соответствующие компоненты $g_{\alpha\beta}$ метрики довольно произвольны (но всегда симметричны: $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$). Однако смешанные компоненты $g^\alpha{}_\beta$ отнюдь не произвольны. В частности, из уравнений (13.5) и (13.7) следует

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle. \tag{13.9}$$

Смешанные и контравариантные компоненты метрики

Отсюда заключаем, что метрический тензор в смешанном представлении тождественно совпадает с единичной матрицей:

$$g^\alpha{}_\beta \equiv \mathbf{g}(\omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta) \equiv \langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta. \tag{13.10}$$

Эта особенность метрики в свою очередь сразу же фиксирует ее контравариантные компоненты:

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta} = g^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{13.11}$$

(«опускание индекса» у $g^{\alpha\mu}$)

т. е.

$$\| g^{\alpha\beta} \| \text{ есть матрица, обратная } \| g_{\alpha\beta} \|. \tag{13.12}$$

Поднятие индексов

Такое свойство обратимости позволяет нам с помощью $g^{\alpha\beta}$ обратить опускание тензорных индексов (т. е. поднимать индексы):

$$S^{\mu\beta}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}S^{\alpha\beta}{}_{\nu} = g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = g^{\mu\nu}S_{\nu}{}^{\beta}{}_{\gamma}. \tag{13.13}$$

Содержание двух последних абзацев можно кратко представить в следующем виде:

1) $g^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$;
2) $\| g^{\alpha\beta} \| = \| g_{\alpha\beta} \|^{-1}$;
3) тензорные индексы опускаются при помощи $g_{\alpha\beta}$;
4) тензорные индексы поднимаются при помощи $g^{\alpha\beta}$.

Метрика локально должна быть лоренцевой

Во всем этом формализме обращения с метрикой и перебрасывания индексов нельзя оставить без внимания один важный вопрос: как можно узнать, что метрика является локально лоренцевой, а не локально эвклидовой или локально еще какой-нибудь? Одним критерием (необходимым, но не достаточным!), безусловно, является размерность: локально лоренцево пространство-время должно иметь четыре измерения. (Напомним метод определения размерности, изложенный в § 1.2.) Ограничимся рассмотрением только четырехмерных многообразий. Что еще нужно потребовать? Нужно потребовать, чтобы в каждом событии $\mathcal{P}$ существовала ортонормированная система отсчета (ортонормированная совокупность базисных векторов $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$), в которой компоненты метрики имеют тот же вид, что и в плоском пространстве-времени:

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} \equiv (-1, 1, 1, 1) \text{ по диагонали.} \tag{13.14}$$

Проверить это нетрудно (упражнение 13.1). 1. Выберем времениподобный вектор $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} < 0$). Если таковых не имеется, то пространство-время не является локально лоренцевым. 2. Если же хоть один найден, то рассмотрим все ненулевые векторы $\mathbf{v}$, перпендикулярные $\mathbf{u}$. Если все они пространственноподобны ($\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0$), то пространство-время является локально лоренцевым. Если нет, то оно таковым не является.

УПРАЖНЕНИЯ

13.1. Проверка, является ли пространство-время локально лоренцевым

Докажите, что изложенная выше двухэтапная процедура проверки того, является ли пространство-время локально лоренцевым, верна; иными словами, докажите, что если эта процедура дает положительный ответ, то в интересующем нас событии существует ортонормированный базис с $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$, а если она дает отрицательный ответ, то такого базиса не существует.

13.2. Приобретение навыков в обращении с метрикой

В четырехмерном многообразии с координатами v, r, θ, ϕ задан линейный элемент (в старых обозначениях)

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)\, dv^2 + 2dvdr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

что соответствует метрике (в новых обозначениях)

$$\mathbf{ds}^2 = -(1-2M/r)\,\mathbf{dv}\otimes\mathbf{dv} + \mathbf{dv}\otimes\mathbf{dr} + \mathbf{dr}\otimes\mathbf{dv} + r^2(\mathbf{d\theta}\otimes\mathbf{d\theta} + \sin^2\theta\,\mathbf{d\phi}\otimes\mathbf{d\phi}),$$

где M — постоянная.

а. Найдите «ковариантные» компоненты $g_{\alpha\beta}$ и «контравариантные» компоненты $g^{\alpha\beta}$ метрики в этой системе координат. [*Ответ*: $g_{vv} = -(1 - 2M/r)$, $g_{vr} = g_{rv} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$; все остальные $g_{\alpha\beta}$ равны нулю;

$$g^{vr} = g^{rv} = 1,\ g^{rr} = (1-2M/r),\ g^{\theta\theta} = r^{-2},\ g^{\phi\phi} = r^{-2}\sin^{-2}\theta;$$

все остальные $g^{\alpha\beta}$ равны нулю.]

б. Определите скалярное поле t с помощью соотношения

$$t = v - r - 2M \ln[(r/2M) - 1].$$

Чему равны ковариантные и контравариантные компоненты (u_α и u^α) 1-формы $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{d}t$? Чему равен квадрат длины $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ соответствующего вектора? Покажите, что $\mathbf{u}$ времениподобен в области $r > 2M$. [*Ответ*: $u_v = 1$, $u_r = -1/(1-2M/r)$, $u_\theta = u_\phi = 0$; $u^v = -1/(1-2M/r)$, $u_r = 0$, $u^\theta = u^\phi = 0$; $\mathbf{u}^2 = -1/(1-2M/r)$.]

в. Найдите самый общий вид ненулевого вектора $\mathbf{w}$, ортогонального $\mathbf{u}$ в области $r > 2M$, и покажите, что он пространственноподобен. Отсюда сделайте вывод, что в области $r > 2M$ пространство-время является локально лоренцевым. [*Ответ*. Поскольку $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = w_\alpha u^\alpha = -w_v/(1 - 2M/r)$, w_v должно обращаться в нуль, но w_r, w_θ, w_ϕ произвольны и $\mathbf{w}^2 = (1 - 2M/r)\, w_r^2 + r^{-2} w_\theta^2 + r^{-2}\sin^{-2}\theta w_\phi^2 > 0$.]

2

УПРАЖНЕНИЯ

г. Пусть t, r, θ, ϕ — новые координаты в пространстве-времени. Найдите линейный элемент в этой системе координат. [*Ответ*: Это «шварцшильдовский» линейный элемент

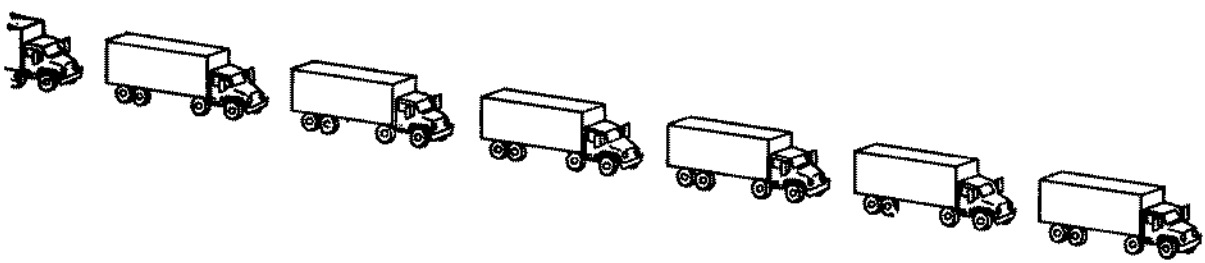
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2.\,]$$

д. Найдите ортонормированный базис, для которого $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$ в области $r > 2M$. [*Ответ*: $\mathbf{e}_{\hat{0}} \equiv (1-2M/r)^{-1/2}\,\partial/\partial t$, $\mathbf{e}_{\hat{r}} \equiv$ $\equiv (1-2M/r)^{1/2}\,\partial/\partial r$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}} \equiv r^{-1}\,\partial/\partial\theta$, $\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r\sin\theta)^{-1}\,\partial/\partial\phi$.]

Дополнение 13.1. КАК ИЗВЛЕЧЬ МЕТРИКУ ИЗ РАССТОЯНИЙ

Необработанные данные о расстояниях

Пусть форма земной поверхности описана так, как это изображено на фиг. 13.1 с помощью расстояний между какими-либо идентифицируемыми опорными точками: буями, кораблями, айсбергами, маяками, горными вершинами и флагами — всего между $n = 2\cdot10^7$ точками. Полное число расстояний, которые необ-



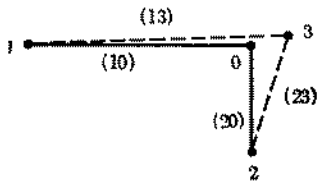
ходимо задать, составляет $n\,(n-1)/2 = 2\cdot10^{14}$. Если на каждой печатной странице размещать по 200 расстояний, то всего получится 10^{12} страниц по 6 г каждая, т. е. всего $6\cdot10^6$ т данных. Если все эти данные погрузить на 10^6 шеститонных грузовиков, и каждый грузовик будет проезжать мимо нас за 5 с, то чтобы перевезти все данные, потребуется $5\cdot10^6$ с, или 2 месяца непрерывного движения.

Первая обработка: оставляем лишь расстояния до ближайших точек

Расстояния между удаленными точками можно получить, сложив расстояния коротких элементарных участков маршрута. Сократим таблицу расстояний, задав лишь расстояния между каждой точкой и сотней других, ближайших к ней. Теперь мы имеем $100n = 2\cdot10^9$ расстояний, что составляет $2\cdot10^9/200 = 10^7$ страниц данных, или 60 т, или 10 грузовиков.

Вторая обработка: расстояния между ближайшими точками выражаем с помощью метрики

Будем считать, что поверхность Земли гладкая. Тогда в любой, достаточно ограниченной области геометрия является эвклидовой. Это обстоятельство приводит к замечательному следствию. Достаточно знать лишь несколько расстояний между ближайшими точками, чтобы иметь возможность определить все остальные расстояния между ближайшими точками. Расположим точку 2 так, чтобы точки 1, 0, 2 были вершинами прямоугольного треугольника; тогда $(12)^2 = (10)^2 + (20)^2$. Рассмотрим точку 3, близкую к 0. Положим по определению



$$x(3) = (13) - (10)$$

и

$$y(3) = (23) - (20).$$

Тогда расстояние (03) не нужно включать в число независимых данных; его можно вычислить по формуле [1])

$$(03)^2 = [x(3)]^2 + [y(3)]^2.$$

Аналогично для точки 4 и расстояния (04) от нее до локального начала отсчета 0, а также и для расстояния (mn) между любыми двумя точками m и n, близким к 0, имеем

$$(mn)^2 = [x(m) - x(n)]^2 + [y(m) - y(n)]^2.$$

Таким образом, для каждой точки m, близкой к 0 ($m = 3, 4, \ldots, N+2$), нужно знать лишь расстояния $(1m)$ (от нее до точки 1) и $(2m)$ (от нее до точки 2), чтобы можно было найти расстояние от нее до любой точки n, близкой к 0. Правило

---

[1]) Если расстояние (03) задать произвольно, то получившаяся в результате фигура с четырьмя вершинами выйдет за пределы плоскости. Считая эту фигуру тетраэдром в трехмерном эвклидовом пространстве, можно показать, что ее объем дается формулой, полученной Никколо Фонтана Тарталья (1500—1557 гг.) и обобщенной в наши дни на случай n измерений [150]:

$$\left(\begin{array}{c}\text{объем } n\text{-мерного симплекса, натянутого на } (n+1) \text{ точку}\end{array}\right) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)^{1/2} \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & (01)^2 & (02)^2 & \ldots & (0n)^2 \\ 1 & (10)^2 & 0 & (12)^2 & \ldots & (1n)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (n0)^2 & (n1)^2 & (n2)^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}^{1/2},$$

которая в случае трех точек сводится к обычной формуле Герона из Александрии (62—150 гг. н. э.):

$$\text{площадь} = \{s[s-(01)][s-(02)][s-(12)]\}^{1/2},$$
$$2s = (01) + (02) + (12)$$

для площади треугольника. Обратно, если четыре точки должны принадлежать двумерному эвклидову пространству, то объем тетраэдра должен быть равен нулю. Это требование накладывает одно условие на одно расстояние (03). Это условие проще рассмотреть, если взять (03) малым, а треугольник (102) — прямоугольным, как сделано выше. Однако общий принцип не зависит от этих упрощений и сразу же вытекает из обобщенной формулы Герона — Тартальи. В локально эвклидовом или лоренцевом пространстве n измерений достаточно выбрать $(n+1)$ опорных точек 0, 1, 2, . . ., n и определить расстояние от любой другой точки j, k, . . . до этих опорных точек, чтобы потом уже можно было вычислить расстояние между самими этими точками j, k, . . . («расстояния между ближайшими точками, выраженные через координаты»; метрика как результат обработки данных о расстояниях).

определения N $(N-1)/2$ расстояний между этими N близкими точками удобно сформулировать следующим образом: 1) у каждой точки есть две координаты x и y, 2) расстояние выражается через эти координаты обычным для эвклидовой метрики образом, т. е.

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Продвинувшись так далеко на основе «геометрии расстояний» (более подробно о которой см. [51, 151]), можно сделать обобщение и перейти от малой области (эвклидовой) к большой области (неэвклидовой). Введем две произвольные, гладкие, повсюду независимые криволинейные координаты x^k и выразим расстояние не только в непосредственной окрестности точки 0, но также и в непосредственной окрестности всех остальных точек поверхности (за исключением тех мест, где нужно перейти к другому координатному листу; для 2-сферы необходимо по крайней мере два координатных листа) в виде формулы

$$ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k.$$

Таким образом, из таблицы расстояний между ближайшими точками мы оставили теперь по 5 чисел на точку (две координаты x^1, x^2 и три метрических коэффициента g_{11}, $g_{12} = g_{21}$, g_{22}), уменьшив число данных в $100/5 = 20$ раз по сравнению с предыдущим результатом (теперь 3 т данных, или полгрузовика).

Третья обработка: выражаем метрические коэффициенты через аналитические функции координат

Вместо того чтобы задавать в каждой из $2 \cdot 10^7$ точек поверхности три метрических коэффициента, представим их как функции двух координат x^1, x^2 в виде степенного ряда, или в виде разложения по сферическим гармоникам, или в каком-нибудь ином виде, оставив скромное число (скажем 100) подгоночных коэффициентов. Тогда информация о самой геометрии (в отличие от координат $2 \cdot 10^7$ точек, расположенных на этой геометрии) содержится в этих трех сотнях коэффициентов — на одной печатной странице. Прощайте грузовики! Короче, метрика является как бы стенограммой, в которой содержатся расстояния между всевозможными парами точек; но ее роль, ее обоснование, ее смысл — в этих расстояниях и ни в чем другом, как в множестве этих расстояний.

§ 13.3. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ГЕОМЕТРИИ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ПРЯМЫМИ ЛИНИЯМИ ЛОКАЛЬНО ЛОРЕНЦЕВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Многое еще можно было бы сказать о математическом аппарате и физических следствиях метрики, но перед нами встает более неотложный вопрос. Каким образом метрика (или пространственно-временной интервал) связана с геодезическими (или мировыми линиями пробных частиц)? Ответ: Два математических объекта («прямая линия в локально лоренцевой системе» и «геодезическая

всеобъемлющей глобальной геометрии искривленного пространства-времени»), соответствующих одному и тому же физическому объекту («мировой линии пробной частицы»), должны совпадать между собой («условие совместности»). Рассмотрим это требование совместности более подробно. Начнем с того, что исследуем два математических представления мировой линии пробной частицы в окрестности данного события $\mathcal{P}_0$. Локально лоренцево представление гласит:

Локально лоренцево описание прямых линий

«Выберем в $\mathcal{P}_0$ локально лоренцеву систему. (Согласно рассмотрению, проведенному в упражнении 13.3, такая локально лоренцева система является наилучшим приближением к глобальной лоренцевой системе в $\mathcal{P}_0$, т. е. это система координат, в которой

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\alpha\beta} \text{ (метрика плоского пространства-времени),} \tag{13.15а}$$

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0, \tag{13.15б}$$

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}(\mathcal{P}_0) \neq 0, \text{ за исключением частных случаев, таких, как плоское пространство).} \tag{13.15в}$$

Мировая линия в такой системе имеет нулевое ускорение

$$d^2x^\alpha/d\tau^2 = 0 \text{ в } \mathcal{P}_0 \text{ («уравнение прямой линии»),} \tag{13.16}$$

где τ — собственное время, измеренное по часам частицы».

Представление в виде геодезических гласит:

Описание прямых линий с помощью геодезических

«В локально лоренцевой системе, как и в любой другой системе координат, мировая линия удовлетворяет уравнению геодезических

$$d^2x^\alpha/d\tau^2 + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(dx^\beta/d\tau)(dx^\gamma/d\tau) = 0 \tag{13.17}$$

(τ — аффинный параметр, поскольку это время, измеренное по часам пробной частицы)».

Условие совместности: в локально лоренцевой системе $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$

Чтобы два эти представления были совместны друг с другом при любом выборе пробной частицы (при любом выборе $dx^\alpha/d\tau$ в $\mathcal{P}_0$), необходимо, чтобы

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0 \text{ в любой локально лоренцевой системе [системе координат, удовлетворяющей соотношениям (13.15) в } \mathcal{P}_0\text{];} \tag{13.18}$$

т. е. необходимо, чтобы *каждая локально лоренцева система была локально инерциальной системой.* (О локально инерциальных системах см. § 11.6.) В такой системе все локальные эффекты «тяготения» пропадают. Таков кратко физический смысл условия (13.18).

Требуя тождественного совпадения геодезических (полученных из $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$) и прямых линий локально лоренцевой геометрии $g_{\mu\nu}$, мы вовсе не обязаны выражаться на языке специальной системы

координат. Локально лоренцева специализация системы координат может предоставить нам самый непосредственный способ увидеть физику («отсутствие локальных эффектов тяготения»), но было бы неоправданным воспользоваться ею для формулировки в самом общем виде одного из основных математических требований. Правильно было бы потребовать

Другая формулировка условия совместности: $\nabla \mathbf{g} = 0$

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \text{ («совместность } \mathbf{g} \text{ и } \nabla\text{»).} \tag{13.19}$$

Выраженное в произвольной системе координат, это требование гласит

$$g_{\alpha\beta;\,\gamma} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu} = 0. \tag{13.19'}$$

То, что это ковариантное требование выполнятся в любой системе координат, следует из справедливости его в одной системе координат — в локально лоренцевой системе. (В локально лоренцевой системе отдельно требуется обращение в нуль в точке $\mathcal{P}_0$ как первого члена в этом выражении, так и двух последующих, причем эти требования налагаются *физикой*.) Используя $\nabla \mathbf{g} = 0$, можно получить в абстрактных обозначениях правило дифференцирования произведения

$$\nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}) \tag{13.20}$$

(упражнение 13.4) и следующие выражения для коэффициентов связности в *произвольной* системе через 1) метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$ и 2) ковариантные коммутационные коэффициенты

Выражение $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ через метрику

$$c_{\alpha\beta\gamma} \equiv c_{\alpha\beta}{}^{\mu} g_{\mu\gamma} \equiv \langle \omega^{\mu}, [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] \rangle g_{\mu\gamma} \tag{13.21}$$

этой системы:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\beta\gamma} \text{ (определение } \Gamma_{\mu\beta\gamma}\text{)}, \tag{13.22}$$

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\,\gamma} + c_{\mu\beta\gamma} + g_{\mu\gamma,\,\beta} + c_{\mu\gamma\beta} - g_{\beta\gamma,\,\mu} - c_{\beta\gamma\mu}) =$$

$$= \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\,\gamma} + g_{\mu\gamma,\,\beta} - g_{\beta\gamma,\,\mu}) \text{ в произвольной координатной системе отсчета.} \tag{13.23}$$

(См. упражнение 13.4.)

Выражения (13.23) дают именно те коэффициенты связности, которые требуются, чтобы геодезические искривленного пространства-времени совпали с прямыми линиями локально лоренцевой геометрии. Причем это единственные коэффициенты связности, обладающие такими свойствами; никакой другой выбор коэффициентов связности не приведет к нужному результату!

Резюме: В искривленном пространстве-времени с локально лоренцевой метрикой следующие утверждения, которые кажутся различными, на самом деле эквивалентны: 1) геодезические искривленного пространства-времени совпадают с прямыми линиями локально лоренцевой геометрии; 2) каждая локально лоренцева

система [координаты, в которых $g_{\alpha\beta}(\mathscr{P}_0) = \eta_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\gamma}(\mathscr{P}_0) = 0$] является в то же время и локально инерциальной системой [$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathscr{P}_0) = 0$]; 3) метрика и ковариантная производная удовлетворяют условию совместности $\nabla \mathbf{g} = 0$; 4) ковариантная производная подчиняется правилу дифференцирования произведения (13.20); 5) коэффициенты связности определяются из метрики с помощью выражений (13.23). Шестое эквивалентное утверждение, вывод которого дан в следующем параграфе, гласит: 6) геодезические искривленного пространства-времени совпадают с мировыми линиями экстремального собственного времени.

УПРАЖНЕНИЯ

13.3. Математическое представление локально лоренцевой системы

Локально лоренцевой системой в данном событии $\mathscr{P}_0$ по определению называется система, представляющая собой наилучшее приближение в этом событии к глобальной лоренцевой системе. Тогда это должна быть система координат, в которой $g_{\mu\nu}(\mathscr{P}_0) = \eta_{\mu\nu}$ и как можно большее число производных $g_{\mu\nu}$ обращается в $\mathscr{P}_0$ в нуль. Докажите, что существует система координат, в которой $g_{\mu\nu}(\mathscr{P}_0) = \eta_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu,\rho}(\mathscr{P}_0) = 0$, но $g_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathscr{P}_0)$ в общем случае нельзя обратить в нуль. Следовательно, эти координаты и являются математическим представлением локально лоренцевой системы. [*Указание.* Пусть $\{x^{\alpha'}(\mathscr{P})\}$ — произвольная, но фиксированная система координат, а $\{x^{\mu}(\mathscr{P})\}$ — локально лоренцева система, причем начала обеих совпадают с точкой $\mathscr{P}_0$. Разложите преобразование от одной системы координат к другой по степеням x^{μ}

$$x^{\alpha'} = M^{\alpha}{}_{\mu}x^{\mu} + \frac{1}{2}N^{\alpha}{}_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} + \frac{1}{6}P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}x^{\mu}x^{\nu}x^{\rho} + \ldots$$

и, воспользовавшись матрицей преобразования $L^{\alpha'}{}_{\mu} \equiv \partial x^{\alpha'}/\partial x^{\mu}$, выразите $g_{\mu\nu}(\mathscr{P}_0)$, $g_{\mu\nu,\rho}(\mathscr{P}_0)$ и $g_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathscr{P}_0)$ через $g_{\alpha'\beta'}$, их производные и постоянные $M^{\alpha}{}_{\mu}$, $N^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, $P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$. Покажите, что каковы бы ни были $g_{\alpha'\beta'}$ (но такие, чтобы соответствующая матрица была несингулярной и могли существовать $g^{\alpha'\beta'}$!), всегда можно выбрать 16 постоянных $M^{\alpha}{}_{\mu}$ так, чтобы $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (десять условий); всегда можно выбрать $4 \times 10 = 40$ постоянных $N^{\nu}{}_{\mu\nu}$ так, чтобы обратить в нуль $10 \times 4 = 40$ производных $g_{\mu\nu,\rho}(\mathscr{P}_0)$, но в общем случае нельзя выбрать $4 \times 20 = 80$ постоянных $P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$ так, чтобы обратить в нуль $10 \times 10 = 100$ производных $g_{\mu\nu,\rho\sigma}$.]

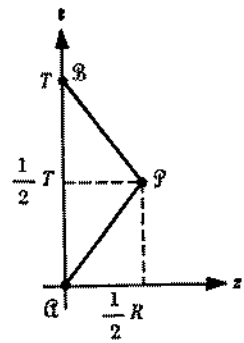
13.4. Следствия из совместности $\mathbf{g}$ и ∇

а. Из условия совместности $\nabla \mathbf{g} = 0$ выведите правило дифференцирования произведения (13.20).

б. Из условия совместности $\nabla \mathbf{g} = 0$ и определений (13.21) и (13.22) выведите выражение (13.23) для коэффициентов связности. (*Ответ.* См. упражнение 8.15, стр. 271.)

§ 13.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ — МИРОВЫЕ ЛИНИИ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ СОБСТВЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

В локально лоренцевой системе прямую мировую линию легко отличить от непрямой. Выберем положение и ориентацию лоренцевой системы таким образом, чтобы исходная точка мировой линии $\mathscr{A}$ лежала в начале координат, а конечная точка $\mathscr{B}$ имела координаты $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = T$. В качестве примера непрямой мировой линии рассмотрим перемещение с постоянной скоростью из $\mathscr{A}$ в точку $\mathscr{P}$ с координатами $\left(\frac{1}{2}T, 0, 0, \frac{1}{2}R\right)$, а оттуда — опять же с постоянной скоростью в точку $\mathscr{B}$. Промежуток собственного времени, истекший от начала до конца пути («длина мировой линии»), равен



$$\tau = (T^2 - R^2)^{1/2}.$$

Таким образом, истекший промежуток собственного времени уменьшился по сравнению с тем значением, которое он имел при перемещении вдоль прямой линии, причем уменьшение происходит при любом значении R, отличном от нуля (соответствующего прямой мировой линии). Как для этой простой ломаной линии, так и для любой другой непрямой линии справедливо следующее: промежуток собственного времени, истекший между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, всегда меньше, чем соответствующий промежуток вдоль прямой линии (упражнение 6.3). Таким образом, в плоском пространстве-времени экстремальная длина является признаком прямолинейности.

В плоском пространстве-времени прямые линии имеют экстремальную длину

Любая локальная область искривленного пространства-времени реального физического мира носит лоренцев характер. В этой локально лоренцевой геометрии не представляет труда ввести лоренцевы координаты и провести только что описанный анализ на экстремальность длины для выяснения того, является ли линия прямой или нет:

Экстремальная длина в искривленном пространстве-времени

$$\tau = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} d\tau = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} (-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu)^{1/2} =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{максимум для прямой линии по сравнению}\\ \text{с любой другой мировой линией}\end{pmatrix}. \qquad (13.24)$$

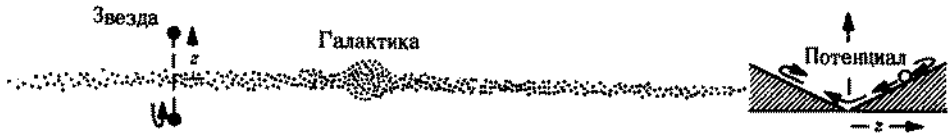
Такую проверку прямолинейности можно осуществить в каждой локальной лоренцевой области вдоль мировой линии по отдельности или, что более эффективно, ее можно осуществить по всей совокупности локальных лоренцевых областей одновременно, т. е. в области, где конечные точки $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ расположены так далеко

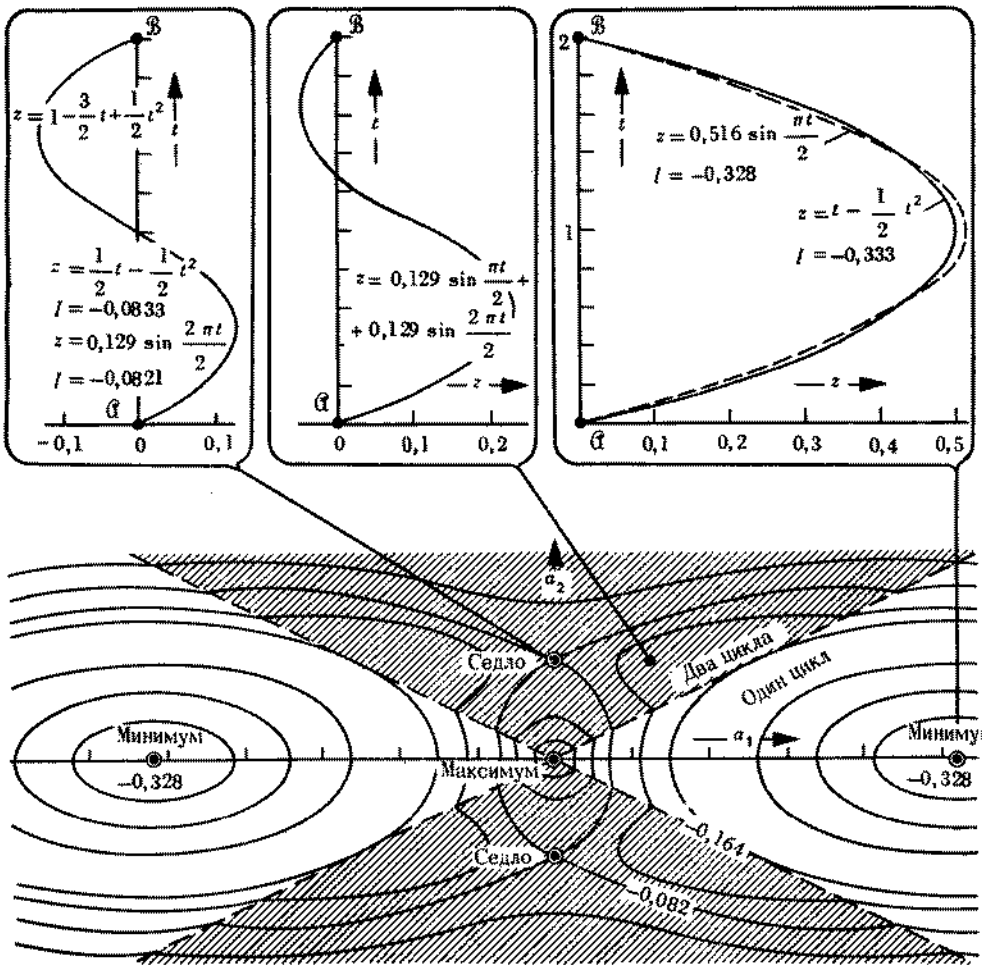
ФИГ. 13.2.
Колебательное движение звезды в направлении, перпендикулярном плоскости галактики, имеющей форму диска, как пример ситуации, когда два события $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ могут быть соединены более чем одной геодезической. *Слева вверху*: вид галактики с ребра; штриховой линией показана траектория данной звезды по отношению к локальной системе, принимающей участие в общем вращении звезд диска. *Справа вверху*: эффективный потенциал, в котором колеблется звезда, согласно ньютоновской теории тяготения; он подобен потенциалу, в котором движется мячик, скатывающийся по одной наклонной плоскости и поднимающийся вверх по другой («свободное падение на плоскость галактики» с ускорением $g = {}^1/_2$ в принятых здесь единицах). Три прямоугольные рамки в центре — возможные и невозможные мировые линии, соединяющие два данных события $\mathscr{A}$ (плоскость галактики при $t = 0$) и $\mathscr{B}$ (плоскость галактики при $t = 2$). *Справа*: звезда выброшена из галактической плоскости с такой скоростью, что она снова попадает в плоскость в момент $t = 2$. *Слева* — если звезду выбросить с вдвое меньшей скоростью, то она возвратиться вдвое быстрее (что в корне отличается от простых гармонических колебаний, но вполне согласуется с V-образным потенциалом галактики!) и успеет совершить два цикла за время между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. *В центре*: мировая линия, которую можно представить себе (возможная лишь при наличии ракетной тяги!), но которая не является геодезической. *Внизу*: сравнение этих и всевозможных других траекторий, которые могут быть приближенно представлены в виде $z = a_1 \sin(\pi t/2) + a_2 \sin(2\pi t/2)$. Два подгоночных параметра a_1 и a_2 являются координатами в двумерном «функциональном пространстве» (аппроксимирующем бесконечномерное функциональное пространство, которое требуется для описания всех мыслимых мировых линий, соединяющих $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$; в правой рамке точный параболический закон свободного падения сравнивается с приближением, содержащим один член ряда Фурье; аналогичное сравнение проводится и в левой рамке, но там две кривые слишком близки друг к другу, чтобы их можно было нарисовать отдельно). Некоторые детали: рассуждая в рамках общей теории относительности, нужно взять произвольную мировую линию, соединяющую $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, вычислить вдоль нее промежуток собственного времени и затем повторить это для всех остальных мировых линий; тогда можно сказать, что данная мировая линия представляет возможную траекторию движения («геодезическую»), если собственное время вдоль нее достигает экстремума по отношению ко всем близким мировым линиям. В ньютоновском приближении необходимо принять во внимание лишь разницу между промежутком собственного времени и промежутком ($t_{\mathscr{B}} - t_{\mathscr{A}}$) координатного времени, которая выражается через «интеграл действия» (записанный для единичной массы)

$$I = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} \left[\left(\begin{matrix} \text{кинетическая} \\ \text{энергия} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{потенциальная} \\ \text{энергия} \end{matrix} \right) \right] dt =$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - |z| \right] dt$$

[максимум (или экстремум другого рода) собственного времени соответствует минимуму (или экстремуму другого рода) действия I]. Интегрирование дает $I = (\pi^2 a_1^2/8) - (4|a_1|/\pi) + (\pi^2 a_2^2/2)$ при $|a_2| < {}^1/_2 |a_1|$ (движение содержит один цикл) и $I = (\pi^2 a_1^2/8) + (\pi^2 a_2^2/2) - (4|a_2|/\pi) - (a_1^2/\pi |a_2|)$ при $|a_2| > {}^1/_2 |a_1|$ (движение содержит два цикла). Когда движение содержит один цикл, действие достигает минимума (промежуток собственного времени максимален). Когда движение содержит два цикла, действие достигает экстремума, но не минимума («седловая точка»). В работе [152] даны примеры других механических задач, которые приводят к более чем одному экстремуму. В работах [153, 154] приводится теорема, связывающая число седловых точек различных типов с числами максимумов и минимумов («теорема о критической точке в исчислении конечных вариаций»).


Звезда
z
Галактика
Потенциал
z


$z = 1 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$
$z = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$
$l = -0{,}0833$
$z = 0{,}129 \sin \frac{2\pi t}{2}$
$l = -0{,}0821$
$z = 0{,}129 \sin \frac{\pi t}{2} + 0{,}129 \sin \frac{2\pi t}{2}$
$z = 0{,}516 \sin \frac{\pi t}{2}$
$l = -0{,}328$
$z = t - \frac{1}{2}t^2$
$l = -0{,}333$
a_2
a_1
Седло
Два цикла
Один цикл
Минимум
−0,328
Максимум
Седло
Минимум
−0,328
−0,164
−0,082

друг от друга, что, возможно, не существует единой лоренцевой системы, содержащей их обе. Чтобы провести такой анализ, нужно отказаться от локально лоренцевых координат. Поэтому вводим криволинейную систему координат общего вида и в результате получаем

$$\tau = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} d\tau = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} (-g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu)^{1/2} =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{экстремум для времениподобной мировой линии,} \\ \text{которая является прямой в каждой локально} \\ \text{лоренцевой системе вдоль нее, по сравнению} \\ \text{с любой другой «близкой» мировой линией} \end{array} \right). \quad (13.25)$$

В реальном мире траектория экстремального τ, будучи прямой в каждой локально лоренцевой системе, должна представлять собой геодезическую пространства-времени.

Отметим, что слово «максимум» в выражении (13.24) заменено в утверждении (13.25) словом «экстремум». Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ далеко отстоят друг от друга, то вполне возможно, что их можно соединить несколькими различными геодезическими с разными промежутками собственного времени (фиг. 13.2). На любой времениподобной геодезической τ достигает экстремума по отношению к близким деформациям этой геодезической, но этот экстремум не обязательно является максимумом. Когда два события соединены несколькими различными геодезическими, типичной точкой на схемах типа фиг. 13.2 и 13.3 бывает не точка локального максимума («горная вершина»), а точка седла («горный перевал»).

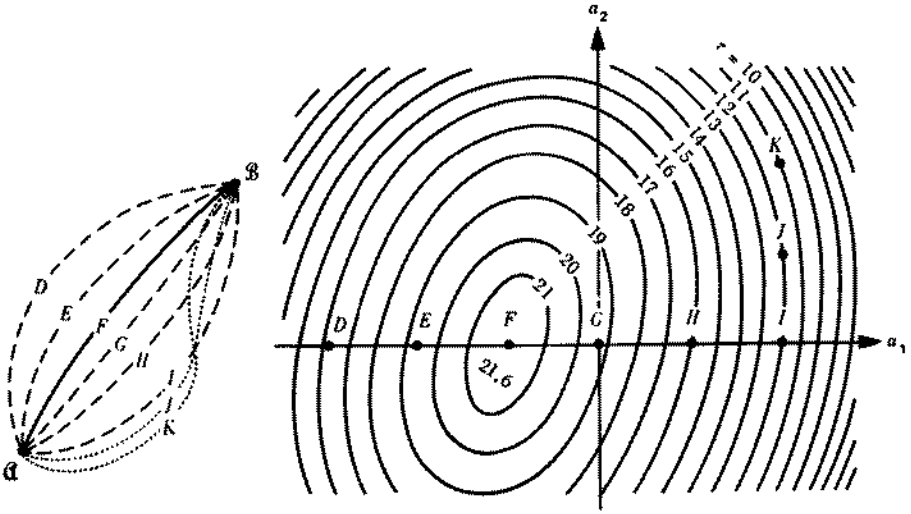
Доказательство того, что кривые экстремальной длины являются геодезическими

Из соответствия между локальными прямыми линиями (линиями экстремальнэго τ и геодезическими искривленного пространства-времени) следует, что времениподобные геодезические должны иметь экстремальную собственную длину. Если это так, то любая кривая $x^\mu(\lambda)$ между $\mathscr{A}$ (где $\lambda = 0$) и $\mathscr{B}$ (где $\lambda = 1$), на которой τ достигает экстремума, должна удовлетворять уравнению геодезических. Чтобы проверить, является ли кривая, прочимая в геодезические, экстремалью по отношению к собственному времени, подвергнем ее малой, но произвольной деформации:

$$\begin{array}{c} \text{исходная кривая } x^\mu = a^\mu(\lambda); \\ \text{деформированная кривая } x^\mu = a^\mu(\lambda) + \delta a^\mu(\lambda). \end{array} \quad (13.26)$$

Истекший промежуток собственного времени вдоль любой кривой составляет

$$\tau = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} d\tau = \int_0^1 \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (13.27)$$



ФИГ. 13.3.

Нахождение мировой линии с экстремальным промежутком собственного времени. *Слева*: пространство-время; мировая линия F, вдоль которой промежуток собственного времени τ между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ достигает экстремального значения, сравнивается с другими мировыми линиями. Конкретные мировые линии, показанные на рисунке, отличаются от опорной мировой линии G на величину, которая характеризуется двумя «фурье-амплитудами» a_1 и a_2:

$$\delta a^{\mu}(\lambda) = a_1 \sin(\pi\lambda) + a_2 \sin(2\pi\lambda),$$

где произвольные масштабный фактор и начало отсчета параметра λ выбраны таким образом, что $\lambda(\mathscr{A}) = 0$, $\lambda(\mathscr{B}) = 1$.

Справа: «пространство траекторий». Координатами в этом пространстве являются фурье-амплитуды a_1 и a_2. Показаны лишь эти две амплитуды («два измерения»), тогда как нужно было бы показать бесконечное число амплитуд («бесконечномерное пространство траекторий»), необходимых, чтобы представить времениподобную мировую линию общего вида, соединяющую $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Каждый данный контур (в пространстве траекторий) проходит сквозь все те точки, которые соответствуют мировым линиям (в пространстве-времени), отмеряющим один и тот же промежуток собственного времени τ, указанный на контуре. Предшествующее описание является классическим; согласно квантовой механике, все времениподобные мировые линии, соединяющие $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, имеют одну и ту же амплитуду вероятности («принцип равноправия историй») и отличаются друг от друга лишь фазой этой комплексной амплитуды вероятности $\exp(-im\tau/\hbar)$ (m — масса частиц, $\hbar$ — квант момента импульса). Однако при сложении этих амплитуд вероятности из-за разрушительного действия интерференции исчезает вклад всех тех историй (траекторий), которые слишком сильно отличаются от оптимальной, или классической истории («волновая зона Френеля»; «фейнмановский принцип суммирования по траекториям», см. [155]). Опираясь на эти принципы волновой механики, демонстрирующие, как на самом деле действуют законы физического мира, в дополнении 25.3 описывается метод Гамильтона — Якоби («квантовомеханический предел коротких длин волн») определения геодезических, метод, который с точки зрения приложений гораздо удобнее, чем обычные «дифференциальные уравнения второго порядка для геодезических» [уравнения (10.27)].

При фиксированном λ значения метрических коэффициентов $g_{\mu\nu}[x^\alpha(\lambda)]$ на различных кривых отличаются на

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}[a^\alpha(\lambda)+\delta a^\alpha(\lambda)] - g_{\mu\nu}[a^\alpha(\lambda)] = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\,\delta a^\sigma(\lambda); \quad (13.28)$$

а компоненты $dx^\nu/d\lambda$ касательного вектора — на

$$\delta\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) \equiv \frac{d(a^\nu+\delta a^\nu)}{d\lambda} - \frac{da^\nu}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}(\delta a^\nu). \quad (13.29)$$

Эти изменения $g_{\mu\nu}$ и $dx^\nu/d\lambda$ при фиксированном λ приводят к соответствующим изменениям промежутка собственного времени, задаваемого выражением (13.27):

$$\delta\tau = \int_0^1 \left\{ \frac{-g_{\mu\nu}(da^\mu/d\lambda)\,d(\delta a^\nu)/d\lambda - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma}\delta a^\sigma)(da^\mu/d\lambda)(da^\nu/d\lambda)}{[-g_{\gamma\delta}(da^\gamma/d\lambda)(da^\delta/d\lambda)]^{1/2}} \right\} d\lambda.$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям. Члены, соответствующие конечным точкам, опускаем, поскольку обе кривые должны проходить через $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ ($\delta a^\mu = 0$ при $\lambda = 0$ и при $\lambda = 1$). В результате получаем

$$\delta\tau = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} f_\sigma(\lambda)\,\delta a^\sigma \left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2} d\lambda. \quad (13.30)$$

Здесь через f_σ («силовой член») в подынтегральном выражении сокращенно обозначены четыре выражения

$$f_\sigma(\lambda) = \frac{1}{\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2}}\frac{d}{d\lambda}\frac{g_{\sigma\nu}\frac{da^\nu}{d\lambda}}{\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2}} - \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{da^\mu}{d\lambda}\frac{da^\nu}{d\lambda}}{\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]}. \quad (13.31)$$

Достижение экстремума и обращение в нуль изменения $\delta\tau$ в первом порядке при произвольном отклонении первого порядка $\delta a^\sigma(\lambda)$ от оптимальной траектории $x^\sigma = a^\sigma(\lambda)$ имеет место тогда, когда все величины f_σ, умножаемые на δa^σ, обращаются в нуль. Таким образом, для определения экстремальной мировой линии мы получаем четыре условия

$$f_\sigma(\lambda) = 0. \quad (13.32)$$

(Другой подход к проблеме нахождения экстремума представлен на фиг. 13.3.)

Будучи *достаточными*, эти четыре условия не являются *независимыми*, поскольку здесь применим довод «нитки бус» ($\delta\tau$ авто-

матически обращается в нуль при любых изменениях, сводящихся к простому смещению точек вдоль фиксированной мировой линии, подобных передвижению бусин по нитке). Операция простого «передвижения бусин» описывается тривиальной вариацией

$$\delta a^\sigma(\lambda) = h(\lambda)\frac{da^\sigma}{d\lambda}, \tag{13.33}$$

где $h(\lambda)$ — произвольная функция точки на мировой линии («в одном месте перемещение больше, чем в другом»). Зная заранее, что эта операция не может изменить τ мы заключаем, что подстановка (13.33) вместо δa^σ в подынтегральное выражение (13.30) должна обращать его в нуль; более того, подынтегральное выражение должно обращаться в нуль при любом выборе произвольного множителя $h(\lambda)$, описывающего «величину перемещения». Чтобы удовлетворить этому требованию, скалярное произведение $f_\sigma da^\sigma/d\lambda$ должно автоматически обращаться в нуль; другими словами,

$$f_\sigma \frac{da^\sigma}{d\tau} = 0. \tag{13.34}$$

Приведенные доводы и последнее уравнение справедливы независимо от того, имеем ли мы дело с оптимальной мировой линией или нет. Соотношение такого типа, которое справедливо независимо от того, является ли мировая линия допустимой траекторией свободной пробной частицы (траекторией с экстремальным промежутком собственного времени) или нет, называется *тождеством*. Соотношение (13.34) — важное тождество в теории геодезических пространства-времени — является в некотором роде предшественником тождеств Бианки — важнейших тождеств в теории кривизны пространства-времени, изучаемых в гл. 15.

Произвол, который существует в «сдвиге значений λ вдоль мировой линии», можно использовать с той целью, чтобы вместо произвольного параметра λ ввести физически более интересный параметр собственного времени

$$d\tau = \left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2} d\lambda. \tag{13.35}$$

Остановившись на конкретной мировой линии $x^\mu = a^\mu(\lambda)$ и забыв про все ее деформации, мы можем повсюду заменить $a^\mu(\lambda)$ на $x^\mu(\lambda)$. Тогда дифференциальные уравнения (13.32) для экстремальной мировой линии сводятся к

$$g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \tag{13.36}$$

Между прочим, отметим, что тождество (13.34) вытекает теперь из соотношения

$$g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + 1 = 0, \tag{13.37}$$

которое нужно один раз продифференцировать (по τ). Таким образом, интерпретация этого тождества сводится к тому, что 4-скорость и 4-ускорение ортогональны друг другу для любой мировой линии независимо от того, экстремальна она или нет. Вернемся теперь к уравнению прямой линии в локальной лоренцевой геометрии (13.36) и, подняв в нем индекс с помощью $g^{\beta\sigma}$, приведем его к виду

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}+g^{\beta\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0. \qquad (13\ 38)$$

Сравним его с уравнением геодезических в обычной для «дометрической геометрии» форме

$$\frac{d^2x^\beta}{d\lambda^2}+\Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0. \qquad (13.39)$$

Отсюда приходим к выводу, что геодезические дометрической геометрии совпадают с прямыми линиями локальной лоренцевой геометрии в том и только том случае, если выполнены два условия: 1) 40 коэффициентов связности $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$, определяющих геодезические, ковариантную производную и параллельный перенос, должны выражаться через десять метрических коэффициентов $g_{\mu\nu}$ («эйнштейновские гравитационные потенциалы») посредством соотношений (13.22) и (13.23), полученных выше; 2) параметр геодезических λ должен совпадать с собственным временем τ с точностью до произвольного выбора нулевой точки и произвольного, но постоянного масштабного множителя, т. е.

$$\lambda = a\tau + b.$$

(В развиваемом формализме нет ничего, хотя бы отдаленно напоминающего ньютоновское мировое время, «текущее всюду равномерно»; вместо этого на каждой геодезической есть свое отдельное собственное время τ.) В дополнении 13.3 рассмотрен другой вариационный принцип, который в один прием позволяет найти экстремальную мировую линию и правильную параметризацию этой линии.

Описанный здесь этап является завершающим в переводе идей геометрии искривленного пространства с основания, опирающегося на геодезические, на основание, опирающееся на метрику. Полученная в результате геометрия всегда и везде неразрывно связана с принципом, утверждающим, что она носит «локально лоренцев характер», что совершенно невозможно в геометрии Ньютона—Картана.

УПРАЖНЕНИЯ

13.5. Времениподобная в одном месте — времениподобная повсюду

Покажите, что геодезическая пространства-времени, которая времениподобна в одном месте, является времениподобной повсюду. Аналогично покажите, что пространственноподобная вначале

геодезическая является пространственноподобной повсюду, а нулевая вначале геодезическая является всюду нулевой. (*Указание.* Это самое легкое упражнение во всей книге!)

13.6. Пространственноподобные геодезические обладают экстремальной длиной

Покажите, что пространственноподобная кривая, соединяющая два события $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ является геодезической тогда и только тогда, когда ее собственная длина

$$s = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} (g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu)^{1}$$

экстремальна. (*Указание.* После того как доказана аналогичная теорема для времениподобных геодезических, это упражнение становится почти таким же легким, как и упражнение 13.5.)

13.7. Измерение метрического тензора посредством световых сигналов и свободных частиц (Кухарж)

а. Вместо параметризации времениподобных геодезических с помощью собственного времени τ введите на них произвольный параметр μ:

$$\tau = F(\mu).$$

Запишите уравнение геодезических в μ-параметризации.

б. Воспользуйтесь в качестве параметра временно́й координатой t. Бросьте облако свободных частиц с различными «скоростями» $v^i = dx^i/dt$ и проследите за их «ускорениями» $a^i = d^2x^i/dt^2$. Рассмотрите, какие сочетания компонент аффинной связности $\Gamma^i{}_{\kappa\lambda}$ можно при этом измерить. (Считайте, что нет стандартных часов, способных отмерять τ!)

в. Покажите, что используя одни только световые сигналы, распространяющиеся вдоль нулевых геодезических $g_{i\kappa}dx^i dx^\kappa = 0$, можно измерить конформную метрику $\bar{g}_{i\kappa}$, т. е. отношение компонент метрического тензора $g_{i\kappa}$ к заданной компоненте (скажем g_{00})

$$\bar{g}_{i\kappa} = \Lambda g_{i\kappa}, \quad \Lambda \equiv (-g_{00})^{-1}.$$

г. Объедините теперь результаты пунктов «б» и «в». Предположите, что $\Gamma^i{}_{\kappa\lambda}$ определяются метрическим тензором, согласно (13.22) и (13.23), в координатной системе отсчета x^i. Покажите, что задание Λ в одном событии (эквивалентное выбору единицы измерения времени) позволяет определить его повсюду.

Дополнение 13.2. «ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ» И «ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МИРОВЫЕ ЛИНИИ»

Как только коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ оказываются выраженными через эйнштейновские гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$ с помощью соотношений (13.22) и (13.23), что на данном этапе изложения уже имеет место и будет иметь место на протяжении остальной части книги («риманова, или метрическая геометрия»), становится допустимым и уместным объединить под одним словом «геодезическая» два до сих пор различных понятия: 1) параметризованную мировую линию, удовлетворяющую уравнению геодезических

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0,$$

и 2) мировую линию, вдоль которой собственное время между двумя событиями $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ достигает экстремального значения (или кривую, если она пространственноподобна, вдоль которой собственная длина достигает экстремального значения). Одна из причин возможных недоразумений состоит в том, что в первом случае подразумевается соответствующим образом параметризованная кривая (что существенно, например, при построении лестницы Шилда, использованном для параллельного переноса в гл. 10), тогда как во втором случае речь идет только о том, по какому маршруту в пространстве-времени проходит мировая линия, и не имеет никакого значения, какая при этом использована параметризация и была ли она вообще введена. При этом, однако, не отрицается возможность «разметки» экстремальной кривой «задним числом» при помощи наиболее естественного и легко вычисляемого параметра — собственного времени, после чего экстремальная кривая второго случая будет удовлетворять уравнению геодезических для кривой в первом случае. Мы легко избавимся от этой неопределенности, если всегда будем подразумевать соответствующую параметризацию: впредь под словом «кривая» следует понимать параметризованную кривую, а под словом «геодезическая»— соответствующим образом параметризованную геодезическую.

Дополнение 13.3. «ДИНАМИЧЕСКИЙ» ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Если для принципа экстремальной длины

$$\tau = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} \left[-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda = \text{экстремум} \tag{1}$$

выбор параметризации не имеет значения [$d\lambda$ сокращается в (1)], и если уравнение геодезических требует соответствующей параметризации, то уместно поискать другой экстремальный принцип, который сразу бы давал как правильную кривую, так и правильный параметр. По аналогии с обычной механикой можно ожидать, что уравнение движения [уравнение геодезических

$$d^2x^{\mu}/d\lambda^2 + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,(dx^{\alpha}/d\lambda)\,(dx^{\beta}/d\lambda) = 0],$$

основной член в котором имеет вид $\ddot{x}$, можно получить из лагранжиана с основным членом $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ («кинетическая энергия», «динамический» член). Простейшим обобщением $\frac{1}{2}\dot{x}^2$, не зависящим от координат, является

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda).$$

Таким образом, мы приходим к тому, что вместо «геометрического» принципа экстремальной длины следует попробовать применить новый «динамический» экстремальный принцип

$$I = \frac{1}{2} \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda = \int_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} L\left(x^\sigma, \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right) d\lambda = \text{экстремум} \tag{2}$$

(квадратный корень в предыдущем вариационном принципе заменяется на первую степень). Условием экстремума здесь, как и ранее [уравнения (13.30) — (13.32)], является обращение в нуль так называемой «функциональной производной» Эйлера — Лагранжа:

$$0 = \frac{\delta I}{\delta x^\sigma} \equiv \begin{pmatrix}\text{коэффициент при } \delta x^\sigma \text{ в подынтегральном} \\ \text{выражении для } \delta I\end{pmatrix} = \frac{\partial L}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right)}, \tag{3}$$

или в подробной записи

$$g_{\sigma\nu} \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0; \tag{4}$$

после умножения на обратную метрическую матрицу получаем

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + g^{\alpha\sigma} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \tag{5}$$

что совпадает с уравнением геодезических

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, новое «динамическое» выражение (2) действительно экстремально для геодезических кривых и в отличие от собственной длины (1) оно экстремально тогда и только тогда, когда геодезическая аффинно параметризована. [Соответствующие «уравнения Эйлера — Лагранжа» (6) остаются справедливыми лишь при тех изменениях параметра $\lambda_{\text{нов}} = a\lambda_{\text{стар}} + b$, которые сохраняют параметр аффинным; в отличие от этого, уравнения Эйлера — Лагранжа (13.31) и (13.32), соответствующие «принципу экстремальной длины» (1), остаются справедливыми при совершенно произвольных изменениях параметра.]

§ 13.5. СВОЙСТВА R, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ НАЛИЧИЕМ МЕТРИКИ

Симметрии R в отсутствие метрики

В ньютоновском пространстве-времени, в эйнштейновском пространстве-времени реального физического мира, вообще в любом многообразии с ковариантной производной тензор кривизны Римана обладает следующими симметриями (упражнение 11.6):

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \equiv R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]} \text{ (антисимметрия по последним двум индексам),} \tag{13.40}$$

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} \equiv 0 \text{ (обращение в нуль совершенно антисимметричной части).} \tag{13.41}$$

Кроме того, он удовлетворяет дифференциальному тождеству (упражнение (11.10)

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\varepsilon]} \equiv 0 \text{ («тождество Бианки»)} \tag{13.42}$$

(геометрический смысл обсуждается в гл. 15).

Новые симметрии, накладываемые введением метрики

Введение метрики, как в эйнштейновском пространстве-времени, так и в других многообразиях, накладывает на **R** дополнительную симметрию (упражнение 13.8)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{[\alpha\beta]\gamma\delta} \text{ (антисимметрия по первым двум индексам).} \tag{13.43}$$

Последнее соотношение вместе с (13.40) и (13.41) образует полную совокупность соотношений симметрии для **R**, другие симметрии, которые из них вытекают, имеют вид (упражнение 13.10)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \text{ (симметрия по отношению к перестановке пар индексов)} \tag{13.44}$$

и

$$R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0 \text{ (обращение в нуль совершенно антисимметричной части).} \tag{13.45}$$

Благодаря этим соотношениям симметрии число независимых компонент **R** уменьшается с $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ до 20 (упражнение 13.9).

Наличие метрики позволяет образовать из **R** целый ряд новых тензоров кривизны. Некоторые из них, играющие впоследствии важную роль, определены ниже.

Тензор кривизны G

1. *Дважды дуальный* **R** тензор $\mathbf{G} \equiv {}^*\mathbf{R}^*$ (аналог тензора $\mathbf{M} \equiv {}^*\mathbf{F}$) имеет компоненты

$$G^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma\gamma\delta} = -\frac{1}{4}\delta^{\alpha\beta\mu\nu}_{\rho\sigma\gamma\delta}R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \tag{13.46}$$

(упражнение 13.11).

2. *Тензор кривизны Эйнштейна*, который симметричен (упражнение 13.11):

Тензор Эйнштейна

$$G^{\beta}{}_{\delta} \equiv G^{\mu\beta}{}_{\mu\delta}; \quad G_{\beta\delta} = G_{\delta\beta}. \tag{13.47}$$

3. Симметричный *тензор кривизны Риччи* и *скалярная кривизна*

Тензор Риччи

Скалярная кривизна

$$R^{\beta}{}_{\delta} \equiv R^{\mu\beta}{}_{\mu\delta}, \quad R_{\beta\delta} = R_{\delta\beta}; \quad R \equiv R^{\beta}{}_{\beta}, \tag{13.48}$$

которые связаны с тензором Эйнштейна соотношением (упражнение 13.12)

$$R^{\beta}{}_{\delta} = G^{\beta}{}_{\delta} + \frac{1}{2} R\delta^{\beta}{}_{\delta}. \tag{13.49}$$

4. *Конформный тензор Вейля* (упражнение 13.13)

Конформный тензор Вейля

$$C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - 2\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma} R^{\beta]}{}_{\delta]} + \frac{1}{3}\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma}\delta^{\beta]}{}_{\delta]} R. \tag{13.50}$$

Тождество Бианки (13.42) приобретает особенно простой вид, если его переписать через дважды дуальный тензор $\mathcal{G}$:

Тождества Бианки

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{;\,\delta} \equiv 0 \text{ («тождество Бианки»)} \tag{13.51}$$

(упражнение 13.11); отсюда вытекает очевидное следствие

$$G_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\,\beta} \equiv 0 \text{ («свернутое тождество Бианки»)}. \tag{13.52}$$

В гл. 15 раскрывается глубокий геометрический смысл этих тождеств Бианки.

13.8. Антисимметрия R по первым двум индексам

УПРАЖНЕНИЯ

а. Выведите условие симметрии (13.43). [*Указание.* С помощью выкладок в абстрактном представлении покажите, что произвольные векторные поля **s**, **u**, **v**, **w** удовлетворяют соотношению $0 = \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{s}\cdot\mathbf{w}) = \mathbf{s}\cdot[\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}] + \mathbf{w}\cdot[\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{s}]$. Отсюда получите (13.43).]

б. Поясните на геометрическом языке смысл этой антисимметрии.

13.9. Число независимых компонент R

а. В отсутствие метрики полная совокупность условий симметрии для **R** включает $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]}$ и $R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0$. Покажите, что в четырехмерном пространстве-времени эти соотношения уменьшают число независимых компонент от $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ до $4 \times 4 \times 6 - 4 \times 4 = 96 - 16 = 80$.

б. Покажите, что в n-мерном многообразии без метрики число независимых компонент равно

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} \equiv \frac{n^2(n^2-1)}{3}. \tag{13.53}$$

УПРАЖНЕНИЯ

в. При наличии метрики полная совокупность условий симметрии состоит из $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$ и $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$. Покажите, что в четырехмерном пространстве-времени они сводят число независимых компонент к $6 \times 6 - 4 \times 4 = 36 - 16 = 20$.

г. Покажите, что в n-мерном многообразии с метрикой число независимых компонент равно

$$\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \qquad (13.54)$$

13.10. Симметрия R по отношению к перестановке пар индексов; обращение в нуль совершенно антисимметричной части

Из полной совокупности симметрий при наличии метрики $R_{\alpha\beta\mu\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$ и $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$ выведите: а) симметрию по отношению к перестановке пар индексов $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ и б) обращение в нуль совершенно антисимметричной части $R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0$. Затем в) покажите, что следующие соотношения симметрии образуют полную систему:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0. \qquad (13.55)$$

13.11. Дважды дуальный R тензор; тензор Эйнштейна G

а. Покажите, что $\mathbf{G} = {}^*\mathbf{R}^*$ содержит точно такое же количество информации, как и $\mathbf{R}$, и удовлетворяет той же совокупности соотношений симметрии [(13.40), (13.41), (13.43)—(13.45)].

б. Исходя из симметрий $\mathbf{G}$ покажите, что тензор Эйнштейна [определенный соотношением (13.47)] симметричен ($G_{[\beta\delta]} = 0$).

в. Покажите, что тождества Бианки (13.42), записанные через $\mathbf{G}$, принимают вид (13.51) («дивергенция равна нулю», $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$).

г. Свернув тождества Бианки $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$, покажите, что $\mathbf{G}$ имеет нулевую дивергенцию [соотношение (13.52)].

13.12. Связь тензоров Риччи и Эйнштейна

а. Воспользовавшись симметриями $\mathbf{R}$, покажите, что тензор Риччи $\mathbf{Ric}$ симметричен ($R_{[\beta\delta]} = 0$).

б. Покажите, что $\mathbf{Ric}$ связан с $\mathbf{G}$ соотношением (13.49).

13.13. Конформный тензор Вейля W

а. Покажите, что конформный тензор Вейля (13.50) обладает теми же симметриями [(13.40), (13.41), (13.43)—(13.45)], что и тензор Римана.

б. Покажите, что тензор Вейля совершенно «не имеет следа», т. е. что

свертка $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ по любой паре каналов равна нулю. (13.56)

Таким образом, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно считать той частью **R**, след которой равен нулю, а $R_{\alpha\beta}$ можно считать следом **R**. Тензор **R** полностью определяется своим следом $R_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ [см. соотношение (13.50); напомним, что $R = R^{\alpha}{}_{\alpha}$].

в. Покажите, что в пространстве-времени **W** имеет 10 независимых компонент.

г. Покажите, что в n-мерном многообразии число независимых компонент **W** [определяемого соотношением (13.50) в модифицированной форме, сохраняющей (13.56)] равно

$$\begin{cases} \dfrac{n^2(n^2-1)}{12} - \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{при } n \geqslant 3, \\ 0 & \text{при } n \leqslant 3. \end{cases} \tag{13.57}$$

Таким образом, в многообразиях с одним, двумя и тремя измерениями тензор Вейля тождественно равен нулю и тензор Римана полностью определяется тензором Риччи.

§ 13.6. СОБСТВЕННАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА УСКОРЕННОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ

Физическое описание собственной системы отсчета

Физик, ставящий эксперимент на реактивном самолете (например, эксперимент в инфракрасной астрономии), может пользоваться сразу несколькими различными системами координат. Но особенно полезной оказывается система координат, покоящаяся по отношению ко всем приборам, привинченным к полу и стенам кабины самолета. Эта «собственная система отсчета» имеет прямоугольную решетку $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, связанную со стенами кабины, и одни или более часы, покоящиеся относительно этой решетки. О том, что эта собственная система отсчета ускоряется по отношению к локально лоренцевым системам, физик знает из того, что ему не удается свободно парить в кабине, или, с более высокой точностью, из показаний акселерометров. О том, что его собственная система отсчета поворачивается по отношению к локально лоренцевым системам, он знает по тому, что ощущает силы Кориолиса, или, с более высокой точностью, из поворотов осей гироскопов инерционной системы управления по отношению к стенам кабины.

В упражнении 6.8 проведено математическое рассмотрение такой ускоренной, вращающейся, но локально ортонормированной системы отсчета в плоском пространстве-времени. В этом параграфе то же самое делается для искривленного пространства-времени. В непосредственной близости от начала пространственной решетки $x^{\hat{j}} = 0$ (в области, столь мало протяженной в пространстве, что эффекты кривизны пренебрежимо малы) ни одно свойство системы координат не позволит сказать, является ли пространство-время плоским или искривленным. Следовательно, результаты

упражнения 6.8 должны быть со всеми подробностями применимы и к искривленному пространству-времени. Тем не менее поучительно будет заново обсудить эти и некоторые новые детали, используя мощный математический аппарат последних глав.

Начнем с уточнения используемой координатной решетки. Излагаемый ниже метод описания этой решетки является, по-видимому, наиболее естественным.

Построение координатной решетки для собственной системы в шесть этапов

1. Пусть τ — собственное время, измеренное по часам ускоренного наблюдателя (в приведенном выше примере — по часам, расположенным в центре кабины самолета). Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0(\tau)$ — мировая линия наблюдателя, изображенная на фиг. 13.4,*а*.
2. Наблюдатель переносит с собой ортонормированную тетраду $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ (фиг. 13.4,*а*), у которой

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u} = d\mathcal{P}_0/d\tau — 4\text{-скорость наблюдателя} \tag{13.58}$$

($\mathbf{e}_{\hat{0}}$ — указывает «направление времени» наблюдателя) и

$$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} \tag{13.59}$$

(ортонормированность).

Закон переноса тетрады наблюдателя

3. Тетрада изменяется от точки к точке вдоль мировой линии наблюдателя (по отношению к параллельному переносу):

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \tag{13.60}$$

$$\Omega^{\mu\nu} = a^\mu u^\nu - u^\mu a^\nu + u_\varkappa \omega_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} — \text{«генератор инфинитезимального преобразования Лоренца»} \tag{13.61}$$

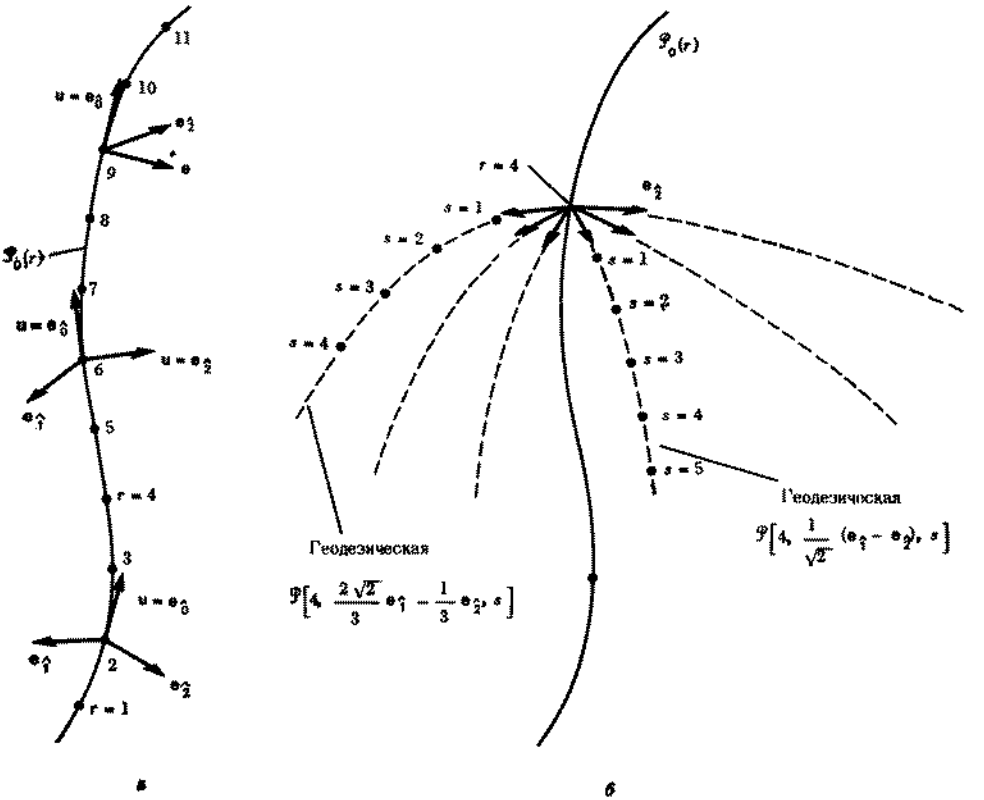
Этот закон переноса в искривленном пространстве-времени имеет тот же вид, что и в плоском (§ 6.5 и упражнение 6.8), поскольку кривизну можно почувствовать только на конечном расстоянии, но не на бесконечно малом расстоянии, которое входит в «первую скорость изменения вектора со временем» (принцип эквивалентности). Как и в упражнении 6.8,

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} — 4\text{-ускорение наблюдателя},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\begin{array}{l} \text{угловая скорость вращения пространственных базисных векторов } \mathbf{e}_{\hat{j}} \text{ по отношению к векторам, испытывающим перенос Ферми — Уолкера, т. е. по отношению к гироскопам инерционной системы управления} \end{array} \right), \tag{13.62}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Если $\boldsymbol{\omega}$ равно нулю, то наблюдатель переносит свою тетраду переносом Ферми — Уолкера (подобно переносу оси гироскопа). Если $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\omega}$ равны нулю, то он находится в состоянии



ФИГ. 13.4.
Собственная система отсчета ускоренного наблюдателя. *а* — ортонормированная тетрада наблюдателя $\{e_{\hat{\alpha}}\}$, переносимая вдоль его мировой линии $\mathcal{P}_0(\tau)$ [закон переноса (13.60)]. *б* — геодезические, выходящие из произвольного события $\mathcal{P}_0$ (4) на мировой линии наблюдателя перпендикулярно последней. Каждая геодезическая определяется однозначно 1) моментом собственного времени τ, в который она испущена, и 2) направлением (единичным касательным вектором $\mathbf{n} = d/ds = n^{\hat{j}} e_{\hat{j}}$, вдоль которого она испущена). Данное событие на геодезической фиксируется заданием τ, $\mathbf{n}$ и собственного расстояния s от исходной точки геодезической; отсюда и обозначения $\mathcal{P} = \mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]$ для данного события. В собственной системе отсчета наблюдателя этому событию приписываются координаты $x^{\hat{0}}(\mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]) = \tau$, $x^{\hat{j}}(\mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]) = sn^{\hat{j}}$.

свободного падения (движение по геодезической) и переносит свою тетраду параллельным образом, $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = 0$.

4. Наблюдатель строит свою собственную систему отсчета (локальную систему координат) аналогично тому, как в § 11.6 были построены нормальные римановы координаты. Из каждого события $\mathcal{P}_0(\tau)$ на своей мировой линии он проводит чисто пространственные геодезические (геодезические, ортогональные к $\mathbf{u} = d\mathcal{P}_0/d\tau$), аффинный параметр которых совпадает с собственной длиной:

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]. \tag{13.63}$$

τ: собственное время; указывает «исходную точку» геодезических

$\mathbf{n}$: касательный вектор к геодезической в исходной точке; указывает, «которая» из геодезических

s: собственная длина, отсчитываемая вдоль геодезической от исходной точки; указывает, «где» на данной геодезической

(См. фиг. 13.4,*б*.) Касательный вектор имеет единичную длину, поскольку аффинным параметром является собственная длина:

$$\mathbf{n} = (\partial \mathcal{G}/\partial s)_{s=0}, \quad n^{\mu} = (dx^{\mu}_{\mathcal{G}}/ds) \text{ вдоль геодезической},$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) = \frac{ds^2}{ds^2} = 1. \tag{13.64}$$

5. Через каждое событие вблизи мировой линии наблюдателя проходит ровно одна геодезическая из семейства $\mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]$. [Вдали это не выполняется; геодезические могут пересекаться как из-за наличия у наблюдателя ускорения (см. фиг. 6.3), так и из-за кривизны пространства-времени («отклонение геодезических»).]
6. Возьмем событие $\mathcal{P}$ вблизи мировой линии наблюдателя. Проходящая через него геодезическая берет свое начало на мировой линии наблюдателя в некоторый момент времени τ. Исходное направление этой геодезической есть $\mathbf{n} = n^{\hat{j}} \mathbf{e}_{\hat{j}}$, а длина ее участка между исходной точкой на мировой линии наблюдателя и событием $\mathcal{P}$ равна s. Тогда четыре числа

$$(x^{\hat{0}}, x^{\hat{1}}, x^{\hat{2}}, x^{\hat{3}}) \equiv (\tau, sn^{\hat{1}}, sn^{\hat{2}}, sn^{\hat{3}}) \tag{13.65}$$

позволяют естественным образом идентифицировать событие $\mathcal{P}$. Они и есть координаты $\mathcal{P}$ в собственной системе отсчета наблюдателя.

7. В более абстрактном виде эти координаты записываются как

$$x^{\hat{0}}(\mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]) = \tau,$$
$$x^{\hat{j}}(\mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]) = sn^{\hat{j}} = sn_{\hat{j}} = s\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_{\hat{j}}. \tag{13.65'}$$

В плоском пространстве-времени данная процедура и получающиеся координаты $x^{\hat{\alpha}}(\mathcal{P})$ совпадают с процедурой и получающимися в результате координатами $\xi^{\alpha'}(\mathcal{P})$ упражнения 6.8.

При вычислениях нужно знать не только систему координат, но и ее метрические коэффициенты и коэффициенты связности. К счастью, $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ и $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ необходимо знать лишь на мировой линии наблюдателя, где они имеют особенно простой вид. Только совсем неопытный наблюдатель будет пытаться использовать свою собственную систему отсчета вдали от своей мировой линии, где его решетка перестает быть ортонормированной и линии решетки, являющиеся геодезическими, могут даже пересекаться! (См. § 6.3.)

Вдоль мировой линии наблюдателя $\mathcal{P}_0(\tau)$ базисные векторы его координатной решетки всюду совпадают (по построению) с его ортонормированной тетрадой

$$\partial/\partial x^{\hat{\alpha}}|_{\mathcal{P}} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}, \tag{13.66}$$

и, следовательно, метрические коэффициенты равны

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} \text{ всюду вдоль } \mathcal{P}_0(\tau). \tag{13.67}$$

Некоторые из коэффициентов связности определяются законом переноса (13.60) ортонормированной тетрады наблюдателя:

Коэффициенты связности вдоль мировой линии наблюдателя

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \nabla_{\hat{0}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \mathbf{e}_{\hat{\beta}}\Gamma^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}\hat{0}} = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = -\mathbf{e}_{\hat{\beta}}\Omega^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}}.$$

Таким образом,

$$\Gamma^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}\hat{0}} = -\Omega^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}} \text{ всюду вдоль } \mathcal{P}_0(\tau). \tag{13.68}$$

Поскольку $\boldsymbol{\Omega}$ имеет вид (13.61), а 4-скорость и 4-ускорение наблюдателя в его собственной системе обладают компонентами $u_{\hat{0}} = -1$, $u_{\hat{j}} = 0$, $a_{\hat{0}} = 0$, эти коэффициенты связности равны

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{0}\hat{0}} = \Gamma_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}} = 0,\\
&\Gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{j}\hat{0}} = -\Gamma_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}} = +\Gamma_{\hat{j}\hat{0}\hat{0}} = +\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}} = a^{\hat{j}},\\
&\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{k}\hat{0}} = \Gamma_{\hat{j}\hat{k}\hat{0}} = -\omega^{\hat{i}}\varepsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}}
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{всюду}\\ \text{вдоль}\\ \mathcal{P}_0(\tau).\end{array} \tag{13.69a}$$

Остальные коэффициенты связности можно найти из уравнения геодезических, описывающего геодезические $\mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]$, выходящие с мировой линии наблюдателя. Согласно соотношению (13.65), координатное представление каждой такой геодезической имеет вид

$$x^{\hat{0}}(s) = \tau = \text{const}, \quad x^{\hat{j}}(s) = n^{\hat{j}}s,$$

откуда видим, что $d^2x^{\hat{\alpha}}/ds^2 = 0$ всюду вдоль геодезических, и уравнение геодезических принимает вид

$$0 = \frac{d^2x^{\hat{\alpha}}}{ds^2} + \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} \frac{dx^{\hat{\beta}}}{ds} \frac{dx^{\hat{\gamma}}}{ds} = \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{j}\hat{k}} n^{\hat{j}} n^{\hat{k}}.$$

Этому уравнению можно удовлетворить на мировой линии наблюдателя для всех пространственных геодезических (при всех $n^{\hat{j}}$) тогда и только тогда, когда

$$\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{j}\hat{k}} = \Gamma_{\hat{\alpha}\hat{j}\hat{k}} = 0 \text{ всюду вдоль } \mathcal{P}_0(\tau). \qquad (13.69б)$$

Значения коэффициентов связности (13.69) однозначно определяют частные производные метрических коэффициентов [см. уравнение (13.19′)]:

$$\left.\begin{aligned} &g_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{0}} = 0, \quad g_{\hat{j}\hat{k},\hat{l}} = 0, \\ &g_{\hat{0}\hat{0},\hat{j}} = -2a_{\hat{j}}, \quad g_{\hat{0}\hat{j},\hat{k}} = -\varepsilon_{\hat{0}\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\omega^{\hat{l}} \end{aligned}\right\} \text{всюду вдоль } \mathcal{P}_0(\tau). \qquad (13.70)$$

Эти производные вместе с условием ортонормированности $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}[\mathcal{P}_0(\tau)] = \eta_{\alpha\beta}$ позволяют записать линейный элемент вблизи мировой линии наблюдателя в виде

Метрика собственной системы отсчета и ее физическая интерпретация

$$ds^2 = -(1 + 2a_{\hat{j}}x^{\hat{j}})\,dx^{\hat{0}2} - 2(\varepsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}x^{\hat{k}}\omega^{\hat{l}})\,dx^{\hat{0}}dx^{\hat{j}} + \\ + \delta_{\hat{j}\hat{k}}\,dx^{\hat{j}}dx^{\hat{k}} + O(|x^{\hat{j}}|^2)\,dx^{\hat{\alpha}}dx^{\hat{\beta}}. \qquad (13.71)$$

Некоторые особенности этого линейного элемента заслуживают особого упоминания.

1. На мировой линии наблюдателя $\mathcal{P}_0(\tau)$, т. е. при $x^{\hat{j}} = 0$, $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^{\hat{\alpha}}dx^{\hat{\beta}}$.

2. Ускорение наблюдателя проявляется в поправке к

$$\delta g_{\hat{0}\hat{0}} = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}, \qquad (13.72а)$$

которая пропорциональна расстоянию вдоль направления ускорения. В случае плоского пространства-времени этот поправочный член получен в § 6.6.

3. Поворот наблюдателя по отношению к гироскопам инерционной системы управления проявляется в поправке к $g_{\hat{0}\hat{j}}$, которую можно переписать в трехмерных векторных обозначениях:

$$\delta g_{\hat{0}\hat{j}}\mathbf{e}_{\hat{j}} = -\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega} = +\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}. \qquad (13.72б)$$

4. На эти поправки первого порядка к линейному элементу никак не влияет кривизна пространства-времени, и они не несут никакой информации о кривизне. Кривизна начинает проявляться лишь во втором порядке $O(|x^{\hat{j}}|^2)$.

5. *В частном случае нулевого ускорения и нулевого вращения* ($\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} = 0$) *собственная система отсчета наблюдателя сводится*

к локально лоренцевой системе ($g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 0$) *повсюду вдоль его геодезической мировой линии*! В отличие от этого локально лоренцевы системы координат, построенные в ходе предыдущего изложения (локально лоренцевы координаты «в общем виде» в § 8.6, «нормальные римановы координаты» в § 11.6), являются локально лоренцевыми лишь в единственном событии.

В случае нулевого вращения и нулевого ускорения можно получить следующее выражение для метрики, содержащее члены второго порядка по $|x^{\hat{j}}|$:

$$ds^2 = (-1 - R_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}\hat{m}}x^{\hat{i}}x^{\hat{m}})\,dt^2 - \left(\frac{4}{3}R_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{m}}x^{\hat{i}}x^{\hat{m}}\right)dt\,dx^{\hat{j}} + \\ + \left(\delta_{\hat{i}\hat{j}} - \frac{1}{3}R_{\hat{i}\hat{l}\hat{j}\hat{m}}x^{\hat{l}}x^{\hat{m}}\right)dx^{\hat{i}}\,dx^{\hat{j}} + O(|x^{\hat{j}}|^3)\,dx^{\hat{\alpha}}\,dx^{\hat{\beta}} \quad (13.73)$$

(см., например, [156]). Здесь $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ — компоненты тензора Римана вдоль мировой линии $x^{\hat{j}} = 0$. Такие координаты называются «нормальными координатами Ферми».

УПРАЖНЕНИЯ

13.14. Силы инерции и силы Кориолиса

Ускоренный наблюдатель исследует траекторию свободно падающей частицы в момент, когда она пролетает через начало его собственной системы отсчета. Пусть

$$v \equiv (dx^{\hat{j}}/dx^{\hat{0}})\,\mathbf{e}_{\hat{j}} \quad (13.74)$$

— обычная скорость частицы. Покажите, что ее обычное ускорение по отношению к собственной системе отсчета наблюдателя равно

$$\frac{d^2x^{\hat{j}}}{dx^{\hat{0}2}}\,\mathbf{e}_{\hat{j}} = \underbrace{-a}_{\text{ускорение инерции}} \underbrace{-2\omega \times v}_{\text{ускорение Кориолиса}} \underbrace{+2(a\cdot v)\,v}_{\text{релятивистская поправка к ускорению инерции}}. \quad (13.75)$$

Здесь a — собственное 4-ускорение наблюдателя, а ω — угловая скорость, с которой вращаются пространственные базисные векторы [см. соотношения (13.62)]. [*Указание.* Воспользуйтесь уравнением геодезических для траектории частицы в точке $x^{\hat{j}} = 0$. *Примечание.* В плоском пространстве-времени этот результат был получен иным способом в упражнении 6.8.]

13.15. Группа вращений: метрика

(Продолжение упражнений 9.13, 9.14, 10.17 и 11.12.) Покажите, что в случае многообразия группы вращений $SO(3)$ существует метрика $\mathbf{g}$, совместная с ковариантной производной ∇. Дока-

УПРАЖНЕНИЯ

жите существование, выписав компоненты метрики в явном виде в некоординатном базисе генераторов $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. [*Ответ*:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{13.76}$$

Другими словами: если постулировать, что 1) многообразие группы вращений локально эвклидово, 2) генераторы инфинитезимальных вращений $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ ортонормированы $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ и 3) $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ подчиняются обычным коммутационным соотношениям группы вращений

$$[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\gamma, \tag{13.77}$$

то получающиеся при этом геодезические $SO(3)$ совпадают с кривыми, выбранными в качестве геодезических в упражнении 10.17.]

14. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ

**Эта глава целиком относится к курсу 2.
Необходимым подготовительным материалом для § 14.5, 14.6 являются гл. 4 (дифференциальные формы) и главы 10, 11 и 13. Эта глава нужна в качестве подготовительного материала для гл. 15 (тождества Бианки). Она полезна во многих приложениях теории гравитации (главы 23—40).**

§ 14.1. КРИВИЗНА — ИНСТРУМЕНТ, КОТОРЫЙ ДАЕТ ВОЗМОЖНОСТЬ ПОНЯТЬ ФИЗИКУ

Знание элементарной физики иногда позволяет нам избежать систематических расчетов, связанных с нахождением кривизны (например, частота колебаний пробной частицы; ускорение приливного воздействия вблизи тяготеющего центра; кривизна модели закрытого мира, имеющего вид 3-сферы; действие параллельного переноса на гироскоп или вектор; см. фиг. 1.1, 1.10 и 1.12 и дополнения 1.6 и 1.7); но в других случаях вычисление кривизны позволяет кратчайшим путем проникнуть в физику явлений. Эта глава предназначена как раз для таких случаев. В ней описаны три способа нахождения кривизны и приведены компоненты тензора кривизны Эйнштейна для плоской гравитационной волны [дополнение 14.4, соотношение (5)], для геометрии фридмановского мира (дополнение 14.5) и для шварцшильдовской геометрии как в статическом (упражнение 14.13), так и в динамическом (упражнение 14.16) случаях.

Достаточно взглянуть на сложное выражение для 4-геометрии [157]

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{-3^{1/2}} \cdot \left(\int \frac{v\,dx}{x}\right)^{-1} (-z/L)^{3-1/2}\,dt^2 + \\
&+ (x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{1+3^{1/2}} \left(\int \frac{v\,dx}{x}\right)^{1+2/3^{1/2}} (-z/L)^{-1+3-1/2}\,dx^2 + \\
&+ (x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{2+3^{1/2}} \left(\int \frac{v\,dx}{x}\right)^{1+2/3^{1/2}} (-z/L)^{-3-1/2}\,dy^2 + \\
&+ (x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{3+3^{1/2}} \left(\int \frac{v\,dx}{x}\right)^{1+2/3^{1/2}} (-z/L)^{-2-3-1/2} \times \\
&\times \left(\frac{v^2-1}{-1-z/L}\right) dz^2, \qquad (14.1)
\end{aligned}
$$

Ситуации, когда необходимо вычислять кривизну

чтобы понять, что зная кривизну, можно гораздо лучше разобраться в физической ситуации. То же самое относится и к любым другим сложным выражениям для метрики, которые получаются в результате решения уравнений Эйнштейна или встречаются в литературе. В любом таком случае удобный метод часто состоит в том, чтобы сначала найти кривизну, а уж затем добиться понимания.

Кривизна является простейшей локальной мерой геометрических свойств (см. дополнение 14.1). Нахождение кривизны поэтому будет хорошим первым шагом на пути к построению более исчерпывающей картины изучаемого пространства-времени.

Иногда мы сначала получаем выражение для метрики пространства-времени, а затем, чтобы понять его, приступаем к нахождению кривизны. Но чаще приходится сначала находить кривизну, на которую наложены определенные условия симметрии в пространстве и во времени, а затем с ее помощью отыскивать выражение для физически интересной метрики (звезды, гл. 23—26; космологические модели, гл. 27—30; коллапс и черные дыры, гл. 31—34; гравитационные волны, гл. 35—37).

«Стандартная процедура» вычисления кривизны

Основной «стандартный способ вычисления кривизны» иллюстрируется в дополнении 14.2. В этом дополнении одна за другой используются два типа полученных ранее формул. Первый тип формул [(1) и (2)] имеет вид $\Gamma \sim g\partial g$ и позволяет найти $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Второй тип формул (3) имеет вид $R \sim \partial\Gamma + \Gamma^2$ и позволяет найти компоненты тензора кривизны $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$.

Способы представления формул кривизны

После того как компоненты тензора кривизны вычислены, результаты можно представить несколькими полезными способами.

1. Можно образовать тензор Риччи $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ и скалярную кривизну $R = R^{\mu}{}_{\mu}$. 2. Можно образовать другие инварианты, например $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$. 3. Можно найти компоненты $R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ в разумным образом выбранной ортонормированной системе $\omega^{\hat{\alpha}} = L^{\hat{\alpha}}{}_{\beta}\,dx^{\beta}$. 4. Можно представить $R^{[\hat{\mu}\hat{\nu}]}{}_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]}$ в виде матрицы 6×6 (в случае четырех измерений; в случае же трех измерений в виде матрицы 3×3), в которой $[\hat{\mu}\hat{\nu}] = [\hat{0}\hat{1}]$, $[\hat{0}\hat{2}]$, $[\hat{0}\hat{3}]$, $[\hat{2}\hat{3}]$, $[\hat{3}\hat{1}]$, $[\hat{1}\hat{2}]$ обозначают строчки, а $[\hat{\alpha}\hat{\beta}]$ обозначают столбцы (упражнения 14.14 и 14.15). 5. Последний, но наиболее важный в общей теории относительности способ — можно образовать тензор Эйнштейна $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$, как это описано в § 14.2.

Способ вычислений, основные черты которого перечислены выше и который подробно описан в дополнении 14.2, применяется во всех тех случаях, когда стандартным способом воспользоваться быстрее, чем изучить или придумать лучший способ. Стандартный способ всегда предпочтительнее для студентов, занимающихся по укороченной программе, когда физическое понимание стоит

Вычисление кривизны с помощью вычислительной машины

на первом месте по сравнению с техническими навыками. Однако это скучный способ, более подходящий для вычислительной машины, чем для человека. Вычислительная машина может справиться даже с алгеброй (см. дополнение 14.3).

УПРАЖНЕНИЯ

14.1. Кривизна двумерного гиперболоида

Вычислите кривизну гиперболоида $t^2 - x^2 - y^2 = T^2 = \text{const}$ в $2+1$-мерном пространстве-времени Минковского, где $ds_3^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$. Покажите сначала, что интервалы на этой двумерной поверхности при соответствующем выборе координат α, ϕ на гиперболоиде могут быть выражены в виде $ds^2 = T^2(d\alpha^2 + \operatorname{sh}^2\alpha d\phi^2)$.

14.2. Выражение римановой кривизны через кривизну Риччи в случае двух и трех измерений

В случае двух измерений есть только одна независимая компонента кривизны R_{1212}. Ясно, что ту же самую информацию можно передать одной скалярной величиной R. Двумерное тождество $R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{12} R (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$, можно установить, если заметить, что это единственное тензорное выражение, образованное только с помощью R и метрики, которое задает $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ в виде линейной функции R и свертка которого имеет правильное значение $R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = R$. Установите соответствующее трехмерное тождество, выражающее R_{ijkl} через тензор Риччи R_{jk} и метрику.

14.3. Кривизна 3-сферы в ортонормированной системе

Вычислите тензор кривизны 3-сферы

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{14.2}$$

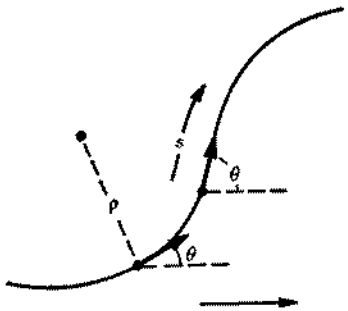
и 3-гиперболоида

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \tag{14.3}$$

Преобразуйте компоненты в координатном базисе $R^i{}_{jkl}$ к соответствующему ортонормированному базису, где они записываются $R^{\hat{i}}{}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}$. Представьте $R^{\hat{i}\hat{j}}{}_{\hat{k}\hat{l}} = R^{[\hat{i}\hat{j}]}{}_{[\hat{k}\hat{l}]}$ в виде матрицы 3×3 с соответствующим образом пронумерованными строками и столбцами.

Дополнение 14.1. РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ ВЗГЛЯД НА КРИВИЗНУ

1. Исторически отправной точкой является кривая линия на плоскости. Не существует никакого способа определить кривизну линии с помощью измерений, проводимых на самой линии («внутренних» измерений). Для этого нужно, например, знать азимутальный угол θ касательного вектора по отношению к некоторому фиксированному направлению в плоскости как функцию собственной длины



Направление, от которого отсчитывается азимутальный угол

кривой s, т. е. $\theta = \theta(s)$. Тогда кривизна $\varkappa$ и обратная ей величина — радиус кривизны ρ — задаются выражением $\varkappa(s) = 1/\rho(s) = d\theta(s)/ds$. С другой стороны, можно измерить отклонение y от касательной в перпендикулярном к ней направлении как функцию расстояния x вдоль этой касательной; тогда $\varkappa = 1/\rho = d^2y/dx^2$.

2. Это понятие было впоследствии распространено на случай искривленной поверхности, погруженной в плоское (эвклидово) 3-пространство. Отклонение z гладкой искривленной поверхности от плоской поверхности, касательной к ней в данной точке, описывается в окрестности этой точки квадратичным выражением

$$z = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2.$$

Поворотом осей на соответствующий угол α,

$$x = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha, \quad y = -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha,$$

это выражение приводится к виду

$$z = \frac{1}{2}\varkappa_1\xi^2 + \frac{1}{2}\varkappa_2\eta^2,$$

где

$$\varkappa_1 = 1/\rho_1, \quad \varkappa_2 = 1/\rho_2$$

представляют собой две «главные кривизны» поверхности.

3. Гаусс [158] начал разрабатывать идею о том, как определить кривизну с помощью измерений, проводимых исключительно на самой поверхности («обществом муравьев»). Из данной точки $\mathcal{P}$ на поверхности проведем отрезок геодезической этой поверхности собственной длины ε, измеренной на самой поверхности. Повторим этот процесс для одной и той же исходной точки, но для разных направлений выхода геодезических. Получим бесконечное число точек, образующих «окружность». Найдем ее собственную длину опять с помощью измерений, проводимых исключительно на самой поверхности. Результат такого «внутреннего измерения» можно вычислить с помощью метрики, соответствующей данному погружению:

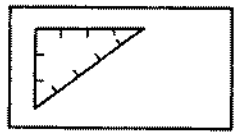
$$ds^2 = dz^2 + d\xi^2 + d\eta^2 \text{ (эвклидово 3-пространство)},$$
$$= [(\varkappa_1\xi\,d\xi + \varkappa_2\eta\,d\eta)^2 + (d\xi^2 + d\eta^2)] \text{ (внутренняя метрика искривленной 2-геометрии)}.$$

Проведя соответствующие выкладки, мы увидим, что длина окружности отличается от эвклидова значения $2\pi\varepsilon$ на относительную величину, пропорциональную квадрату ε, а именно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{6}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{\text{длина окружности}}{2\pi\varepsilon}\right) = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Обратим особое внимание на первый знак равенства. Гаусс не скрывал радости, которую он испытал, обнаружив, что нечто, определяемое исключительно изме-

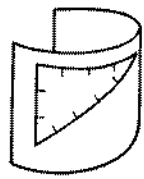
рениями на самой поверхности, совпадает с произведением двух величин $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, для определения каждой из которых по отдельности нужны измерения, внешние по отношению к этой поверхности.



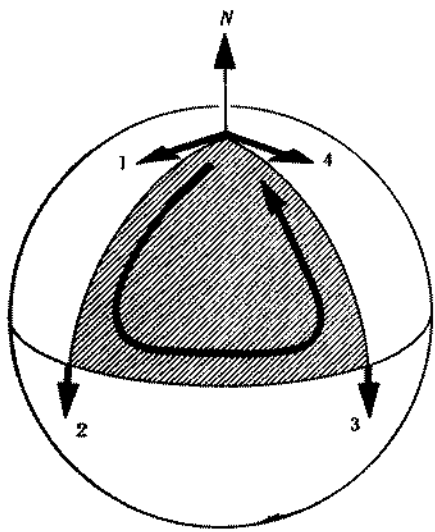
4. Различие между «внешней» и «внутренней» кривизнами можно подытожить следующим образом:

$$(\text{внешняя кривизна}) = \varkappa = (\varkappa_1 + \varkappa_2) \ (\text{см}^{-1}),$$

$$\begin{pmatrix}\text{внутренняя, или}\\ \text{гауссова кривизна}\end{pmatrix} = \varkappa_1\varkappa_2 \ (\text{см}^{-2})$$



(последняя величина совпадает с инвариантом скалярной кривизны 2-геометрии R, уменьшенным вдвое). Начертим на плоском листе бумаги треугольник со сторонами 3 : 4 : 5; свернем бумагу в трубку. Такой изгиб оставляет внутреннюю эвклидову 2-геометрию листа бумаги неизменной. Внутренняя гауссова кривизна поверхности тоже не меняется; она сохраняет свое нулевое эвклидово значение ($\varkappa_2$ не равно нулю, $\varkappa_1$ равно нулю; произведение $\varkappa_1\varkappa_2$ равно нулю). Однако внешняя кривизна меняется от $\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$ до ненулевого значения $\varkappa_1 + \varkappa_2 \neq 0$.

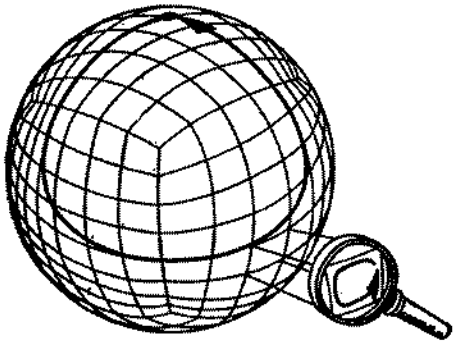


5. Кривизна, с которой мы имеем дело в данной главе, есть внутренняя кривизна пространства-времени, т. е. кривизна, при определении которой не только не используется погружение в какое-либо гипотетическое плоское многообразие более высокой размерности, но даже не допускается мысли о возможности такого погружения (концепция Римана, Клиффорда и Эйнштейна, подразумевающая, что геометрия динамична, принимает самое непосредственное участие в физических явлениях и отнюдь не является каким-то данным нам богом абсолютным совершенством, не имеющим никакого отношения к материи и энергии).

6. Кривизна геометрии пространства-времени приводит к тому, что любое пространственноподобное сечение (3-геометрия; «гиперповерхность начальных значений») пространства-времени также искривлено (см. «соотношения Гаусса и Кодацци» в гл. 21, где рассмотрена проблема начальных значений в геометродинамике).

7. Поворот вектора в результате параллельного переноса по замкнутому контуру дает нам в случае трех и четырех измерений определение кривизны столь же полезное, как и в случае двух измерений. (В криволинейной двумерной геометрии в данной точке есть только одна плоскость. Поэтому для описания гауссовой кривизны в этой точке требуется всего лишь одно число. В случае трех и четырех

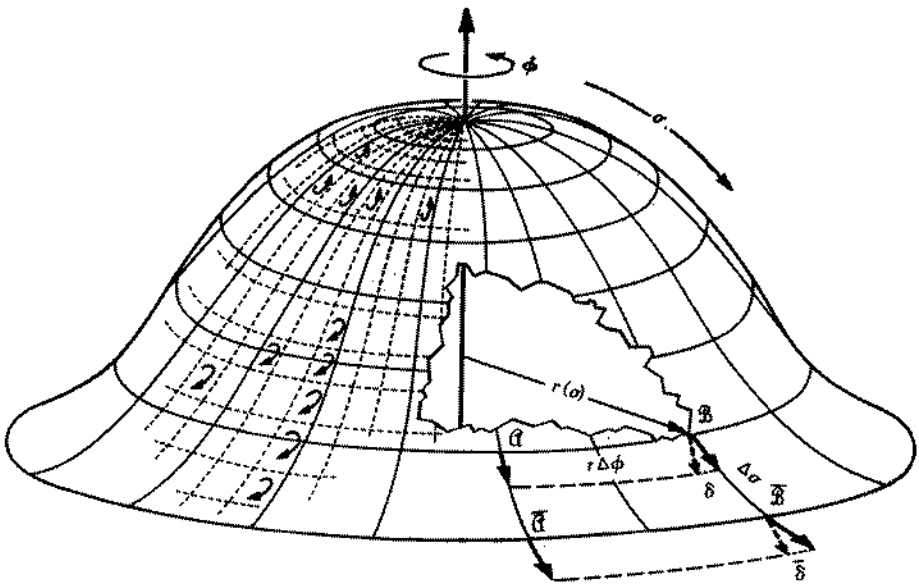
измерений через каждую точку проходит большее число независимых плоскостей, а следовательно, для описания кривизны требуется больше чисел.) На рисунке начальное положение вектора обозначено цифрой 1 (северный полюс). Он относится параллельным образом (положения 2, 3, . . .) вокруг сферического треугольника, все углы которого равны 90°. По возвращении в исходную точку вектор (положение 4) оказывается повернутым на 90°:



$$\left(\begin{matrix}\text{гауссова}\\ \text{кривизна}\end{matrix}\right) = \frac{(\text{угол поворота})}{\left(\begin{matrix}\text{обойденная}\\ \text{площадь}\end{matrix}\right)} = \frac{(\pi/2)}{(1/8)\,(4\pi a^2)} = \frac{1}{a^2}$$

(положительна; направление поворота совпадает с направлением обхода).

8. Оставаясь пока для простоты в искривленном двумерном многообразии, опишем кривизну 2-поверхности с помощью 2-формы («клеточной структуры»), определенной на всей поверхности. Число клеток внутри каждого данного контура равно углу в радианах (в десятых, в сотых долях радиана и т.д., в зависимости от того, насколько мелким выбрано разбиение), на который поворачивается вектор, обнесенный параллельно вокруг этого контура. Вклад данной клетки считается положительным или отрицательным в зависимости от того, совпадает или не совпадает направление указанной на ней стрелки (см. вид в увеличительное стекло) с направлением обхода контура.



9. 2-форма кривизны для изображенной поверхности вращения («тропический шлем»), имеющей метрику $ds^2 = d\sigma^2 + r^2(\sigma)\,d\phi^2$, равна

$$\text{кривизна} = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\sigma^2}\,d\sigma \wedge r\,d\phi \qquad (1)$$

(положительна на тулье шлема и отрицательна на полях, как указано стрелками в «клетках 2-формы» слева). «Смысл» проясняется при погружении поверхности в эвклидово 3-пространство — удобный способ наглядного представления; но гораздо важнее понятие 2-геометрии, определяемой внутренними измерениями, не связанными ни с каким погружением.

10. На этом двумерном примере удается как нигде четко и со всеми вычислительными подробностями показать, каким образом длины («метрика») определяют кривизну. Он служит иллюстрацией того, «что происходит за кулисами» тех математических манипуляций, которые производятся в данной главе с 1-формами и 2-формами в четырехмерном пространстве-времени.

а. Результирующий поворот при обходе вокруг элемента поверхности $\mathscr{A}\mathscr{B}\overline{\mathscr{B}}\overline{\mathscr{A}}\mathscr{A}$ равен $\delta - \bar{\delta}$ (вектор не отклоняется ни вправо, ни влево при переносе вдоль меридианов $\mathscr{A}\overline{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{B}\overline{\mathscr{B}}$).

б. Поворот вектора при переносе из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$ по отношению к системе координат (направлениям меридианов) равен

$$(\text{угол } \delta) = \frac{\text{длина дуги}}{\text{длина вектора}} = \frac{r(\sigma+d\sigma)\,\Delta\phi - r(\sigma)\,\Delta\phi}{d\sigma} = \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_\sigma \Delta\phi.$$

в. Аналогично поворот вектора при переходе из $\overline{\mathscr{A}}$ в $\overline{\mathscr{B}}$ равен

$$(\text{угол } \bar{\delta}) = \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{\sigma+\Delta\sigma} \Delta\phi.$$

г. Результирующий поворот составляет

$$\delta - \bar{\delta} = -\left(\frac{d^2r}{d\sigma^2}\right)_\sigma \Delta\sigma\Delta\phi.$$

д. Если теперь выразить его в виде формы, то сразу получим соотношение (1).

е. Идейная и вычислительная стороны в случае четырех измерений сложнее в основном потому, что в интересующей нас точке ориентация изучаемой поверхности может быть выбрана различным образом.

11. Оставаясь в рамках данного двумерного примера, можно сразу же перевести эти геометрические идеи на язык форм. Пробный вектор $A^i = (A^1, A^2)$, будучи обнесенным вокруг границы элемента поверхности, возвращается в исходную точку, слегка изменив свое направление:

$$-(\text{изменение } A^i) = \mathscr{R}^i{}_j A^j. \tag{2}$$

а. Для большей определенности удобно взять в качестве базисных 1-форм $\omega^{\hat{1}} = d\sigma$ и $\omega^{\hat{2}} = r\,d\phi$, за $A^{\hat{1}}$ принять компоненту A в направлении увеличения σ и за $\hat{A}^2$ — компоненту A в направлении увеличения ϕ. Матрица $\mathscr{R}^{\hat{i}}{}_{\hat{j}}$ является матрицей вращения, которая изменяет направление, но не длину вектора (нулевые диагональные элементы); таким образом, в нашем случае

$$\| \mathscr{R}^{\hat{i}}{}_{\hat{j}} \| = \begin{Vmatrix} 0 & \mathscr{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} \\ -\mathscr{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

В разбираемом примере $\mathscr{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}}$, очевидно, представляет собой угол, на который поворачивается вектор A при параллельном обнесении вокруг элемента поверхности.

5. Но поворот пока остается «неопределенным», поскольку еще не указан размер элемента поверхности. Последний удобнее всего представлять себе как элементарный параллелограмм, определяемый двумя векторами («бивектор»). Таким образом, $\mathscr{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}}$, или, конкретнее, единственный элемент, который имеет значение $\mathscr{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}}$ («угол поворота»), нужно считать математическим объектом (2-формой), наделенным двумя входными каналами, в которые мы вводим эти два вектора и получаем на выходе число (угол в радианах). В примере с тропическим шлемом из соотношения (1) имеем

$$\mathscr{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\sigma^2}\,\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{2}}. \tag{4}$$

Теперь понятно, почему $\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu}$ в тексте называются «2-формами кривизны».

в. В тексте показано, как из таких выражений находить компоненты тензора кривизны Римана; в нашем случае, например,

$$R^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = -R^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{2}\hat{1}} = (-1/r)\,(d^2r/d\sigma^2)\ (\text{коэффициенты при } \omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{2}}$$

$$\text{или при } \omega^{\hat{2}}\wedge\omega^{\hat{1}}).$$

г. Обобщая на случай четырех измерений, мы понимаем под $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ множитель, который надо умножить на три числа, чтобы получить четвертое. Получающееся в результате число представляет собой изменение (с обратным знаком), которое претерпевает α-компонента вектора после параллельного переноса последнего по замкнутому контуру, задаваемому, например, параллелограммом, построенным на двух векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Множителями, на которые следует умножить $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, являются: 1) компонента вектора $\mathbf{A}$ в направлении β, 2) и 3) $\mu\nu$-компонента участка поверхности, занимаемого параллелограммом, $(u^{\mu}v^{\nu} - u^{\nu}v^{\mu})$. Таким образом,

$$\delta A^{\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta[\mu\nu]}A^{\beta}r(u^{\mu}v^{\nu} - u^{\nu}v^{\mu}).$$

Дополнение 14.2. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ (ИЛЛЮСТРИРУЕМОЕ НА ПРИМЕРЕ ГЛОБУСА)

В простейшем методе вычисления компонент $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ тензора кривизны Римана, обладающем универсальной применимостью, в качестве исходных данных используются метрические коэффициенты $g_{\mu\nu}$ и применяется следующая схема:

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow{\Gamma\sim\partial g} \Gamma_{\mu\alpha\beta} \longrightarrow \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \xrightarrow{R\sim\partial\Gamma+\Gamma\Gamma} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}.$$

Формулы, которые требуются на этих трех этапах, имеют вид

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right), \tag{1}$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\alpha}. \tag{3}$$

Метрика поверхности двумерной сферы радиуса a имеет вид

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{4}$$

Для вычисления кривизны стандартным методом воспользуемся формулой для ds^2 как таблицей значений g_{kl}. Она дает $g_{\theta\theta} = a^2$, $g_{\theta\phi} = 0$, $g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2\theta$. С помощью формулы (1) найдем те шесть коэффициентов $\Gamma_{jkl} = \Gamma_{jlk}$, которые могут иметь различные значения (в случае четырех измерений их будет 40):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi\phi} &= -a^2 \sin\theta\cos\theta = -\Gamma_{\phi\phi\theta}, \\ \Gamma_{\theta\theta\theta} &= \Gamma_{\phi\phi\phi} = 0, \\ \Gamma_{\theta\theta\phi} &= \Gamma_{\phi\theta\theta} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Поднимем первый индекс:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} &= \operatorname{ctg}\theta, \\ \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} &= \Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} = 0 = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}. \end{aligned} \tag{6}$$

Выберем подходящую компоненту кривизны (которая не обращается автоматически в нуль из-за элементарной симметрии $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$ и которая не была вычислена ранее в другом виде с помощью соотношения $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$). В рассматриваемом двумерном случае есть только одна такая компонента (в случае четырех измерений их 21); она равна

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \frac{\partial\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}}{\partial\phi} + \Gamma^{\theta}{}_{k\theta}\Gamma^{k}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}{}_{k\phi}\Gamma^{k}{}_{\phi\theta} =$$

$$= \frac{\partial\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}}{\partial\theta} - 0 + 0 - \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta\operatorname{ctg}\theta;$$

таким образом,

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta, \tag{7}$$

или

$$R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = \frac{1}{a^2}. \tag{8}$$

Выполнив свертку, получим компоненты тензора Риччи

$$R^{\theta}{}_{\theta} = R^{\phi}{}_{\phi} = \frac{1}{a^2}, \quad R^{\theta}{}_{\phi} = 0, \tag{9}$$

а свернув еще раз, получим скалярную кривизну

$$R = 2/a^2. \tag{10}$$

Удобной ортонормированной системой в этом многообразии является

$$\omega^{\hat{\theta}} = a\,d\theta, \quad \omega^{\hat{\phi}} = a\sin\theta\,d\phi. \tag{11}$$

В более общем виде запишем $\omega^{\hat{\alpha}} = L^{\hat{\alpha}}{}_{\beta}\,dx^{\beta}$. Преобразование тензора к ортонормированным компонентам в этом простом, но поучительном примере диагональной

метрики сводится к умножению на нормировочные множители — по одному на каждый индекс тензора. Так, например, $v^{\hat{\theta}} = av^{\theta}$, $v^{\hat{\phi}} = a \sin\theta v^{\phi}$, $v_{\hat{\theta}} = a^{-1}v_{\theta}$, $v_{\hat{\phi}} = (a \sin\theta)^{-1}v_{\phi}$. Аналогично, зная $R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta$, находим компоненты тензора кривизны

$$R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{1}{a^2} = R^{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} \tag{12}$$

в ортонормированной системе.

Дополнение 14.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Исследования в физике гравитации и в общей теории относительности часто сопровождаются длинными аналитическими преобразованиями, требующими особой тщательности и внимания, которые необходимы для нахождения таких величин, как тензоры кривизны Эйнштейна и Римана в данной метрике, дивергенция данного тензора энергии-импульса, уравнения в тетрадах Ньюмана — Пенроуза при данных алгебраических допущениях. Такие выкладки по своей логической структуре дедуктивны и достаточно просты, чтобы с ними могли справляться вычислительные машины. Начиная с 1966 г. вычислительные машины широко используются для решения такого рода задач.

Существует несколько машинных языков, на которых исследователь может запрограммировать свои аналитические преобразования. Специалист по вычислительной технике может счесть удобным работать с языком, ориентированным на машину, таким, как LISP (см., например, [159, 160]). Однако большинство тех, кто занимается приложениями общей теории относительности, предпочтут языки, ориентированные на пользователя, такие, например, как REDUCE (созданный Хирном [160] и приспособленный для машин IBM360, IBM370 и PDP10), ALAM (созданный Динверно [161] и приспособленный для машин системы Atlas), CAMAL (созданный Бартоном, Бурном и Фитчем [162] и приспособленный для машин системы Atlas) и FORMAC (созданный Тоби и др. [163] и приспособленный для машин IBM 7090, 7094, 360 и 370). Обзор того, что делается в этом направлении, см. в работе [164]. Здесь мы ограничимся рассмотрением языка FORMAC, наиболее доступного и наиболее широко используемого, хотя этот язык, возможно, и не самый лучший (см., например, [161]). Для аналитических преобразований FORMAC является приблизительно тем же, чем были первые, самые примитивные варианты ФОРТРАНА для численных расчетов.

FORMAC оперирует с алгебраическими выражениями, включающими: числовые константы, например 1/3; символические константы, например x или u; некоторые элементарные функции, например $\sin(u)$ или $\exp(x)$; символические функции нескольких переменных, например $f(x, u)$ или $g(u)$. Этот язык позволяет, например, сложить $ax + bx^2$ с $2x + (3 + b)x^2$ и получить $(a + 2)x + (3 + 2b)x^2$; он позволяет найти частную производную от выражения $x^2uf(x, u) + \cos x$ по x в виде

$$2xuf(x, u) + x^2u\partial f(x, u)/\partial x - \sin(x).$$

Он позволяет выполнить на машине все алгебраические операции и все операции дифференциального исчисления, которые может выполнить человек, но при этом не допускает ошибок! К сожалению, с его помощью нельзя выполнить аналитическое интегрирование: логически интегрирование представляет собой не дедуктивную, а индуктивную операцию.

Язык PL/1 может использоваться как одновременно с языком FORMAC, так и независимо от него. PL/1 оперирует с цепочками символов, например Z/1 × 29—+/. В нем заложена логика символов; он позволяет установить тождественность двух цепочек; с его помощью в цепочки можно вводить новые символы и убирать старые; но в нем не заложены правила алгебры и дифференциального исчисления. Поэтому он используется в основном как приложение к языку FORMAC (хотя с точки зрения обеспечения вычислительных машин FORMAC является приложением к PL/1).

Существует целый ряд программ на языке FORMAC для нахождения тензора Эйнштейна по заданным компонентам метрики и для других вычислений, созданных многочисленными предыдущими исследователями (см., например, [165—167]). Однако программирование на языке FORMAC не представляет особого труда, поэтому для каждой данной задачи обычно пишется своя собственная программа. При этом могут возникнуть трудности, связанные с тем, что для выполнения всех аналитических преобразований не хватает оперативной памяти машины. Например, продифференцировав несколько раз выражение, умещающееся на половине странички, можно получить в результате столь громоздкое выражение, что для него не хватит памяти ни одной из существующих машин!

Исследователи, программирующие на языке FORMAC, перед которыми встает проблема памяти, при решении своих задач пользуются несколькими различными приемами. Один из них сводится к удалению из памяти ненужных частей программы и системы FORMAC. Для этой цели, например, Клеменс и Матцнер [168] создали процедуры PURGE и KILL. Другой прием состоит в том, чтобы получать ответ данной вычислительной процедуры по частям, имеющим допустимый объем, и выводить эти части из оперативной памяти на дисковую память. Затем эти части необходимо соединить вместе — задача, которую невозможно решить с помощью одного только языка FORMAC и даже с помощью комбинации FORMAC и PL/1; однако Хартл справился с этой задачей (см. [169]), используя FORMAC, PL/1 и процедуры оперирования данными на машинах IBM под названием SORT.

§ 14.2. НАХОЖДЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭЙНШТЕЙНА

Согласно Эйнштейну, распределение материи в пространстве не позволяет сразу же во всех подробностях описать локальную кривизну пространства. Тензор энергии-импульса дает информацию только о некоторой комбинации компонент тензора кривизны Римана — комбинации, которая образует тензор Эйнштейна. В гл. 13 описаны два эквивалентных способа нахождения тензора Эйнштейна: 1) последовательным свертыванием тензора Римана:

Три способа нахождения тензора Эйнштейна из тензора Римана

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},$$
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R \qquad (14.4)$$

[соотношения (13.48) и (13.49)] и 2) образованием тензора, дуального тензору Римана, с последующей сверткой:

$$G_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \equiv (*R^*)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} R^{[\mu\nu]}{}_{[\rho\sigma]} \varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} = -\delta^{\rho\sigma\gamma\delta}_{\alpha\beta\mu\nu} R^{[\mu\nu]}{}_{[\rho\sigma]}, \quad (14.5a)$$

$$G_\beta{}^\delta = G_{\alpha\beta}{}^{\alpha\delta} \quad (14.5б)$$

[соотношения (13.46) и (13.47)]. Третий способ, который, как правило, лучше обоих предыдущих, получается объединением (14.5а) и (14.5б):

$$G_\beta{}^\delta = G^\cdot{}_\beta = -\delta^{\delta\rho\sigma}_{\beta\mu\nu} R^{[\mu\nu]}{}_{[\rho\sigma]}. \quad (14.6)$$

[*Примечание.* В любой системе отсчета, как в ортонормированной, так и в неортонормированной, тензор перестановок $\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}$ имеет компоненты

$$\delta^{\delta\rho\sigma}_{\beta\mu\nu} = \delta_{\beta\mu\nu}{}^{\delta\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{если } \delta\rho\sigma \text{ — четная перестановка } \beta\mu\nu; \\ -1, & \text{если } \delta\rho\sigma \text{ — нечетная перестановка } \beta\mu\nu; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

чтобы убедиться в этом, нужно просто вычислить $\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}$, воспользовавшись определением (3.50з) и компонентами $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ и $\varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}$ из (8.10).] Выражение (14.6) для тензора Эйнштейна, выписанное в явном виде, гласит

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= -(R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{31}{}_{31}), \\ G^1{}_1 &= -(R^{02}{}_{02} + R^{03}{}_{03} + R^{23}{}_{23}), \\ G^0{}_1 &= \quad R^{02}{}_{12} + R^{03}{}_{13}, \\ G^1{}_2 &= \quad R^{10}{}_{20} + R^{13}{}_{23} \end{aligned} \quad (14.7)$$

и т. д.; каждая последующая компонента определяется аналогичной формулой, которую можно получить с помощью очевидной перестановки индексов.

§ 14.3. БОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ

Стандартный метод вычисления кривизны непроизводителен

Если ответ задачи или результат вычислений не прост, то его нельзя получить простым способом. Но если громоздкие вычисления приводят к короткому ответу, то нужно попытаться улучшить метод расчета. Во многих хорошо известных приложениях общей теории относительности метрика имеет такой вид, что многие компоненты $g_{\mu\nu}$, $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ и $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ обращаются в нуль; во всех этих случаях нахождение кривизны стандартным методом (дополнение 14.2) связано с большим количеством «непроизводительных затрат». Приходится вычислять многие из $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$, которые оказываются равными нулю. Приходится проверять множество слагаемых типа — $\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}$, равных нулю, либо сокращать их с другими такими же членами. Существуют две другие процедуры, позволяющие частично избавиться от этих «непроизводи-

Методы, позволяющие избавиться от «непроизводительных затрат»:

тельных затрат». Метод «геодезического лагранжиана» дает экономичный способ нахождения $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Метод, основанный на «2-формах кривизны», связан с полной перестройкой всей схемы и позволяет вычислить как связность, так и кривизну.

1) метод геодезического лагранжиана

Метод геодезического лагранжиана лишь ненамного улучшает стандартный метод, но зато он требует довольно скромных затрат времени на изучение вариационного исчисления — затрат, которые так или иначе окупаются в других проблемах математики и физики.

2) метод 2-форм кривизны

В отличие от него метод 2-форм кривизны гораздо эффективнее, но зато требует гораздо больших затрат времени, связанных с изучением математики 1-форм и 2-форм, чем считается необходимым в рамках обычного вводного курса по теории относительности. Однако каждый, кому предстоит многодневная работа по вычислению кривизны, поступит правильно, если изучит алгоритм, основанный на 2-формах кривизны.

§ 14.4. МЕТОД ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ЛАГРАНЖИАНА

Обычно считается, что коэффициенты связности $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ должны быть известны до того, как записывается уравнение геодезических

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0. \tag{14.8}$$

(Здесь и ниже точка означает дифференцирование по аффинному параметру λ.) Однако такой ход рассуждений можно обратить. Выписав уравнения геодезических, можно затем из них найти коэффициенты связности. Например, на 2-сфере, рассмотренной в дополнении 14.2, уравнения геодезических имеют вид

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 = 0, \tag{14.9θ}$$

$$\ddot{\phi} + 2\operatorname{ctg}\theta\,\dot{\phi}\dot{\theta} = 0. \tag{14.9ϕ}$$

Из первого уравнения видно, что $\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$; из второго уравнения видно, что $\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \operatorname{ctg}\theta$; отсутствие каких-либо других членов показывает, что все остальные коэффициенты $\Gamma^{i}{}_{jk}$ равны нулю.

Первый основной принцип, таким образом, ясен: наличие уравнения геодезических, записанного в явном виде, эквивалентно знанию всех коэффициентов связности $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$.

Второй принцип утверждает нечто большее: уравнение геодезических можно написать, не вычисляя $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Чтобы получить уравнение геодезических, нужно лишь вспомнить (см. дополнение 13.3), что геодезической является параметризованная кривая, на которой интеграл

$$I = \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\,d\lambda \tag{14.10}$$

4 этапа метода геодезического лагранжиана:

достигает экстремума в том смысле, что

$$\delta I = 0.$$

1) записываем I в простой форме

Когда этот вариационный принцип применяется на практике, *первый этап состоит в том, чтобы переписать выражение (14.10) в самом простом возможном виде, подставив конкретные значения $g_{\mu\nu}$ для решаемой задачи.* Если интерес представляют лишь сами геодезические, то многие интегралы движения можно выписать уже на этом этапе, даже не проводя варьирования (см. гл. 25, где рассмотрено движение по геодезическим в шварцшильдовской геометрии, в особенности § 25.2, посвященный законам сохранения и интегралам движения). Чтобы вычислить $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$, необходимо проварьировать каждую координату по очереди и получить четыре уравнения. Затем эти уравнения нужно преобразовать к такому виду, когда на первом месте стоят члены $\ddot{x}^{\mu}$. В этой форме они должны в точности представлять собой уравнения геодезических (14.8). Следовательно, можно сразу же выписать $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$, которые являются коэффициентами в этих четырех уравнениях. Завершающий этап вычисления кривизны этим методом совпадает с аналогичным этапом в стандартном методе, использующим формулы вида $R \sim \partial\Gamma + \Gamma\Gamma$, которые выписываются обычным образом (дополнение 14.2); как только возникает необходимость в данном Γ, его можно легко найти, просмотрев уравнения геодезических. Данная процедура легче всего усваивается на конкретном примере, и такой пример приведен в дополнении 14.4.

2) варьируем I и получаем уравнение геодезических

3) находим $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

4) вычисляем $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ и т. д. стандартным методом

УПРАЖНЕНИЕ

14.4. Вывод уравнений Эйнштейна для закрытого фридмановского мира при помощи метода геодезического лагранжиана

Линейный элемент, который представляет интерес в данном случае, имеет вид (см. гл. 27)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)].$$

а. Запишите вариационный интеграл (14.10) для геодезических в этой метрике, затем последовательно проварьируйте t, χ, θ и ϕ; в результате после некоторой перегруппировки членов получатся четыре уравнения $0 = \ddot{t} + \ldots$, $0 = \ddot{\chi} + \ldots$, и т. д., выражающие коэффициенты Γ в форме (14.8).

б. Используя такое представление в качестве таблицы коэффициентов Γ, вычислите $R^{\hat{t}}{}_{\chi\mu\nu}$ и $R^{\chi}{}_{\theta\mu\nu}$, из которых отличны от нуля только $R^{\hat{t}}{}_{\chi\hat{t}\chi}$ и $R^{\chi}{}_{\theta\chi\theta}$ (следствие полной эквивалентности всех направлений, касательных к сфере $\chi\theta\phi$).

в. Перейдите к ортонормированной системе с $\omega^{\hat{t}} = dt$, $\omega^{\hat{\chi}} = a\,d\chi$, $\omega^{\hat{\theta}} = ?$, $\omega^{\hat{\phi}} = ?$ и вычислите в ней $R^{\hat{t}\hat{\chi}}{}_{\hat{t}\hat{\chi}}$ и $R^{\hat{\theta}\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}\hat{\theta}}$. Объ-

2 УПРАЖНЕНИЕ

ясните, как можно, воспользовавшись симметрией, выразить все остальные компоненты через эти две.

г. Воспользовавшись соотношениями (14.7), найдите все независимые компоненты тензора Эйнштейна $\hat{G}^{\mu}{}_{\hat{\nu}}$. (*Ответ*: см. дополнение 14.5.)

Дополнение 14.4. МЕТОД ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ЛАГРАНЖИАНА В НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ СОКРАЩАЕТ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ

Цель. Найти кривизну для линейного элемента

$$ds^2 = L^2\,(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2) - 2dudv, \tag{1}$$

где L и β являются функциями одного только u. (Эта метрика рассматривается в качестве примера гравитационной волны в § 35.9—35.12.)

Метод. Найдем $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ из уравнений геодезических, вытекающих из вариационного принципа (14.10), а затем вычислим $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \sim \partial\Gamma + \Gamma^2$ по схеме, описанной в дополнении 14.2.

Этап 1. Выписываем вариационный интеграл. Для рассматриваемой метрики уравнение (14.10) требует, чтобы $\delta I = 0$, где

$$I = \int \left[\frac{1}{2}\,L^2\,(e^{2\beta}\dot{x}^2 + e^{-2\beta}\dot{y}) - \dot{u}\dot{v}\right] d\lambda. \tag{2}$$

Мировая линия, на которой этот интеграл достигает экстремума является геодезической.

Этап 2. Варьируем по очереди координаты мировой линии как функции λ. Сначала проварьируем $x\,(\lambda)$, фиксировав функции $y\,(\lambda)$, $u\,(\lambda)$ и $v\,(\lambda)$. В этом случае

$$\delta I = \int (L^2e^{2\beta}\dot{x})\,\delta\dot{x}\,d\lambda = -\int (L^2e^{2\beta}\dot{x})^{\cdot}\,\delta x\,d\lambda.$$

Требование $\delta I = 0$ для данной (среди прочих) вариации означает

$$0 = (L^2e^{2\beta}\dot{x})^{\cdot} = L^2e^{2\beta}\ddot{x} + \dot{x}\dot{u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,(L^2e^{2\beta}).$$

Варьируя таким же образом y, u и v, получаем

$$0 = (L^2e^{-2\beta}\dot{y})^{\cdot} = L^2e^{-2\beta}\ddot{y} + \dot{y}\dot{u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,(L^2e^{-2\beta}),$$

$$0 = \ddot{v} + \frac{1}{2}\,\dot{x}^2\,\frac{\partial}{\partial u}\,(L^2e^{2\beta}) + \frac{1}{2}\,\dot{y}^2\,\frac{\partial}{\partial u}\,(L^2e^{-2\beta}),$$

$$0 = \ddot{u}.$$

Этап 3. Перегруппировываем члены, чтобы впереди стояли $\ddot{x}^{\mu}$. Если этот этап нельзя выполнить непосредственным образом, то данный метод не даст экономии времени, и удобнее будет обратиться к методам дополнения 14.2 или дополнения 14.5. В данном примере, обозначив штрихом производную $\partial/\partial u$,

легко получаем

$$0 = \ddot{x} + 2(L^{-1}L' + \beta')\dot{x}\dot{u}, \tag{3x}$$

$$0 = \ddot{y} + 2(L^{-1}L' - \beta')\dot{y}\dot{u}, \tag{3y}$$

$$0 = \ddot{v} + (L^2e^{2\beta})(L^{-1}L' + \beta')\dot{x}^2 + (L^2e^{-2\beta})(L^{-1}L' - \beta')\dot{y}^2, \tag{3v}$$

$$0 = \ddot{u}. \tag{3u}$$

Этап 3′. Интерпретируем полученные уравнения как таблицу $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Уравнения (3) являются стандартными уравнениями геодезических

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0.$$

Поэтому достаточно лишь просмотреть их, чтобы найти значение любого из коэффициентов Г. Например $\Gamma^{x}{}_{yu}$ должен стоять в коэффициенте $(\Gamma^{x}{}_{yu} + \Gamma^{x}{}_{uy}) = 2\Gamma^{x}{}_{yu}$ перед членом $\dot{y}\dot{u}$ в уравнении для $\ddot{x}$. Но в уравнении (3x) нет члена $\dot{y}\dot{u}$. Следовательно, в данном примере $\Gamma^{x}{}_{yu}$ равно нулю. Отметим, что уравнения (3) просты в том смысле, что содержат лишь несколько членов; поэтому большинство коэффициентов $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ должны быть равны нулю. Например, из уравнения (3u) следует, что все десять коэффициентов $\Gamma^{u}{}_{\alpha\beta}$ равны нулю. Ненулевые значения имеют лишь $\Gamma^{x}{}_{xu} = \Gamma^{x}{}_{ux} = (L^{-1}L' + \beta')$ из уравнения (3x), $\Gamma^{y}{}_{yu} = \Gamma^{y}{}_{uy} = (L^{-1}L' - \beta')$ из уравнения (3y) и $\Gamma^{v}{}_{xx}$ и $\Gamma^{v}{}_{yy}$ из уравнения (3v).

Этап 4. Находим все $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ и т. д. Последовательное применение соотношения (3) из дополнения 14.2 не позволяет сколько-нибудь облегчить вычислительную процедуру. Необходимо выписать 21 компоненту $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$, которые не связаны друг с другом соотношениями симметрии $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$, и вычислить каждую из них. Отметим, что в данном примере из $\Gamma^{u}{}_{\alpha\beta} = 0$ следует, что $R^{u}{}_{\alpha\beta\gamma} = -R_{v\alpha\beta\gamma} = 0$. Это эквивалентно тому, что 15 компонент из 21 сразу же обращаются в нуль. В результате список приобретает вид

$$\begin{aligned}
&R_{vx\beta\gamma} = -R^{u}{}_{\alpha\beta\gamma} = 0,\\
&R_{uxux} = -R^{v}{}_{xux} = -(\Gamma^{v}{}_{xx})' + \Gamma^{v}{}_{xx}\Gamma^{x}{}_{xu} = -(L^2e^{2\beta})\left(\frac{L''}{L} + \beta'' + 2\frac{L'}{L}\beta' + \beta'^2\right),\\
&R_{uxxy} = -R^{v}{}_{xxy} = 0,\\
&R_{uxyu} = -R^{v}{}_{xyu} = 0,\\
&R_{uyuy} = -R^{v}{}_{uyy} = -(\Gamma^{v}{}_{yy})' + \Gamma^{v}{}_{yy}\Gamma^{y}{}_{yu} = -(L^2e^{-2\beta})\left(\frac{L''}{L} - \beta'' - 2\frac{L'}{L}\beta' + \beta'^2\right),\\
&R_{uyxy} = -R^{v}{}_{yxy} = 0,\\
&R_{xyxy} = (L^2e^{2\beta})R^{x}{}_{yxy} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Теперь с помощью соотношений (14.7) можно найти тензор Эйнштейна. Однако в данном примере прямая свертка $R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$ позволяет не менее просто найти сначала тензор Риччи. Вклад дают лишь слагаемые с $\mu = x$ и $\mu = y$, поскольку верхний индекс не может принимать значение u и ни один нижний индекс не может при-

нимать значение v_*. Таким образом, находим

$$R_{uu} = -2\,[L^{-1}L'' + \beta'^2], \tag{5}$$

$$\text{все остальные } R_{\alpha\beta} = 0$$

и

$$R = 0. \tag{6}$$

Из этого последнего результата следует, что в данном примере искомый тензор Эйнштейна тождественно совпадает с тензором Риччи.

§ 14.5. 2-ФОРМЫ КРИВИЗНЫ

В электродинамике абстрактные обозначения

$$\mathbf{F} = \mathbf{dA}$$

дают значительную экономию места по сравнению с явной записью

$$F_{31} = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1},$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}$$

и т. д. (шесть уравнений);

нет никаких причин отказываться от подобной экономии, когда речь идет о динамике геометрии. Ключевые понятия дифференциальной формы (где простой объект заменяет перечисление четырех компонент, $\sigma = \sigma_\mu\, \mathbf{d}x^\mu$) и внешней производной $\mathbf{d}$, рассмотренные выше, были введены Картаном. Ему же удалось упаковать 21 компоненту $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ тензора кривизны в шесть 2-форм кривизны [6]

Понятия, необходимые для метода 2-форм кривизны

$$\mathscr{R}^{\mu\nu} = -\mathscr{R}^{\nu\mu}$$

Если эти 2-формы считать просто новым обозначением, то их введение автоматически оказывается выгодным. Они сокращают работу по выписыванию ответа после того, как он получен. Они позволяют также глубже понять «кривизну как геометрический объект», хотя основное внимание в данной главе уделяется не этому.

Внешняя производная Картана $\mathbf{d}$ автоматически учитывает многие сокращения в процессе вычисления кривизны. Благодаря ей многие члены сокращаются еще до того, как возникает необходимость в вычислении их значений.

Чтобы распространить исчисление Картана, используемое при изучении электромагнетизма и в других приложениях (гл. 4), на случай анализа кривизны (данная глава), необходимо слегка пополнить арсенал форм и внешней производной — ввести два новых понятия: 1) понятие внешней дифференциальной формы, значения которой представляют собой векторы (или тензоры),

и 2) соответствующее обобщение понятия внешней производной **d**. В данном параграфе с помощью обоих этих понятий выводятся ключевые формулы (14.18), (14.25), (14.31) и (14.32). Однако, будучи однажды выведенными, эти формулы во всех приложениях и при любых вычислениях кривизны не требуют ничего, кроме владения обычным внешним дифференцированием (§ 14.6, дополнение 14.5).

Обобщенная внешняя производная:

Обобщенная внешняя производная не дает ничего нового в случае применения ее к двум простейшим геометрическим объектам: скалярной функции («0-форме») и векторному полю («векторнозначной 0-форме»). Итак, берем произвольную функцию f. Ее производная в неконкретизированном направлении представляет собой 1-форму, или, вводя новую терминологию, которая скоро приобретет смысл, «скалярнозначную 1-форму». Зададимся конкретным направлением, в котором нужно продифференцировать («заполним входной канал 1-формы»). В результате получим обычную производную от функции

1) действие на скаляр

$$\langle \mathbf{d}f,\ \mathbf{u}\rangle = \partial_{\mathbf{u}} f. \tag{14.11}$$

Затем возьмем произвольное векторное поле $\mathbf{v}$. Его ковариантная производная в неконкретизированном направлении представляет собой «векторнозначную 1-форму». Зададимся конкретным направлением $\mathbf{u}$, в котором нужно продифференцировать («заполним входной канал 1-формы»). В результате получим ковариантную производную

2) действие на вектор

$$\langle \mathbf{dv},\ \mathbf{u}\rangle \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}. \tag{14.12а}$$

Этот объект также не нов; он представляет собой ковариантную производную вектора $\mathbf{v}$ в направлении вектора $\mathbf{u}$. Абстрагируясь от выбора конкретного направления дифференцирования $\mathbf{u}$, приходим к выражению, с которым мы уже встречались выше, хотя оно и не именовалось тогда «векторнозначной 1-формой». Это выражение есть мера ковариантной производной вектора $\mathbf{v}$ в неконкретизированном направлении («канал для направления не заполнен»). Взглянув на (14.12а), мы видим, что обобщенная внешняя производная от $\mathbf{v}$, вычисленная без обращения к $\mathbf{u}$, есть

$$\mathbf{dv} = \nabla\mathbf{v}. \tag{14.12б}$$

Подобным же образом для любой «тензорнозначной 0-формы» $\left[\text{т. е. тензора ранга } \binom{n}{0}\right]$ $\mathbf{S}$ имеем $\mathbf{dS} \equiv \nabla\mathbf{S}$.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению внешнего (которое вскоре будет охарактеризовано как «антисимметричное») дифференцирования тензоров, выпишем формулу (см. упражнение 14.5) для внешней (антисимметричной) производной от произведения форм:

$$\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathbf{d}\alpha)\wedge\beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathbf{d}\beta, \tag{14.13а}$$

где α — p-форма, а β — q-форма.

Обобщим теперь внешнюю производную простейших форм на случай внешнего произведения тензорнозначной p-формы $\mathbf{S}$ на обычную q-форму $\boldsymbol{\beta}$:

3) определение в общем случае

$$\mathbf{d}(\mathbf{S}\wedge\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{dS}\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p\,\mathbf{S}\wedge\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}. \qquad (14.13б)$$

Это соотношение можно считать определением обобщенной внешней производной в общем случае. Например, если $\mathbf{S}$ есть тензорнозначная 2-форма, $\mathbf{S} = S^{\alpha\beta}{}_{[\gamma\delta]}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta\,\mathbf{d}x^\gamma\wedge\mathbf{d}x^\delta$, то соотношение (14.13б) дает

$$\mathbf{dS} = \mathbf{d}\left[(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta S^{\alpha\beta}{}_{[\gamma\delta]})\,(\mathbf{d}x^\gamma\wedge\mathbf{d}x^\delta)\right] = \mathbf{d}\,(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta S^{\alpha\beta}{}_{[\gamma\delta]})\wedge(\mathbf{d}x^\gamma\wedge\mathbf{d}x^\delta).$$

В качестве еще одного примера найдем с помощью (14.13б) $\mathbf{d}(\mathbf{u}\sigma)$, где $\mathbf{u}$ — векторнозначная 0-форма (вектор), а σ — скалярнозначная 1-форма (1-форма):

$$\mathbf{d}(\mathbf{u}\sigma) = (\mathbf{du})\wedge\sigma + \mathbf{u}\,\mathbf{d}\sigma.$$

Если следовать изложению предыдущих глав, то здесь нужно было бы написать $\mathbf{u}\otimes\sigma$ вместо $\mathbf{u}\sigma$, $\mathbf{u}\otimes\mathbf{d}\sigma$ вместо $\mathbf{u}\,\mathbf{d}\sigma$ и $\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta$ вместо $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$. Однако во избежание излишнего усложнения обозначений здесь и ниже все символы тензорного произведения опущены.

Соотношения (14.12) и (14.13) представляют собой нечто большее, нежели просто определение (обобщенной) внешней производной $\mathbf{d}$ и способа ее применения при вычислениях. Они позволяют также определить и вычислить антисимметризованные вторые производные, например $\mathbf{d}^2\mathbf{v}$. Так, соотношение

$$\mathbf{d}^2\mathbf{v} = \mathscr{R}\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — вектор, позволяет ввести «операторнозначную» или «$\binom{1}{1}$ тензорнозначную» 2-форму кривизны $\mathscr{R}$. Введение обобщенной внешней производной позволяет по-новому взглянуть на старый аппарат базисных векторов и параллельного переноса и дает способ нахождения 2-формы кривизны $\mathscr{R}$.

Представим векторное поле $\mathbf{v}$ в виде разложения по некоторому полю базисных векторов $\mathbf{e}_\mu$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_\mu v^\mu.$$

Тогда внешняя производная этого вектора равна

$$\mathbf{dv} = \mathbf{de}_\mu v^\mu + \mathbf{e}_\mu\,\mathbf{d}v^\mu.$$

Каждую векторнозначную 1-форму $\mathbf{de}_\mu$ также представим в виде разложения

$$\mathbf{de}_\mu = \mathbf{e}_\nu\omega^\nu{}_\mu. \qquad (14.14)$$

Определение $\omega^\mu{}_\nu$

Здесь «компоненты» $\omega^\nu{}_\mu$ в разложении $\mathbf{de}_\mu$ являются 1-формами. Напомним, что, согласно соотношению (10.13), $\omega^\nu{}_\mu$ связаны с коэффициентами связности выражением

$$\omega^\nu{}_\mu = \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\omega^\lambda. \qquad (14.15)$$

Поэтому разложение «вектора» (в действительности «векторнозначной 1-формы») принимает вид

$$\mathbf{d}\mathbf{v} = \mathbf{e}_\mu (\mathbf{d}v^\mu + \omega^\mu{}_\nu v^\nu). \tag{14.16}$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\mathbf{d}^2\mathbf{v} = \mathbf{d}\mathbf{e}_\alpha \wedge (\mathbf{d}v^\alpha + \omega^\alpha{}_\nu v^\nu) + \mathbf{e}_\mu (\mathbf{d}^2 v^\mu + \mathbf{d}\omega^\mu{}_\nu v^\nu - \omega^\mu{}_\nu \wedge \mathbf{d}v^\nu) =$$

$$= \mathbf{e}_\mu (\omega^\mu{}_\alpha \wedge \mathbf{d}v^\alpha + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu v^\nu + \mathbf{d}^2 v^\mu + \mathbf{d}\omega^\mu{}_\nu v^\nu - \omega^\mu{}_\alpha \wedge \mathbf{d}v^\alpha).$$

Сделанные здесь упрощения используют 1) соотношение (14.14), примененное еще раз, и 2) правило дифференцирования произведения (14.13а), которое приводит к появлению знака минус перед последним слагаемым, в результате чего оно сокращается с первым слагаемым. Рассмотрим теперь член $\mathbf{d}^2 v^\mu$. Напомним, что любая данная компонента, например v^3, есть обычная скалярная функция точки (в отличие от $\mathbf{v}$, $\mathbf{e}_3$ или $\mathbf{e}_3 v^3$). Следовательно, $\mathbf{d}$ в $\mathbf{d}^2 v^\mu$ обозначает всего лишь обычную внешнюю производную (гл. 4) от скалярной функции. Но дважды примененная обычная внешняя производная автоматически дает $\mathbf{d}^2 v^\mu = 0$ (дополнение 4.1, Б; дополнение 4.4). Это обстоятельство позволяет свести разложение $\mathbf{d}^2\mathbf{v}$ к виду

2-формы кривизны $\mathscr{R}^\mu{}_\nu$:

1) выраженные через $\mathbf{d}^2\mathbf{v}$

$$\mathbf{d}^2\mathbf{v} = \mathbf{e}_\mu \mathscr{R}^\mu{}_\nu v^\nu, \tag{14.17}$$

где через $\mathscr{R}^\mu{}_\nu$ обозначены *2-формы кривизны*:

2) выраженные через $\omega^\mu{}_\nu$

$$\mathscr{R}^\mu{}_\nu \equiv \mathbf{d}\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu. \tag{14.18}$$

Как правило, уравнение (14.18) по эффективности превосходит все другие методы нахождения 2-форм кривизны.

Замечательная форма уравнения (14.17) заслуживает более подробного рассмотрения. Слева стоят два оператора $\mathbf{d}$, напоминающие нам о том, что мы дважды дифференцируем векторное поле $\mathbf{v}$. Но в правой части, представляющей результат дифференцирования, стоит лишь значение векторного поля $\mathbf{v}$ в интересующей нас точке — непродифференцированное. В ответ совершенно не входит характер изменения $\mathbf{v}$ от точки к точке. Единственное, что играет роль,— это характер изменения геометрии от точки к точке. Вот здесь-то и проявляется кривизна. Она проявляется независимо от каких-либо конкретных особенностей векторного поля $\mathbf{v}$, поскольку операция $\mathbf{d}^2$ представляет собой антисимметризованную ковариантную производную [ср. выражение (11.8) для этой антисимметризованной ковариантной производной на абстрактном языке, развитом выше, а в дополнениях 11.2 и 11.6 см. наглядное представление того, что происходит за кулисами этих манипуляций]. Короче, результат двукратного применения оператора $\mathbf{d}$ к $\mathbf{v}$ представляет собой линейную алгебраическую операцию над $\mathbf{v}$, т. е.

Тензорнозначная 2-форма кривизны $\mathscr{R}$

$$\mathbf{d}^2\mathbf{v} = \mathscr{R}\mathbf{v}. \tag{14.19}$$

Здесь посредством $\mathscr{R}$ сокращенно обозначена «$\binom{1}{1}$-тензорнозначная 2-форма»:

$$\mathscr{R} = \mathbf{e}_\mu \otimes \omega^\nu \mathscr{R}^\mu{}_{\nu\cdot} \tag{14.20}$$

Если $\mathbf{d}$ представляет собой производную, у которой «есть канал» для ввода вектора, указывающего, в каком направлении нужно выполнять дифференцирование, то у $\mathbf{d}^2\mathbf{w}$ из $\mathbf{d}^2\mathbf{w} = \mathscr{R}\mathbf{w}$ есть два канала для ввода двух векторов, скажем $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Эти два вектора определяют плоскость, в которой должна быть вычислена антисимметризованная внешняя производная (14.19) (изменение $\mathbf{w}$ при обходе по элементарному контуру, определяемому векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, с возвратом в исходную точку; дополнение 11.6 и 11.7). Чтобы подробно разобрать, что представляет собой в данном случае введение векторов во входные каналы, обратимся сначала к более простой ситуации и посмотрим, как «находится значение» внешней производной от 1-формы (представляющей собой 2-форму) на бивекторе $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ («число сотоподобных ячеек 2-формы, отсекаемых областью, имеющей вид параллелограмма и определяемой векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$»), причем результат вычисления (упражнение 14.6) выразим в форме коммутатора

$$\langle \mathbf{d}\alpha, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \partial_u \langle \alpha, \mathbf{v} \rangle - \partial_v \langle \alpha, \mathbf{u} \rangle - \langle \alpha, [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \rangle. \tag{14.21}$$

Этот результат очевидным образом обобщается на случай тензорнозначной 1-формы $\mathbf{S}$ любого ранга:

$$\langle \mathbf{dS}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \nabla_u \langle \mathbf{S}, \mathbf{v} \rangle - \nabla_v \langle \mathbf{S}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{S}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \rangle. \tag{14.22}$$

Применим этот результат к векторнозначной 1-форме $\mathbf{S} = \mathbf{dw}$. Вспомнив выражение для производной по направлению $\langle \mathbf{dw}, \mathbf{u} \rangle = \nabla_u \mathbf{w}$, получаем

$$\langle \mathbf{d}^2\mathbf{w}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \nabla_u \nabla_v \mathbf{w} - \nabla_v \nabla_u \mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathbf{w} = \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathbf{w}, \tag{14.23}$$

где $\mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — оператор кривизны, определенный в гл. 11 [соотношение (11.8)]. Вывод звучит просто: $\binom{1}{1}$-тензорнозначная 2-форма $\mathscr{R}$ в (14.19), вычисленная для бивектора («параллелограмма») $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, тождественно совпадает с введенным ранее оператором кривизны $\mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, т. е.

Связь 2-формы кривизны $\mathscr{R}$ с оператором кривизны $\mathscr{R}$

$$\langle \mathscr{R}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \mathscr{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{14.24}$$

Перейдем теперь с языка абстрактных операторов на язык, в котором начинают появляться компоненты. Подставляя в левую часть выражение (14.20), а в правую — значение оператора кривизны из (11.11), переписываем (14.24) в виде

$$\mathbf{e}_\mu \otimes \omega^\nu \langle \mathscr{R}^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \mathbf{e}_\mu \otimes \omega^\nu \mathscr{R}^\mu{}_{\nu\alpha\beta} u^\alpha v^\beta.$$

Сравнивая правую и левую части равенства, приходим к выводу, что каждая отдельная 2-форма кривизны задается выражением

Связь $\mathscr{R}$ с компонентами R

$$\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu[\alpha\beta]}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \tag{14.25}$$

(суммирование по α, β производится лишь по комбинациям $\alpha < \beta$, и каждая пара индексов появляется только один раз).

Уравнение (14.25) содержит обещанную упаковку 21 компоненты кривизны в шести 2-формах кривизны, а уравнение (14.18) позволяет быстро находить эти 2-формы кривизны. Отнюдь не требуется принимать на веру уравнения (14.18), играющие основную роль при вычислении кривизны, или в совершенстве овладевать обобщенной внешней производной, чтобы доказать или использовать эти уравнения. В них нет ни одного $\mathbf{d}$, отличающегося по смыслу от обычной внешней производной, рассмотренной в гл. 4. Более того, в справедливости этих ключевых уравнений можно убедиться (упражнение 14.18) с помощью подробных выкладок в компонентах в координатной системе отсчета. Для этого достаточно ввести базисные 1-формы $\omega^{\alpha} = \mathbf{d}x^{\alpha}$, а затем воспользоваться соотношением $\omega^{\mu}{}_{\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}\mathbf{d}x^{\lambda}$, получаемым из (14.15). Далее нетрудно получить «стандартную формулу для кривизны» [соотношение (11.12) и соотношение (3) в дополнении 14.2].

В заключение можно сказать, что исчисление форм и внешних производных сводит вычислительную процедуру

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \rightarrow R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$$

к вычислительной процедуре

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} \rightarrow \mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu}.$$

Обратимся теперь к другому звену в цепи, ведущей от метрики к кривизне. Таковым обычно являлось

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}.$$

Теперь оно сводится к нахождению «1-форм связности»:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \omega^{\mu}{}_{\nu}.$$

Симметрия ковариантной производной:

Этот первый этап процедуры вычисления кривизны основан на двух принципах: 1) симметрии ковариантной производной и 2) совместности ее с метрикой. Условие симметрии в скрытом виде содержится в принципе

1) выраженная в виде $\mathbf{d}^2\mathscr{P} = 0$

$$\mathbf{d}^2\mathscr{P} = 0. \tag{14.26}$$

Здесь обозначение «$\mathscr{P}$ для точки» исходит непосредственно от Картана, согласно которому вектор определяется движением одной точки по направлению к другой точке, бесконечно близкой к первой. Поэтому написать $\mathbf{d}\mathscr{P}$ означает взять «производную от точки» [осуществить построение, при котором «точка убирается» (основание вектора) и «точка восстанавливается вблизи» (острие векто-

ра)]. Направление дифференцирования $\mathbf{d}$ в $\mathbf{d}\mathcal{P}$ является неопределенным. Другими словами, $\mathbf{d}\mathcal{P}$ имеет «входной канал». Лишь после того, как в этот канал введен определенный вектор $\mathbf{v}$, $\mathbf{d}\mathcal{P}$ дает определенный ответ в форме картанова вектора. Что же представляет собой этот вектор, который получается на выходе $\mathbf{d}\mathcal{P}$? Это сам вектор $\mathbf{v}$. «Перемещение, равное $\mathbf{v}$, заставляет точку $\mathcal{P}$ воспроизводить перемещение, которое само есть $\mathbf{v}$»; в конкретных обозначениях имеем

$$\langle \mathbf{d}\mathcal{P}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}. \tag{14.27}$$

Выразим содержание этого равенства в более формальном виде. Величина $\mathbf{d}\mathcal{P}$ есть тензор ранга $\binom{1}{1}$:

$$\mathbf{d}\mathcal{P} = \mathbf{e}_\mu \omega^\mu. \tag{14.28}$$

Он отличается от тензора ранга $\binom{1}{1}$ общего вида

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_\mu T^\mu{}_\nu \omega^\nu$$

специальными значениями своих компонент

$$T^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu.$$

В этом смысле он заслуживает названия «единичный тензор». Подставим этот тензор вместо $\mathbf{S}$ в соотношение (14.22); в результате получим

$$\langle \mathbf{d}^2\mathcal{P}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \nabla_u \mathbf{v} - \nabla_v \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0. \tag{14.29}$$

Нуль в правой части взят из соотношения (10.2а) и означает «замыкание векторной диаграммы» на рисунке, названном «симметрией ковариантного дифференцирования» в дополнении 10.2. Обращение в нуль правой части при произвольных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{d}$ требует обращения в нуль $\mathbf{d}^2\mathcal{P}$ слева, и наоборот, обращение в нуль $\mathbf{d}^2\mathcal{P}$ влечет за собой симметрию ковариантной производной. Другим принципом, на котором базируются последующие вычисления, является «совместность ковариантной производной с метрикой», выраженная в форме соотношения

$$\mathbf{d}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{du}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{dv}). \tag{14.30}$$

Здесь существенно обращение в нуль ковариантной производной от метрики (от «точки»):

$$\mathbf{d}(\cdot) = 0.$$

Раскроем условия симметрии (14.26) и совместности (14.30) ковариантной производной, воспользовавшись базисными векторами (и, где это необходимо, базисными 1-формами, дуальными этим базисным векторам). Таким образом, из

$$\mathbf{d}\mathcal{P} = \mathbf{e}_\mu \omega^\mu$$

получаем

$$0 = \mathbf{d}^2\mathcal{F} = \mathbf{d}\mathbf{e}_\mu \wedge \boldsymbol{\omega}^\mu + \mathbf{e}_\mu \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^\mu = \mathbf{e}_\mu (\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu + \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^\mu)$$

и делаем вывод, что коэффициент при $\mathbf{e}_\mu$ должен обращаться в нуль, т. е.

2) выраженная в виде $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^\mu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu = 0$

$$0 = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^\mu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu_{\cdot} \quad \text{(«симметрия»)}. \tag{14.31а}$$

Совместность $\mathbf{g}$ и ∇

Подставляя затем в (14.30) вместо произвольных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ конкретные векторы $\mathbf{e}_\mu$ и $\mathbf{e}_\nu$, в результате получаем

$$\mathbf{d}g_{\mu\nu} = \boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\omega}_{\nu\mu} \quad \text{(«совместность»)}, \tag{14.31б}$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\alpha}\boldsymbol{\omega}^\alpha{}_\nu = \Gamma_{\mu\nu\alpha}\boldsymbol{\omega}^\alpha. \tag{14.31в}$$

В соотношениях (14.31) связь между метрикой и формами связности выражена в наиболее компактном виде.

§ 14.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Применение дифференциальных форм для вычисления кривизны иллюстрируется в дополнении 14.5. В данном параграфе дается общая схема метода. Он содержит три основных этапа: нахождение $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$, нахождение $\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ и нахождение $G^\mu{}_\nu$. Если быть пунктуальным, то на первое место следует поставить выбор метрики и системы отсчета. При этом фиксируются базисные формы $\boldsymbol{\omega}^\mu = L^\mu{}_{\alpha'}\mathbf{d}x^{\alpha'}$ и компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ в $\mathbf{d}s^2 = g_{\mu\nu}\boldsymbol{\omega}^\mu \otimes \boldsymbol{\omega}^\nu$. Затем определяются формы связности $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ и определяются однозначно как решения уравнений (14.31а) и (14.31б)

Метод 2-форм кривизны:

1) выбор метрики и системы отсчета

2) нахождение 1-форм связности $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$

$$0 = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^\mu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu,$$

$$\mathbf{d}g_{\mu\nu} = \boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\omega}_{\nu\mu}.$$

Метод «проб и ошибок» (описанный и проиллюстрированный в дополнении 14.5) часто позволяет быстро и легко найти решение этих уравнений. [В упражнении (14.7) показано, что решение всегда существует; там доказано, что в координатной системе отсчета формула Кристоффеля (14.36) дает единственное решение.] Обычно наиболее удобной в употреблении является ортонормированная система отсчета с $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (или какая-нибудь другая простая система, в которой $g_{\mu\nu} = \text{const}$, например нулевая система). Тогда $\mathbf{d}g_{\mu\nu} = 0$, и из уравнения (14.31б) следует, что $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{\omega}_{\nu\mu}$. Поэтому в случае четырех измерений требуется найти лишь шесть $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$.

Если не удается быстро угадать ответ, можно воспользоваться систематическим методом решения уравнений (14.31) в ортонормированной системе или в какой-либо другой системе, в которой

$\mathbf{d}g_{\mu\nu} = 0$. Для этого следует найти $\mathbf{d}\omega^\mu$ и сгруппировать их в виде

$$\mathbf{d}\omega^\alpha = -c_{|\mu\nu|}{}^\alpha \omega^\mu \wedge \omega^\nu. \tag{14.32}$$

Тем самым мы определим 24 «коммутационных коэффициента» $c_{\mu\nu}{}^\alpha$. Эти величины входят в выражение

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(c_{\mu\nu\alpha} + c_{\mu\alpha\nu} - c_{\nu\alpha\mu})\,\omega^\alpha, \tag{14.33}$$

которое позволяет найти шесть $\omega^\mu{}_\nu$ (упражнение 14.12).

По известным $\omega_{\mu\nu}$ можно вычислить формы кривизны $\mathscr{R}^\mu{}_\nu$ (опять только шесть форм в случае четырех измерений, поскольку $\mathscr{R}^{\mu\nu} = -\mathscr{R}^{\nu\mu}$) с помощью формулы

3) нахождение 2-форм кривизны $\mathscr{R}^\mu{}_\nu$

$$\mathscr{R}^\mu{}_\nu = \mathbf{d}\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu. \tag{14.34}$$

Такое представление позволяет при помощи схемы идентификации

4) нахождение компонент тензоров кривизны

$$\mathscr{R}^{\mu\nu} = R^{\mu\nu}{}_{|\alpha\beta|}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \tag{14.35}$$

выписать отдельные компоненты тензора кривизны.

Вычисление тензора Эйнштейна $G^\mu{}_\nu$ сводится к просмотру выражений для $\mathscr{R}^{\mu\nu}$ с целью отыскания компонент $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$, которые используются в формулах (14.7).

14.5. Внешняя производная произведения форм

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите соотношение (14.13а) с помощью рекурсивной процедуры, восходящей от форм низкого порядка к формам более высокого порядка. [*Указания.* Напомним, что, согласно выражению (4.27), внешняя производная от p-формы]

$$\alpha = \alpha_{|\mu_1 \ldots \mu_p|}\,\mathbf{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\mu_p}$$

определяется формулой

$$\mathbf{d}\alpha = \frac{\partial \alpha_{|\mu_1 \ldots \mu_p|}}{\partial x^{\mu_0}}\,\mathbf{d}x^{\mu_0} \wedge \mathbf{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\mu_p}.$$

Применение этой формулы к произведению $\alpha \wedge \beta$ двух 1-форм дает

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) &= \mathbf{d}[(\alpha_\lambda\,\mathbf{d}x^\lambda) \wedge (\beta_\mu\,\mathbf{d}x^\mu)] = \mathbf{d}[(\alpha_\lambda\beta_\mu)(\mathbf{d}x^\lambda \wedge \mathbf{d}x^\mu)] = \\
&= \frac{\partial(\alpha_\lambda\beta_\mu)}{\partial x^\varkappa}\,\mathbf{d}x^\varkappa \wedge \mathbf{d}x^\lambda \wedge \mathbf{d}x^\mu = \\
&= \left(\frac{\partial \alpha_\lambda}{\partial x^\varkappa}\,\mathbf{d}x^\varkappa \wedge \mathbf{d}x^\lambda\right) \wedge \beta_\mu\,\mathbf{d}x^\mu - (\alpha_\lambda\,\mathbf{d}x^\lambda) \wedge \left(\frac{\partial \beta_\mu}{\partial x^\varkappa}\,\mathbf{d}x^\varkappa \wedge \mathbf{d}x^\mu\right) = \\
&= (\mathbf{d}\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge \mathbf{d}\beta.
\end{aligned}$$

Распространите эти рассуждения на случай форм более высокого порядка.]

УПРАЖНЕНИЯ

14.6. Соотношение между внешней производной и коммутатором

Докажите справедливость формулы (14.21), показав, что а) правая часть является линейной *алгебраической* функцией $\mathbf{u}$ и линейной алгебраической функцией $\mathbf{v}$ и что б) данное соотношение выполняется, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ суть координатные базисные векторы: $\mathbf{u} = \partial/\partial x^k$, $\mathbf{v} = \partial/\partial x^l$.

14.7. Вывод формулы Кристоффеля из форм связности

Покажите в координатной системе отсчета $\boldsymbol{\omega}^\mu = \mathbf{d}x^\mu$, что для выполнения соотношения (14.31а) должно быть $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$. Установив эту симметрию, покажите также, что из соотношения (14.31б) можно получить выражение для $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha$, которое, будучи разрешено, приводит к формуле Кристоффеля

$$\Gamma^{\bar{\mu}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right). \tag{14.36}$$

14.8. Связь между формулой Римана — Кристоффеля для кривизны и формами кривизны

Подставьте $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \mathbf{d}x^\lambda$ в уравнение (14.18) и из полученного результата с помощью соотношения (14.25) выведите классическую формулу (3) дополнения 14.2 для компонент $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$.

14.9. Обзор картановых структурных уравнений с помощью матричных обозначений

Пусть $e \equiv (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — матрица из одной строки, элементами которой являются базисные векторы, и пусть ω — столбец из базисных 1-форм $\boldsymbol{\omega}^\mu$. Аналогично, пусть $\Omega = \| \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \|$ и $R = \| R^\mu{}_\nu \|$ — квадратные матрицы, элементами которых являются 1-формы и 2-формы. Во введенной таким образом компактной системе обозначений соотношения $\mathbf{d}\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu{}_\mu$ и $\mathbf{d}\mathscr{P} = \mathbf{e}_\mu \boldsymbol{\omega}^\mu$ принимают соответственно вид

$$\mathbf{d}e = e\Omega \quad \text{и} \quad \mathbf{d}\mathscr{P} = e\omega. \tag{14.37}$$

а. Из соотношений (14.37) и условия $\mathbf{d}^2\mathscr{P} = 0$ выведите уравнение (14.31а) в форме

$$0 = \mathbf{d}\omega + \Omega \wedge \omega. \tag{14.38}$$

[Решение: $\mathbf{d}^2\mathscr{P} = \mathbf{d}e \wedge \omega + e\,\mathbf{d}\omega = e\,(\Omega \wedge \omega + \mathbf{d}\omega)$.]

б. Вычислите величину $\mathbf{d}^2 e$ для объяснения определения (14.18), принимающего теперь вид

$$\mathscr{R} = \mathbf{d}\Omega + \Omega \wedge \Omega. \tag{14.39}$$

в. Из условия $\mathbf{d}^2\omega = 0$ выведите соотношение $\mathscr{R} \wedge \omega = 0$, а затем расшифруйте его и получите условие антисимметрии $R^{\mu}{}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$.

г. Найдите $\mathbf{d}\mathscr{R}$, воспользовавшись соотношением (14.39), и установите связь полученного результата с тождеством Бианки $R^{\mu}{}_{\nu[\alpha\beta;\,\gamma]} = 0$.

д. Пусть $v = \{v^{\mu}\}$ — столбец функций; тогда $\mathbf{v} = ev = \mathbf{e}_{\mu}v^{\mu}$ — векторное поле. Найдите в компактных обозначениях $\mathbf{dv}$ и $\mathbf{d}^2\mathbf{v}$, показав при этом, что $\mathbf{d}^2\mathbf{v} = e\mathscr{R}v$ (что совпадает с соотношением 14.17).

14.10. Правила преобразования форм связности в компактных обозначениях

Воспользовавшись обозначениями предыдущего упражнения, опишите переход к новой системе отсчета соотношением $e' = eA$ вместо $\mathbf{e}_{\mu'} = \mathbf{e}_{\nu}A^{\nu}{}_{\mu'}$ и аналогично для базисных 1-форм $\omega' = A^{-1}\omega$. Покажите, что $\mathbf{d}\mathscr{P} \equiv e\omega = e'\omega'$. Подставив $e' = eA$ в $\mathbf{d}e' = e'\Omega'$, получите закон преобразования

$$\Omega' = A^{-1}\Omega A + A^{-1}\mathbf{d}A. \tag{14.40}$$

Перепишите его в подробных обозначениях в координатной системе отсчета, где $A^{\nu}{}_{\mu'} = \partial x^{\nu}/\partial x^{\mu'}$, в виде соотношения $\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = (?)$.

14.11. Пространство является плоским, если кривизна обращается в нуль (см. § 11.5)

Если существуют такие координаты, в которых все прямые линии ($d^2x^{\mu}/d\lambda^2 = 0$) суть геодезические, то мы говорим, что пространство является плоским. В этом случае все $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ и $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ обращаются в нуль, что очевидным образом следует из уравнения (14.8) и уравнения (3) в дополнении 14.2. Покажите обратное, т. е. что из условия $\mathscr{R} = 0$ вытекает существование таких координат. Воспользуйтесь результатами предыдущего упражнения и найдите дифференциальные уравнения, которым должно удовлетворять преобразование A к базису e', в котором $\Omega' = 0$. Каковы условия полной интегрируемости этих уравнений? [Отметим, что $\mathbf{d}f_K = F_K(x, f)$ полностью интегрируемы, если из исходных уравнений следует $\mathbf{d}^2f_K = 0$.] Почему базисные формы $\boldsymbol{\omega}^{\mu'}$ в этой новой системе отсчета представляют собой дифференциалы координат $\boldsymbol{\omega}^{\mu'} = \mathbf{d}x^{\mu'}$?

14.12. Последовательное вычисление форм связности в ортонормированных системах

Выведите соотношение (14.32), применив (14.21) к базисным векторам и воспользовавшись определением $c_{\mu\nu}{}^{\alpha}$ (8.14). Затем покажите, что в ортонормированной системе (как и в любой другой систе-

УПРАЖНЕНИЯ

ме, в которой $g_{\mu\nu} = \text{const}$) выражение (14.33) дает решение уравнений (14.31), которые служат определением $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ [Ср. также соотношение (8.246).]

14.13. Шварцшильдовские формы кривизны

Воспользуйтесь очевидной ортонормированной системой

$$\omega^{\hat{t}} = e^{\Phi}\,\mathbf{d}t,\quad \omega^{\hat{r}} = e^{\Lambda}\,\mathbf{d}r,\quad \omega^{\hat{\theta}} = r\,\mathbf{d}\theta,\quad \omega^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi$$

для шварцшильдовской метрики

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), \qquad (14.41)$$

в которой Φ и Λ являются функциями одного только r, и вычислите формы кривизны $\mathscr{R}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ и тензор Эйнштейна $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ методом, описанным в дополнении 14.5. [*Ответ*: $\mathscr{R}^{\hat{t}\hat{r}} = E\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}}$, $\mathscr{R}^{\hat{t}\hat{\theta}} = \bar{E}\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}$, $\mathscr{R}^{\hat{t}\hat{\phi}} = \bar{E}\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}$, $\mathscr{R}^{\hat{\theta}\hat{\phi}} = F\omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}$, $\mathscr{R}^{\hat{\phi}\hat{r}} = \bar{F}\omega^{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{r}}$, $\mathscr{R}^{\hat{r}\hat{\theta}} = \bar{F}\omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}$, где

$$\begin{aligned} E &= -e^{-2\Lambda}(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda'), \\ \bar{E} &= -\frac{1}{r}e^{-2\Lambda}\Phi', \\ F &= \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}), \\ \bar{F} &= \frac{1}{r}e^{-2\Lambda}\Lambda'; \end{aligned} \qquad (14.42)$$

и

$$\begin{aligned} G^{\hat{t}}_{\hat{t}} &= -(F + 2\bar{F}), \\ G^{\hat{r}}_{\hat{r}} &= -(F + 2\bar{E}), \\ G^{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = -(E + \bar{E} + \bar{F}), \\ G^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= G^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} = G^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = 0 = G^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = G^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}}. \end{aligned} \qquad (14.43)$$

14.14. Матричное представление компонент тензора Римана

Воспользовавшись симметриями тензора Римана, обоснуйте представление его компонент в ортонормированной системе в виде матрицы

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{array}{c} 01 \\ 02 \\ 03 \\ 23 \\ 31 \\ 12 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} E & H \\ \hline -H^T & F \end{array} \right), \qquad (14.44)$$

у которой строчки помечены парами индексов $\hat{\mu}\hat{\nu} = 01, 02$ и т. д. в указанном порядке и точно так же помечены столбцы $\hat{\alpha}\hat{\beta}$. Здесь E, F и H — все матрицы 3×3, у которых (почему?)

$$E = E^T, \quad F = F^T, \quad \text{след } H = 0; \tag{14.45}$$

здесь через E^T обозначена транспонированная матрица E.

14.15. Матрица Римана с нулевым тензором Эйнштейна

Покажите, что уравнения Эйнштейна для пустого пространства $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} = 0$ позволяют упростить матрицу (14.44) и привести ее к виду

$$R^{\hat{\mu}\,\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\,\hat{\beta}} = \left(\begin{array}{c|c} E & H \\ \hline -H & E \end{array}\right), \tag{14.46}$$

где теперь кроме равенства $E = F$, которое предполагает данный вид матрицы, выполняются также условия

$$\text{след } E = 0, \quad H = H^T. \tag{14.47}$$

14.16. Вычисление кривизны для пульсирующей и коллапсирующей звезды

Сферически симметричное движение самогравитирующих тел рассмотрено в гл. 26 и 32. Часто принимается, что метрика в данной ситуации имеет форму

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dT^2 + e^{2\Lambda}\,dR^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), \tag{14.48}$$

где Φ, Λ и r являются уже функциями двух координат R и T. Найдите 2-формы кривизны и тензор Эйнштейна для этой метрики с помощью метода дополнения 14.5. При угадывании $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ большинство членов можно указать сразу, исходя из соответствующей процедуры упражнения 14.13. [*Ответ*: В очевидной ортонормированной системе $\omega^{\hat{T}} = e^{\Phi}\mathbf{d}T$, $\omega^{\hat{R}} = e^{\Lambda}\,\mathbf{d}R$, $\omega^{\hat{\theta}} = r\,\mathbf{d}\theta$, $\omega^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\mathbf{d}\phi$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{R}} &= E\omega^{\hat{T}} \wedge \omega^{\hat{R}}, \\
\mathscr{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{\theta}} &= \bar{E}\omega^{\hat{T}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} + H\omega^{\hat{R}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}, \\
\mathscr{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{\phi}} &= \bar{E}\omega^{\hat{T}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} + H\omega^{\hat{R}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \\
\mathscr{R}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} &= F\omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \\
\mathscr{R}^{\hat{R}}{}_{\hat{\theta}} &= \bar{F}\omega^{\hat{R}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - H\omega^{\hat{T}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \\
\mathscr{R}^{\hat{R}}{}_{\hat{\phi}} &= \bar{F}\omega^{\hat{R}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} - H\omega^{\hat{T}} \wedge \omega^{\hat{\phi}},
\end{aligned} \tag{14.49}$$

что в матричном представлении упражнения 14.14 принимает вид

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \overline{E} & \cdot & \cdot & \cdot & H \\ \cdot & \cdot & \overline{E} & \cdot & -H & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & F & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & H & \cdot & \overline{F} & \cdot \\ \cdot & -H & \cdot & \cdot & \cdot & \overline{F} \end{array}\right) \begin{matrix} \hat{T}\hat{R} \\ \hat{T}\hat{\theta} \\ \hat{T}\hat{\phi} \\ \hat{\theta}\hat{\phi} \\ \hat{\phi}\hat{R} \\ \hat{R}\hat{\theta} \end{matrix} \tag{14.50}$$

Здесь

$$\begin{aligned} E &= e^{-2\Phi}(\ddot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^2 - \dot{\Lambda}\dot{\Phi}) - e^{-2\Lambda}(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda'), \\ \overline{E} &= \frac{1}{r} e^{-2\Phi}(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\Phi}) - \frac{1}{r} e^{-2\Lambda} r' \Phi', \\ H &= \frac{1}{r} e^{-\Phi-\Lambda}(\dot{r}' - \dot{r}\Phi' - r'\dot{\Lambda}), \\ F &= \frac{1}{r^2}(1 - r'^2 e^{-2\Lambda} + \dot{r}^2 e^{-2\Phi}), \\ \overline{F} &= \frac{1}{r} e^{-2\Phi} \dot{r}\dot{\Lambda} + \frac{1}{r} e^{-2\Lambda}(r'\Lambda' - r''). \end{aligned} \tag{14.51}$$

Тензор Эйнштейна равен

$$\begin{aligned} G^{\hat{T}\hat{T}} &= -G^{\hat{R}}{}_{\hat{R}} = F + 2\overline{F}, \\ G^{\hat{T}\hat{R}} &= G^{\hat{T}}{}_{\hat{R}} = 2H, \\ G^{\hat{T}}{}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{T}}{}_{\hat{\phi}} = 0, \\ G^{\hat{R}}{}_{\hat{R}} &= -(2\overline{E} + F), \\ G^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}} = -(E + \overline{E} + \overline{F}), \\ G^{\hat{R}}{}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{R}}{}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} = 0. \end{aligned} \tag{14.52}$$

14.17. Тождество Бианки в виде $\mathbf{d}\mathcal{R} = 0$

Положите по определению, что тензор Римана представляет собой 2-форму, значением которой является бивектор

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \mathcal{R}^{\mu\nu}, \tag{14.53}$$

и вычислите $\mathbf{d}\mathcal{R}$, откуда должно выясниться, что $\mathbf{d}\mathcal{R} = 0$. Воспользуйтесь соотношением

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathbf{d}\omega^{\mu\nu} - \omega^{\mu}{}_{\alpha} \wedge \omega^{\nu\alpha}, \tag{14.54}$$

которое легко получить в ортонормированной системе (этого достаточно для доказательства $\mathbf{d}\mathcal{R} = 0$), а также в произвольной системе (хорошая проверка приобретенных навыков), где $\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu}{}_{\alpha} g^{\alpha\nu}$ и $\mathbf{d}g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}(\mathbf{d}g_{\alpha\beta})\, g^{\beta\nu}$ (почему?). [*Примечание.* Для определения знаков в правиле дифференцирования произведения (14.13) для $\mathbf{d}$ играют роль лишь косые произведения форм (но не векторов).]

14.18. Локальное сохранение энергии и импульса: $\mathbf{d}{}^*\mathbf{T} = 0$ означает $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$

Положим, что оператор дуальности (*), определенный для внешних дифференциальных форм в дополнении 4.1, действует на формы, *но не на контравариантные векторы*, которые появляются, когда тензор энергии-импульса $\mathbf{T}$ или тензор Эйнштейна $\mathbf{G}$ записывается в смешанном виде тензора ранга $\binom{1}{1}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} \omega^{\nu}$$

или

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}_{\mu} G^{\mu}{}_{\nu} \omega^{\nu}.$$

а. Приведите выражение для ${}^*\mathbf{T}$ (или ${}^*\mathbf{G}$), разложенного по базисным векторам и формам.

б. Покажите, что

$${}^*\mathbf{T} = \mathbf{e}_{\mu} T^{\mu\nu} d^3\Sigma_{\nu},$$

где $d^3\Sigma_{\nu} = \varepsilon_{\nu[\alpha\beta\gamma]} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}$ [см. дополнение 5.4 и соотношения (8.10)].

в. Вычислите $\mathbf{d}{}^*\mathbf{T}$, воспользовавшись обобщенной внешней производной $\mathbf{d}$; покажите, что

$$\mathbf{d}{}^*\mathbf{T} = \mathbf{e}_{\mu} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \sqrt{|g|}\, \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Дополнение 14.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ (МЕТРИКА КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФРИДМАНА)

Фридмановская метрика

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

(дополнение 27.1) описывает пространство-время, в котором каждая гиперповерхность постоянного значения t представляет собой трехмерную гиперсферу, собственная длина большой окружности которой равна $2\pi a(t)$. В этом пространстве-

времени легко найти ортонормированный базис:

$$ds^2 = -(\omega^{\hat{t}})^2 + (\omega^{\hat{\chi}})^2 + (\omega^{\hat{\theta}})^2 + (\omega^{\hat{\phi}})^2,$$

где

$$\begin{aligned} \omega^{\hat{t}} &= dt \\ \omega^{\hat{\chi}} &= a\,d\chi. \\ \omega^{\hat{\theta}} &= a\sin\chi\,d\theta, \\ \omega^{\hat{\phi}} &= a\sin\chi\sin\theta\,d\phi. \end{aligned} \tag{1}$$

А. Вычисление связности

Поскольку $dg_{\mu\nu} = d\eta_{\mu\nu} = 0$, то из уравнения (14.31б) следует

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}; \tag{2}$$

таким образом, нужно найти лишь шесть 1-форм $\omega_{\mu\nu}$. Обратимся ко второму основному уравнению (14.31а). Мы должны *угадать* решение (поскольку это часто сделать быстрее, чем применить систематический метод) уравнений $0 = d\omega^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \omega^{\nu}$, в которых ω^{ν}, а значит, и $d\omega^{\mu}$, известны, а $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ неизвестны. Известно, что решение $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ единственно; поэтому если мы угадаем ответ, то этот ответ будет заведомо правильным.

Начнем с простейшего из этих уравнений. Из $\omega^{\hat{t}} = dt$ имеем

$$d\omega^{\hat{t}} = 0.$$

Сравним это с $d\omega^{\hat{t}} = -\omega^{\hat{t}}{}_{\mu} \wedge \omega^{\mu}$, т. е. с

$$d\omega^{\hat{t}} = -\omega^{\hat{t}}{}_{k} \wedge \omega^{k} = 0$$

(здесь принято во внимание, что $\omega^{\hat{t}}{}_{\hat{t}} = -\omega_{\hat{t}\,\hat{t}} = 0$, так как $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$). Последнему соотношению можно удовлетворить, положив $\omega^{\hat{t}}{}_{k} \sim \omega^{k}$, либо более сложными выражениями, в которых различные члены сокращаются друг с другом, либо совсем просто, положив $\omega^{\hat{t}}{}_{k} = 0$. Пойдем дальше, пока не потребуются какие-либо отличные от нуля $\omega^{\mu}{}_{\nu}$. Из $\omega^{\hat{\chi}} = a\,d\chi$ получаем

$$d\omega^{\hat{\chi}} = \dot{a}\,dt \wedge d\chi = (\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\chi}} = -(\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{\chi}} \wedge \omega^{\hat{t}}.$$

Сравниваем это с

$$d\omega^{\hat{\chi}} = -\omega^{\hat{\chi}}{}_{\mu} \wedge \omega^{\mu} = -\omega^{\hat{\chi}}{}_{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \omega^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - \omega^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}.$$

По виду первого слагаемого сделаем предположение, что $\omega^{\hat{\chi}}{}_{\hat{t}} = (\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{\chi}}$, и будем надеяться, что остальные слагаемые равны нулю. (Отметим, что это согласуется с $\omega^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} \wedge \omega^{\hat{\chi}} = -\omega_{\hat{t}\,\hat{\chi}} \wedge \omega^{\hat{\chi}} = \omega_{\hat{\chi}\,\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\chi}} = 0$ в уравнении с $d\omega^{\hat{t}}$.) Берем $\omega^{\hat{\theta}} = a\sin\chi\,d\theta$ и пишем

$$d\omega^{\hat{\theta}} = (\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} + a^{-1}\operatorname{ctg}\chi\,\omega^{\hat{\chi}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} = -\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}} \wedge \omega^{\hat{\chi}} - \omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}.$$

Предполагаем (что не противоречит написанным выше соотношениям), что

$$\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\imath}} = \omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\theta}} = (\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{\theta}},$$

$$\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}} = -\omega^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}} = a^{-1}\operatorname{ctg}\chi\omega^{\hat{\theta}}.$$

И, наконец, из

$$\mathbf{d}\omega^{\hat{\phi}} = (\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{\imath}}\wedge\omega^{\hat{\phi}} + a^{-1}\operatorname{ctg}\chi\omega^{\hat{\chi}}\wedge\omega^{\hat{\phi}} - (a\sin\chi)^{-1}\operatorname{ctg}\theta\omega^{\hat{\theta}}\wedge\omega^{\hat{\phi}} =$$
$$= -\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\imath}}\wedge\omega^{\hat{\imath}} - \omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}}\wedge\omega^{\hat{\chi}} - \omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}$$

выводим значения $\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\imath}}$, $\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}}$ и $\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}}$. Они не противоречат сделанному выше предположению, что члены типа $\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}$ равны нулю (в уравнении с $\mathbf{d}\omega^{\hat{\theta}}$); таким образом, мы действительно нашли [решение уравнений $\mathbf{d}\omega^{\mu} = -\omega^{\mu}{}_{\nu}\wedge\omega^{\nu}$ в виде полного набора форм связности $\omega^{\mu}{}_{\nu}$:

$$\begin{aligned}
&\omega^{k}{}_{\hat{\imath}} = \omega^{\hat{\imath}}{}_{k} = (\dot{a}/a)\,\omega^{k},\\
&\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}} = -\omega^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}} = a^{-1}\operatorname{ctg}\chi\omega^{\hat{\theta}} = \cos\chi\,\mathbf{d}\theta,\\
&\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}} = -\omega^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\phi}} = a^{-1}\operatorname{ctg}\chi\omega^{\hat{\phi}} = \cos\chi\sin\theta\,\mathbf{d}\phi,\\
&\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}} = -\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} = (a\sin\chi)^{-1}\operatorname{ctg}\theta\omega^{\hat{\phi}} = \cos\theta\,\mathbf{d}\phi.
\end{aligned} \tag{3}$$

Конечно в некоторых задачах этот метод проб и ошибок для нахождения $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ не удается применить; тогда следует воспользоваться соотношениями (14.32) и (14.33).

Б. Вычисление кривизны

Вычисление кривизны производится непосредственной подстановкой $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ из соотношений (3), полученных выше, в уравнение (14.34), которое имеет вид

$$\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu} = \mathbf{d}\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}{}_{\nu}.$$

Это уравнение достаточно короткое, чтобы можно было выписать сумму

$$\mathscr{R}^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}} = \mathbf{d}\omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}} + \omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\theta}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}} + \omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}}$$

в отличие от десяти слагаемых в соответствующем уравнении $R = \partial\Gamma + \Gamma^2$ [уравнение (3), дополнение (14.2)]. *Предостережение!* Если вычисление $\mathbf{d}\omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}}$ из $\omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}} = (\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{\chi}}$ приводит к результату $\mathbf{d}\omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}} = (\dot{a}/a)^{\cdot}\,\omega^{\hat{\imath}}\wedge\omega^{\hat{\chi}}$, то это неверно. Здесь не хватает члена $(\dot{a}/a)\,\mathbf{d}\omega^{\hat{\chi}}$. Вместо этого проще записать $\omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}} = (\dot{a}/a)\,\omega^{\hat{\chi}} = \dot{a}\,\mathbf{d}\chi$, откуда сразу получим $\mathbf{d}\omega^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}} = \ddot{a}\,\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}\chi = (\ddot{a}/a)\,\omega^{\hat{\imath}}\wedge\omega^{\hat{\chi}}$. Соблюдение элементарных предосторожностей и правильная подстановка $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ из (3) в формулу

для $\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu}$ позволяют найти

$$\mathscr{R}^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}} = (\ddot{a}/a)\,\omega^{\hat{\imath}} \wedge \omega^{\hat{\chi}}$$

и

$$\mathscr{R}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}} = a^{-2}(1+\dot{a}^2)\,\omega^{\hat{\imath}\hat{\chi}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}.$$

На этом заканчивается вычисление $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$, поскольку в модели изотропного мира все пространственные направления в ортонормированной системе ω^{μ} алгебраически эквивалентны. Поэтому можно выписать полный набор

$$\begin{aligned} \mathscr{R}^{\hat{\imath}}{}_{k} &= (\ddot{a}/a)\,\omega^{\hat{\imath}} \wedge \omega^{k}, \\ \mathscr{R}^{k}{}_{l} &= a^{-2}(1+\dot{a}^2)\,\omega^{k} \wedge \omega^{l}. \end{aligned} \tag{4}$$

Конкретные компоненты, например

$$R^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}\hat{\imath}\hat{\chi}} = \ddot{a}/a, \quad R^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\chi}\hat{\imath}\hat{\theta}} = 0 \text{ и т. д.},$$

или

$$R^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\theta}\hat{\chi}\hat{\phi}} = 0, \qquad R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = a^{-2}(1+\dot{a}^2),$$

легко выписываются из полученного представления для $\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu}$.

B. Свертка

Из соотношений (14.7) находим

$$G^{\hat{\imath}\hat{\imath}} = +3a^{-2}(1+\dot{a}^2), \tag{5а}$$

$$G^{\hat{\imath}\hat{\chi}} = G^{\hat{\imath}\hat{\theta}} = G^{\hat{\imath}\hat{\phi}} = 0 = G^{\hat{\chi}\hat{\theta}} = G^{\hat{\theta}\hat{\phi}} = G^{\hat{\phi}\hat{\chi}}, \tag{5б}$$

$$G^{\hat{\chi}\hat{\chi}} = G^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -[2a^{-1}\ddot{a} + a^{-2}(1+\dot{a}^2)] \tag{5в}$$

и

$$R = -G^{\mu}{}_{\mu} = 6\,[a^{-1}\ddot{a} + a^{-2}(1+\dot{a}^2)]. \tag{6}$$

15. ТОЖДЕСТВА БИАНКИ И ГРАНИЦА ГРАНИЦЫ

Эта глава целиком относится к курсу 2.
В качестве подготовительного материала для нее необходимо ознакомиться
1) с гл. 4 (дифференциальные формы) и
2) с гл. 14 (вычисление кривизны).
При ее чтении полезно знание материала гл. 9—11 и 13.
Она не нужна в качестве подготовительного материала для последующих глав, но знакомство с ней окажется полезным в гл. 17 (эйнштейновские уравнения поля).

§ 15.1. КРАТКО О ТОЖДЕСТВАХ БИАНКИ

Геометрия дает указания материи, но каким образом материя может давать указания геометрии? Геометрия передает свои указания материи простым способом: «Следуй вдоль мировой линии с экстремальным собственным временем (по геодезической)». А каким способом материя оказывает обратное действие на геометрию? Как можно выделить правильный способ, когда метрическая геометрия Римана и Эйнштейна обладает множеством интересных особенностей? Физика указывает, что нужно искать *такой вид связи между тяготением* (*кривизной пространства-времени*) *и источником* (материей; тензором энергии-импульса $\mathbf{T}$), *который, обеспечивает автоматическое сохранение источника* ($\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$). Следовательно, физика задает математике вопрос: «Какая характерная величина типа тензора в геометрии автоматически сохраняется?» Математика дает ответ: «Тензор Эйнштейна». Физика спрашивает: «Каким образом обеспечивается это сохранение?» Математика в лице Эли Картана отвечает: «Благодаря принципу, гласящему, что граница границы равна нулю» (дополнение 15.1).

В действительности автоматически сохраняются две характерные особенности кривизны, или, в другой формулировке, кривизна удовлетворяет двум тождествам Бианки (предмет изучения данной главы). Обе особенности кривизны, которые являются «геометрическими объектами», допускают наглядное представление на чертежах и, более того, на чертежах, отображающих в действии принцип «граница границы равна нулю». В этом отношении геометрия пространства-времени удивительным образом напоминает поле в максвелловской электродинамике.

Тождества и сохранение источника: сравнение теорий электромагнетизма и гравитации

В электродинамике имеются четыре потенциала, которые объединены в 1-форму $\mathbf{A} \equiv A_\mu \mathbf{d}x^\mu$. Из этой величины с помощью дифференцирования получается $\mathbf{F} = \mathbf{dA}$. Это поле удовлетворяет тождеству $\mathbf{dF} = 0$ (тождеству — да; тождеству, допускающему определение сохраняющегося источника,— нет).

$\mathbf{dF} \equiv 0$

В теории тяготения имеется десять потенциалов (метрических коэффициентов $g_{\mu\nu}$), которые объединены в метрический тензор $\mathbf{g} = g_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$. Из этой величины с помощью двух дифференцирований получается оператор кривизны

$$\mathscr{R} = \frac{1}{4}\mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta.$$

Этот оператор кривизны удовлетворяет тождеству Бианки $\mathbf{d}\mathscr{R} = 0$, где $\mathbf{d}$ теперь представляет собой обобщение внешней производной Картана, более полно описанное в гл. 14 (снова тождество, но снова такое тождество, которое не допускает определения сохраняющегося источника).

$\mathbf{d}\mathscr{R} \equiv 0$

В электромагнетизме, чтобы получить такие характеристики поля, которыми можно управлять с помощью источника $\mathbf{d}^*\mathbf{F} = 4\pi^*\mathbf{J}$, требуется перейти к дуальному объекту $^*\mathbf{F}$. Сохранение источника $\mathbf{d}^*\mathbf{J} = 0$ в данном случае оказывается следствием тождества $\mathbf{dd}^*\mathbf{F} = 0$, или, другими словами (дополнение 15.1), следствием обращения в нуль границы границы.

$\mathbf{d}^*\mathbf{F} \equiv 0$ плюс уравнения Максвелла $\Rightarrow \mathbf{d}^*\mathbf{J} = 0$

В физике тяготения нужно перейти к «дважды дуальному» (две пары альтернированных индексов, две возможности применить оператор дуальности) $\mathbf{R}$ объекту $\mathfrak{G} = {}^*\mathbf{R}^*$, чтобы получить такую характеристику поля, с помощью которой можно управлять источником:

$$\mathbf{G} = \mathrm{Sp}\mathfrak{G} = 8\pi\mathbf{T} = 8\pi \times (\text{плотность энергии-импульса}).$$

Сохранение источника $\mathbf{T} = \mathbf{e}_\mu T^\mu{}_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu$ можно сформулировать как $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T} = 0$. Но для наших целей более подходит форма (см. гл. 14 и упражнение 14.18)

$\mathbf{d}^*\mathbf{G} \equiv 0$ плюс уравнение поля Эйнштейна $\Rightarrow \mathbf{d}^*\mathbf{T} = 0$

$$\mathbf{d}^*\mathbf{T} = 0,$$

где

$$^*\mathbf{T} \equiv \mathbf{e}_\mu T^\mu{}_\nu\,(^*\boldsymbol{\omega}^\nu) = \mathbf{e}_\mu T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu.$$

Этот закон сохранения вытекает в качестве следствия из «свернутого тождества Бианки» $\mathbf{d}^*\mathbf{G} = 0$, которое тоже можно интерпретировать как обращение в нуль границы границы.

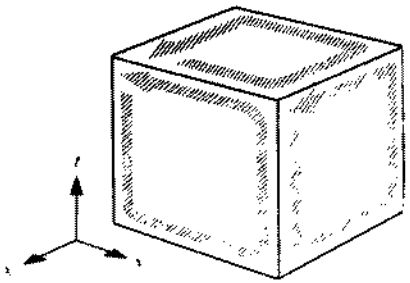
Дополнение 15.1. ГРАНИЦА ГРАНИЦЫ РАВНА НУЛЮ

А. Идея в 1-2-3-мерной форме

Начнем с ориентированного куба или некоторого приближения к нему (трехмерного).

Его граница состоит из шести ориентированных граней, каждая из которых двумерна. Ориентация каждой грани указана стрелкой. Граница одной ориенти-

рованной грани состоит из четырех ориентированных ребер, или стрелок, каждая из которых одномерна. Каждое ребро соединяет две различные грани. Ни одно ребро не лежит само по себе, изолированно.



«Просуммируем» по всем этим ребрам, учитывая надлежащим образом знак каждого из них. При этом окажется, что каждое данное ребро учитывается дважды: один раз в одном направлении, другой раз — в противоположном.

Отсюда заключаем, что одномерная граница двумерной границы трехмерного куба тождественно равна нулю.

Б. Идея в 2-3-4-мерной форме

Начнем с ориентированного четырехмерного куба или некоего приближения к нему. В качестве координат угловых точек 4-куба можно взять $\left(t_0 \pm \frac{1}{2}\Delta t, x_0 \pm \frac{1}{2}\Delta x, y_0 \pm \frac{1}{2}\Delta y, z_0 \pm \frac{1}{2}\Delta z\right)$; а для самих угловых точек удобно ввести понятные сокращенные обозначения вида $+---+$. Всего таких угловых точек 16. Трехмерные грани 4-куба легче представить, нежели его самого; эти грани, представляющие 4-куб «в разобранном виде», изображены вокруг него на рисунке, где их можно изучить во всех подробностях.

Граница 4-куба состоит из восьми ориентированных гиперграней, каждая из которых трехмерна (верхняя гиперграпь, например, простирается на $\Delta x \Delta y \Delta z$, «передняя» гиперграпь простирается на $\Delta t \Delta y \Delta z$ и т. д.).

Граница одной гиперграни («куба») состоит из шести ориентированных граней, каждая из которых двумерна. Каждая грань (например, заштрихованная грань $\Delta x \Delta y$ в левом нижнем углу) соединяет две разные гиперповерхности (в нашем примере это «3-куб боковой гиперграни» $\Delta t \Delta x \Delta y$ в левом нижнем углу и «3-куб верхней гиперграни» $\Delta x \Delta y \Delta z$). Ни одна грань не лежит сама по себе, изолированно. Трехмерная граница 4-куба не имеет 2-поверхности, обращенной к внешнему миру. У нее *нет граней*.

«Просуммируем» по всем этим граням, учитывая надлежащим образом ориентацию каждой из них. При этом окажется, что каждая данная грань учитывается дважды: один раз с одной ориентацией, другой раз — с противоположной.

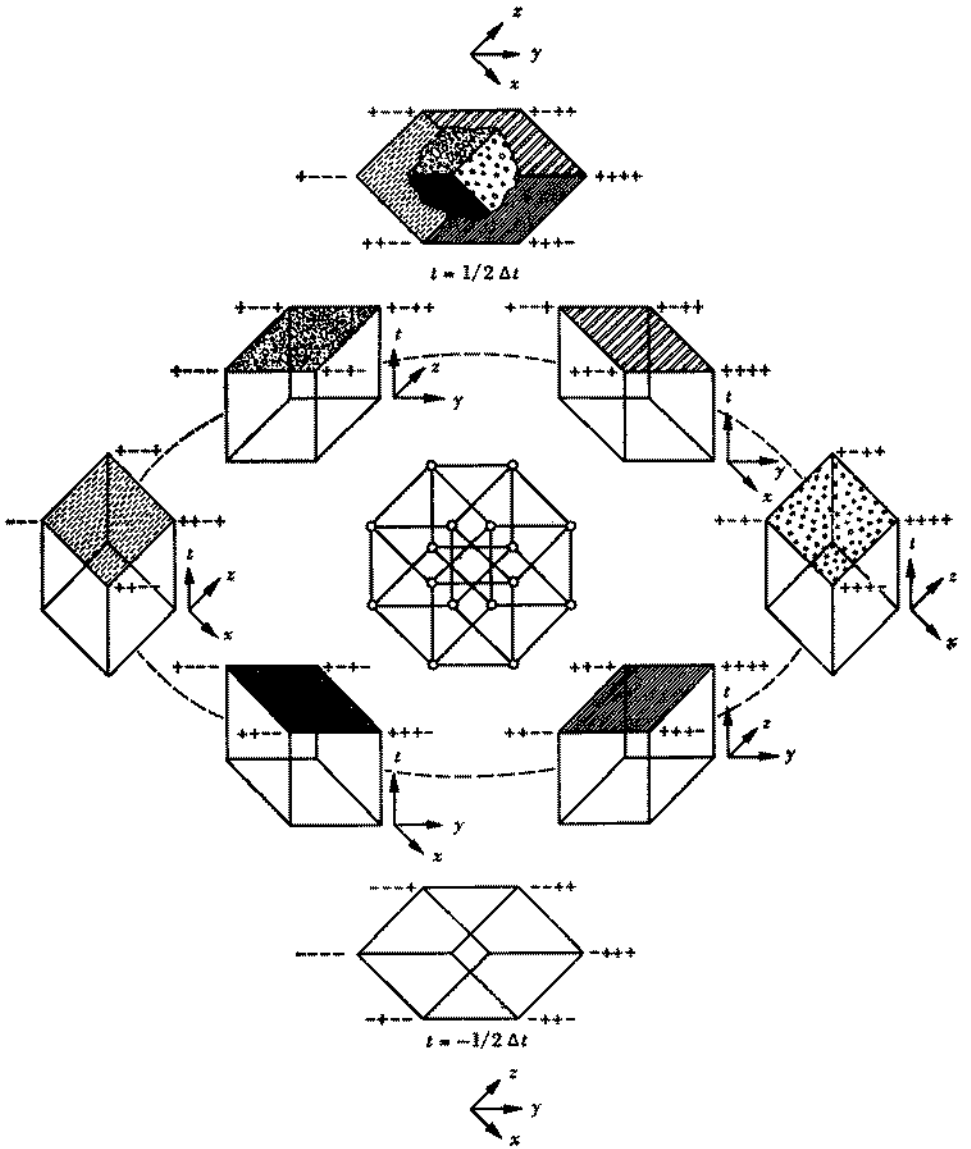
Отсюда заключаем, что двумерная граница трехмерной границы четырехмерного куба тождественно равна нулю.

В. Идея в общей абстрактной форме

$\partial\partial = 0$ (граница границы равна нулю).

Г. Идея в применении к теориям тяготения и электромагнетизма

Одним основным пунктом является закон сохранения (сохранения заряда; сохранения энергии-импульса).



Другим основным пунктом является «автоматическое выполнение» этого закона сохранения.

«Автоматическое сохранение» требует, чтобы источник не имел полной свободы изменяться произвольным образом от точки к точке и от одного момента времени к другому.

Источник должен быть связан с чем-то таким, что обладает своими собственными степенями свободы и в то же время настолько урезает степени свободы источника, которые до этого были совершенно произвольны, что обеспечивает автоматическое выполнение закона сохранения источника. Назовем это что-то «полем».

Определим это поле и «привяжем» его к источнику таким образом, чтобы сохранение источника автоматически вытекало из «равенства нулю границы границы». Или, в более определенной форме: сохранение означает, что источник не рождается и не исчезает внутри четырехмерного куба, изображенного на рисунке. Это эквивалентно тому, что интеграл по «актам рождения» (интеграл от $\mathbf{d}^*\mathbf{J}$ для электрического заряда; интеграл от $\mathbf{d}^*\mathbf{T}$ для энергии-импульса) в этой четырехмерной области должен быть равен нулю

Интеграл рождения по этой четырехмерной области переводится в интеграл от плотности-тока источника ($^*\mathbf{J}$ или $^*\mathbf{T}$) по трехмерной границе этой области. Эта граница состоит из восьми гиперграней, каждая со своей ориентацией. Интеграл по верхней гиперграни ($\Delta x \Delta y \Delta z$) дает количество имеющегося источника в более поздний момент; интеграл по нижней гиперграни дает количество имеющегося источника в более ранний момент; интеграл по таким гиперграням, как $\Delta t \Delta x \Delta y$, дает количество источника, вытекшего за прошедший промежуток времени. Сохранение означает, что сумма этих восьми трехмерных интегралов должна быть равна нулю (подробности см. в гл. 5).

Обращение в нуль этой суммы трехмерных интегралов позволяет сформулировать требование сохранения, но не позволяет найти механизм, обеспечивающий «автоматическое» (или, в математических терминах, «тождественное») удовлетворение этого требования. Поэтому обратимся к принципу, утверждающему, что «граница границы равна нулю».

Потребуем, чтобы интеграл от плотности-тока источника по любой ориентированной гиперграни $\mathscr{V}$ (трехмерная область; «куб») был равен интегралу от поля по граням этого «куба» (каждая грань берется с соответствующей ориентацией, а куб имеет бесконечно малые размеры):

$$4\pi \int_{\mathscr{V}} {}^*\mathbf{J} = \int_{\partial\mathscr{V}} {}^*\mathbf{F}, \qquad 8\pi \int_{\mathscr{V}} {}^*\mathbf{T} = \int_{\partial\mathscr{V}} \begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{поворота}\end{pmatrix}.$$

Просуммируем по всем шести граням этого куба, добавим сумму по шести граням другого куба и т. д., пока не будут охвачены все восемь кубов. При этом окажется, что каждая данная грань (например, заштрихованная грань на рисунке) учитывается дважды: один раз с одной ориентацией, другой раз — с противоположной («граница границы равна нулю»). Тем самым обеспечивается сохранение источника: интеграл от плотности-тока источника по трехмерной границе четырехмерной области автоматически обращается в нуль, что влечет за собой тождественное обращение в нуль интеграла рождения по внутренней части этой четырехмерной области.

Повторив все выкладки для этой же четырехмерной области, граница которой немного смещена в одном месте («пузырьковое дифференцирование» Томопаги [170] и Швингера [171]), придем к заключению, что сохранение обеспечивается не только в четырехмерной области, взятой целиком, но и в каждой ее точке, а после соответствующего распространения — и повсюду в пространстве-времени.

Д. Связь источника с полем

Одна точка зрения: источник первичен. У поля могут быть и другие функции, но его основная функция состоит в том, чтобы «служить» источнику. Сохранение источника прежде всего; поле должно соответствующим образом подлаживаться.

Другая точка зрения: поле первично. На поле возлагается ответственность следить за тем, чтобы источник подчинялся закону сохранения. В отсутствие поля источник просто не знал бы, что ему делать, и даже вообще не существовал бы. Источник «построен» из поля. Сохранение источника есть следствие этого построения.

Одна из моделей, иллюстрирующая такую точку зрения в простейшем случае, утверждает: понятие «классический» электрический заряд представляет собой не что иное, как «электрические силовые линии в топологической ловушке многосвязного пространства» [106, 172, 173].

С любой точки зрения: интеграл от плотности-тока источника по любой трехмерной области (по «кубу» в упрощенном анализе, проведенном выше) равен интегралу от поля по границе этой области (по шести граням куба, рассмотренного выше). Никто еще до сих пор не отыскал иного способа постичь взаимосвязь законов поля и закона сохранения.

Е. Электромагнетизм в качестве модели: как «привязать» источник к полю, чтобы получить автоматическое сохранение источника посредством $\partial\partial = 0$ в 2-3-4-мерной форме

Сохранение означает равенство нулю рождения заряда (равенства нулю в четырехмерной области Ω). Поэтому сохранение требует обращения в нуль интеграла от плотности-тока заряда по трехмерной границе этого объема, т. е.

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu}\, d^4\Omega = \int_{\partial\Omega} J^\mu\, d^3\Sigma_\mu$$

на языке курса 1 (гл. 3 и 5). На свободном от координат абстрактном языке (§ 4.3—4.6) эквивалентная запись этого соотношения имеет вид

$$0 = \int_\Omega \mathbf{d}{}^*\mathbf{J} = \int_{\partial\Omega} {}^*\mathbf{J},$$

где

$${}^*\mathbf{J} = {}^*J_{123}\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 + {}^*J_{023}\,\mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 + {}^*J_{031}\,\mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^3 \wedge \mathbf{d}x^1 + {}^*J_{012}\,\mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2$$

(структура типа «коробки для яиц» 3-формы плотности заряда и плотности тока).

Обеспечим автоматическое («тождественное») выполнение этого требования сохранения с помощью принципа «граница границы равна нулю», написав $4\pi{}^*\mathbf{J} = \mathbf{d}{}^*\mathbf{F}$, тогда

$$4\pi \int_{\partial\Omega} {}^*\mathbf{J} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{d}{}^*\mathbf{F} = \int_{\partial\partial\Omega\ (\text{нуль!})} {}^*\mathbf{F} \equiv 0,$$

или, на языке курса 1, написав $4\pi J^\mu = F^{\mu\nu}{}_{;\nu}$, имеем

$$4\pi \int_{\partial\Omega} J^\mu d^3\Sigma_\mu = \int_{\partial\Omega} F^{\mu\nu}{}_{;\nu}\, d^3\Sigma_\mu = \int_{\partial\partial\Omega\ (\text{нуль!})} F^{\mu\alpha}\, d^2\Sigma_{\mu\alpha} \equiv 0.$$

Другими словами, половина уравнений Максвелла в знакомом виде для плоского пространства

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{B} = \dot{\boldsymbol{E}} + 4\pi \boldsymbol{J}$$

«привязывает» источник к полю таким образом, чтобы закон сохранения источника непосредственно следовал из $\partial\partial\Omega = 0$.

Ж. В электромагнетизме также используется $\partial\partial = 0$ в 1-2-3-мерной форме («отсутствие магнитных зарядов»)

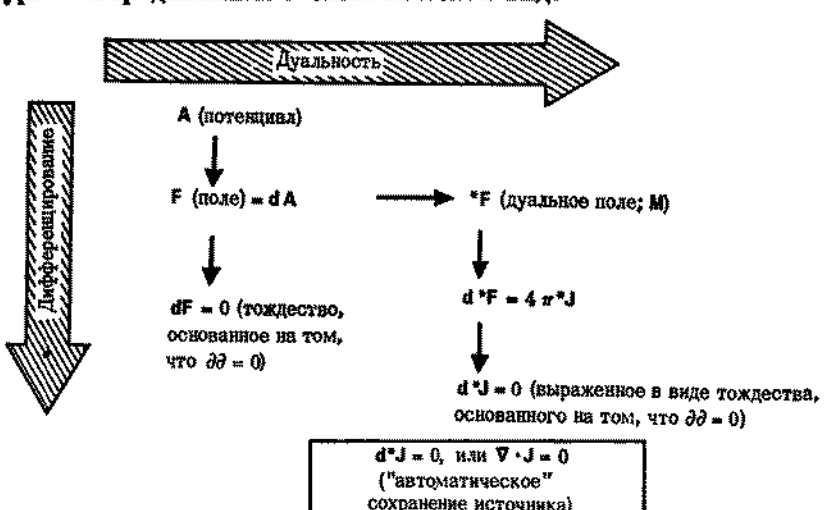
Магнитный заряд связан с полем посредством соотношения $4\pi\, \mathbf{J}_{\text{магн}} = \mathbf{dF}$ (перевод этого компактного языка курса 2 на эквивалентный язык курса 1 см. выше в пункте Е). Отсутствие магнитных зарядов означает, что интеграл от $\mathbf{J}_{\text{магн}}$ по любому 3-объему $\mathscr{V}$ должен быть равен нулю, или («интегрирование по частям», обобщенная теорема Стокса)

$$0 = \int\limits_{\mathscr{V}} \mathbf{dF} = \int\limits_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{F} = \begin{pmatrix}\text{полный магнитный поток,}\\ \text{выходящий через } \partial\mathscr{V}\end{pmatrix}.$$

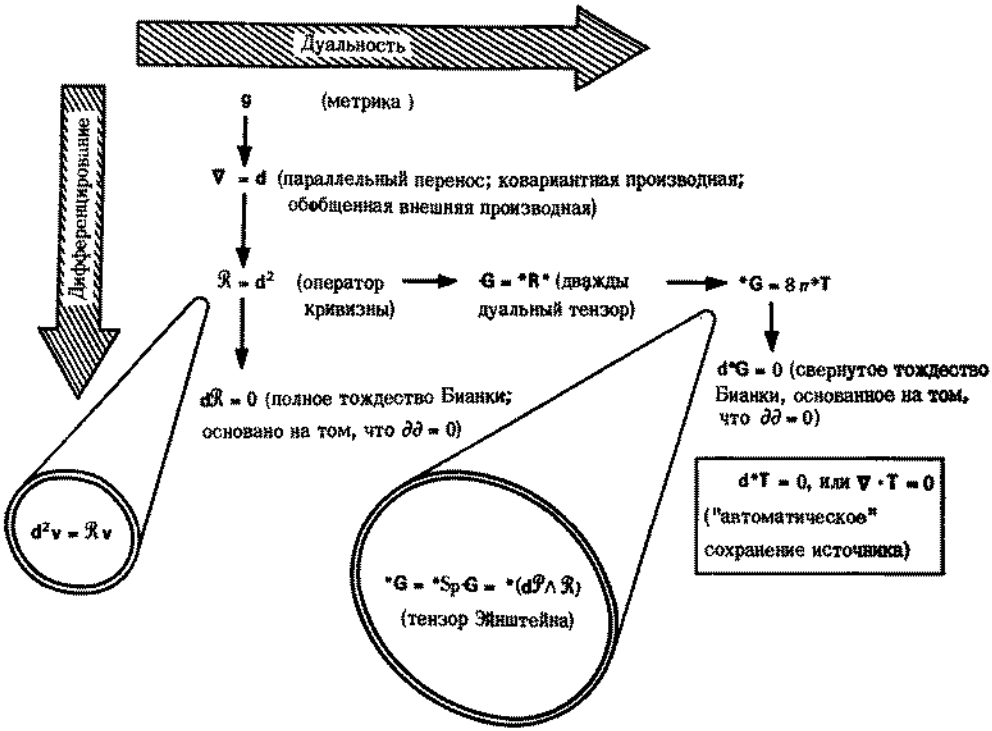
Чтобы удовлетворить этому требованию «автоматически», посредством принципа «граница границы равна нулю», запишем $\mathbf{F} = \mathbf{dA}$ («выражение для поля через 4-потенциал»), после чего получим

$$\int\limits_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{F} = \int\limits_{\partial\mathscr{V}} \mathbf{dA} = \int\limits_{\partial\partial\mathscr{V}\,(\text{нуль!})} \mathbf{A} \equiv 0.$$

3. Структура электродинамики в схематическом виде



И. Структура геометродинамики в схематическом виде



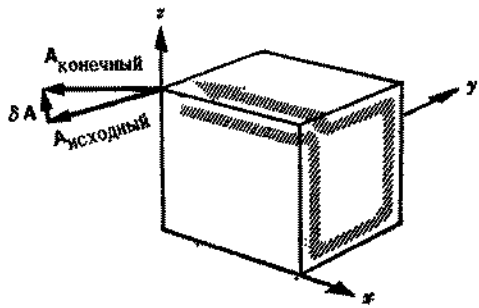
§ 15.2. ТОЖДЕСТВО БИАНКИ $d\mathcal{R} = 0$ — ПРОЯВЛЕНИЕ ТОГО, ЧТО «ГРАНИЦА ГРАНИЦЫ = 0»

Интерпретация тождества Бианки $d\mathcal{R} \equiv 0$ с помощью параллельного переноса вокруг шести граней куба

Таково краткое изложение смысла тождеств Бианки; теперь следует выяснить все детали. Фиг. 15.1 служит иллюстрацией полного тождества Бианки $d\mathcal{R} = 0$ (см. упражнение 14.17), смысл которого можно кратко выразить словами: «Сумма обусловленных кривизной поворотов, испытываемых на каждой из шести граней произвольного элементарного куба, равна нулю». Изменение вектора $\mathbf{A}$, возникающее в результате параллельного переноса по периметру указанной грани, будучи вычислено с точностью до наименьшего имеющего значение порядка малости, составляет

$$-\delta A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta yz}(\text{в } x + \Delta x)\, A^{\beta} \Delta y\, \Delta z. \tag{15.1}$$

Противоположная грань дает аналогичный вклад, но с противоположным знаком, и значения соответствующих величин должны быть взяты в точке x, а не $x + \Delta x$. Если воспользоваться нор-



ФИГ 15.1

Сложение поворотов, испытываемых на каждой из шести граней изображенного 3-объема, дает результирующий поворот, равный нулю («полное тождество Бианки»). *Причина.* Вклад каждой грани оценивается по изменению пробного вектора A, обнесенного параллельным образом по периметру этой грани. Сложение вкладов от всех граней показывает, что в результате каждое ребро проходится дважды, один раз в одном направлении, другой раз — в противоположном [граница (здесь одномерная) границы (двумерной) изображенного трехмерного тела равна нулю]. *Пояснения.* Вектор A, находящийся вначале в указанном месте, переносится параллельно к указанной грани, затем обносится параллельным образом по периметру этой грани, претерпевая при этом поворот, величина которого определяется кривизной пространства-времени вдоль этой грани, и затем опять же параллельным образом переносится обратно в исходную точку. С точностью до наинизшего порядка малости, который играет роль, в операторных обозначениях можно записать

$$(\text{изменение } \mathbf{A}) = -\Delta y\, \Delta z\, \mathscr{R}(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)\, \mathbf{A},$$

или в координатных обозначениях $-\delta A^\alpha = R^\alpha{}_{\beta yz}(\text{в } x + \Delta x)\, A^\beta\, \Delta y\, \Delta z.$

мальными римановыми координатами, то сумма вкладов от обеих граней равна

$$\frac{\partial R^\alpha{}_{\beta yz}}{\partial x} A^\beta\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z. \tag{15.2}$$

В этих координатах из обращения в нуль полного $-\delta A^\alpha$, составленного из вкладов от всех шести граней, следует

$$R^\alpha{}_{\beta yz;x} + R^\alpha{}_{\beta zx;y} + R^\alpha{}_{\beta xy;z} = 0. \tag{15.3}$$

В нашем случае вместо запятых (обычных производных) можно поставить (что здесь и сделано) точки с запятыми (ковариантные производные), поскольку в нормальных римановых координатах они совпадают; с другой стороны, ковариантная форма записи (15.3) является обобщением на случай произвольных криволинейных координат. Переходя от куба с ребрами x, y, z к кубу, определяемому произвольной тройкой координатных осей, записываем тождество Бианки в виде

$$R^\alpha{}_{\beta[\lambda\mu;\nu]} = 0. \tag{15.4}$$

(Две другие формулировки этого тождества в абстрактном, свободном от координат виде см. в упражнении 14.17, где оно представлено как $\mathbf{d}\mathscr{R} = 0$, и в § 15.3.) Это тождество занимает в теории гравитации такое же место, какое тождество $\mathbf{dF} = \mathbf{ddA} \equiv 0$ занимает в теории электромагнетизма:

$$F_{[\lambda\mu,\nu]} \equiv F_{[\lambda\mu;\nu]} \equiv 0. \tag{15.5}$$

§ 15.3. МОМЕНТ ПОВОРОТА: КЛЮЧ К ПОНИМАНИЮ СВЕРНУТОГО ТОЖДЕСТВА БИАНКИ

Как показал Картан [6, 174; 175], свернутое тождество Бианки — тождество, которое дает «вид связи с источником», имеет непосредственное отношение к «моменту поворота». Моменты известны из обычной механики. Твердое тело остается в покое только в том случае, если сумма всех действующих на него сил равна нулю:

$$\sum_i \boldsymbol{F}^{(i)} = 0. \tag{15.6}$$

Это условие является необходимым, но не достаточным. Должна быть равна нулю и сумма моментов этих сил относительно некоторой точки $\mathscr{P}$:

$$\sum_i (\mathscr{P}^{(i)} - \mathscr{P}) \wedge \boldsymbol{F}^{(i)} = 0. \tag{15.7}$$

К счастью, не нужно уточнять, относительно какой точки берутся моменты. Причина этого проста. В качестве коэффициента перед произвольной точкой в векторном произведении (15.7) стоит величина $\sum_i \boldsymbol{F}^{(i)}$, обращение в нуль которой уже потребовано ранее.

Ситуация для элементарного куба на фиг. 15.1 аналогична. Здесь поворот, соответствующий данной грани, является аналогом силы $\boldsymbol{F}^{(i)}$ в механике. А обращение в нуль суммы таких поворотов, вычисленных по всем шести граням куба, является аналогом обращения в нуль суммы сил $\boldsymbol{F}^{(i)}$.

Полный момент поворота всех шести граней куба:

Что же является аналогом момента силы (с которым мы сталкиваемся в механике) при анализе кривизны? Это *момент поворота, соответствующий данной грани куба*. Значение каждого отдельного момента зависит от точки отсчета $\mathscr{P}$. Однако по той же точно причине, что и в механике, значение суммы этих моментов, взятой по всем шести граням куба, не зависит от точки отсчета $\mathscr{P}$. Следовательно, в качестве $\mathscr{P}$ можно выбрать какую угодно точку как внутри элементарного куба, так и вне его. Более того, куб можно считать частью гиперповерхности, рассекающей пространство-время. Поэтому $\mathscr{P}$ может как принадлежать этому сечению, так и находиться вне его. Необходимо лишь, чтобы все расстояния, с которыми приходится иметь дело, были достаточно малы, чтобы можно было с требуемой точностью найти моменты и сумму

1) описание

2

моментов в локальной системе нормальных римановых координат. При этом мы получим независящий от $\mathcal{P}$ суммарный момент поворота (не обязательно равный нулю; гравитация — это не механика!), соответствующий рассмотренному кубу. Теперь наступает очередь магического «граница границы равна нулю». Отождествим полный момент поворота куба, найденный суммированием отдельных моментов поворота, соответствующих отдельным граням, с интегралом от плотности-тока источника (тензора энергии-импульса $^*\mathbf{T}$) по объему этого 3-куба. Проведем это отождествление не только для одного 3-куба, но и для всех восьми 3-кубов (гиперграней), которые ограничивают четырехмерный куб, рассмотренный в дополнении 15.1. Просуммируем интегралы от плотности-тока источника $^*\mathbf{T}$ не только по одной гиперграни 4-куба, а по всем восьми гиперграням. В результате получим

2) отождествление с интегралом от источника $\int {}^*\mathbf{T}$ по объему куба

$$\int_{\text{4-куб}} \begin{pmatrix}\text{рождение}\\ \text{источника}\\ \mathbf{d}^*\mathbf{T}\end{pmatrix} = \int_{\substack{\text{3-граница}\\ \text{этого 4-куба}}} \begin{pmatrix}\text{плотность-ток}\\ \text{источника } {}^*\mathbf{T}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\substack{\text{восемь}\\ \text{граничных}\\ \text{3-куба}}} \begin{pmatrix}\text{полный момент поворота,}\\ \text{соответствующий данному}\\ \text{кубу}\end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\text{восемь}\\ \text{граничных}\\ \text{3-куба}}} \sum_{\substack{\text{шесть граней,}\\ \text{ограничивающих}\\ \text{данный 3-куб}}}}_{\text{(нуль)!}} \begin{pmatrix}\text{момент поворота,}\\ \text{соответствующий}\\ \text{данной грани куба}\end{pmatrix}. \qquad (15.8)$$

Пусть моменты не только для шести граней одного куба, но и для всех граней всех кубов берутся по отношению к одной и той же точке $\mathcal{P}$. Напомним (дополнение 15.1), что любая данная грань соединяет два куба (две гиперграни). Поэтому при подсчете граней она учитывается дважды, один раз с одной ориентацией («направлением обхода при параллельном переносе, позволяющим найти поворот»), другой раз с противоположной ориентацией. Следовательно, двойная сумма тождественно обращается в нуль (граница границы равна нулю!). Этому тождеству обязан своим существованием новый геометрический объект — такая характеристика кривизны, которая сохраняется и, следовательно, дает способ установить связь с источником. Тем самым мы достигли желаемого результата. Теперь переведем его на обычный математический язык.

3) сохранение

§ 15.4. НАХОЖДЕНИЕ МОМЕНТА ПОВОРОТА

Остается определить тензорный характер и значение этого сохраняющегося картанова момента поворота, присущего каждому элементарному 3-объему. Поворот, соответствующий пере-

4) вычисление

дней грани $\Delta y \Delta z \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$ куба на фиг. 15.1, представляется в виде бивектора

$$\begin{pmatrix}\text{поворот, соответствующий}\\ \text{передней грани } \Delta y \Delta z\end{pmatrix} = \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz} \Delta y\, \Delta z, \quad (15.9)$$

принадлежащего событию $\mathscr{P}_{\text{передн. гр}} = \left(t - \frac{1}{2}\Delta t,\ x + \Delta x,\ y + \right.$ $\left. + \frac{1}{2}\Delta y,\ z + \frac{1}{2}\Delta z\right)$. В этом соотношении использованы нормальные римановы координаты; суммирование по индексам, заключенным в вертикальные черточки, как, например, $|\lambda\mu|$, ограничено условием $\lambda < \mu$. Момент этого поворота по отношению к точке $\mathscr{P}$ представляется тривектором

$$\begin{pmatrix}\text{момент поворота,}\\ \text{соответствующий}\\ \text{передней грани}\\ \Delta y\, \Delta z\end{pmatrix} = (\mathscr{P}_{\substack{\text{центр}\\ \text{передн. гр}}} - \mathscr{P}) \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz} \Delta y\, \Delta z. \quad (15.10)$$

Здесь ни $\mathscr{P}_{\text{п. передн. гр}}$, ни $\mathscr{P}$ не имеют точно определенного смысла, которым обладает вектор, но их разность представляет собой вектор в пределе бесконечно малого разделения $\Delta\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\text{п. передн. гр}} - \mathscr{P}$. Задней грани соответствует такой же момент поворота, но с противоположным знаком и с заменой $\mathscr{P}_{\text{ц. передн. гр}}$ на $\mathscr{P}_{\text{п. задн. гр}}$. В разности этих двух членов множитель $\mathscr{P}$ не представляет никакого интереса, поскольку мы уже знаем, что он сократится [тождество Бианки (15.4); аналог равенства $\Sigma \mathbf{F}^{(i)} = 0$ в механике]. Значение разности $\mathscr{P}_{\text{ц. передн. гр}} - \mathscr{P}_{\text{п. задн. гр}}$ составляет $\Delta x \mathbf{e}_x$. Суммируя по всем шести граням, получаем

$$\begin{pmatrix}\text{полный момент поворота, соответствующий}\\ \text{кубу, или гиперграни } \Delta x\, \Delta y\, \Delta z)\end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \text{ (передняя и задняя грани)} +$$

$$+ \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{zx} \Delta y\, \Delta z\, \Delta x \text{ (боковые грани)} +$$

$$+ \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{xy} \Delta z\, \Delta x\, \Delta y \text{ (верхняя и нижняя грани)}. \quad (15.11)$$

В этой сумме мы узнаем значение (на элементе объема $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$) 3-формы

$$\mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|} \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta.$$

Более того, эта 3-форма определена в точке (причем определена строго), тогда как выражение (15.11), относящееся к протяженной области, не может быть подвергнуто анализу, который одновременно и точен и краток. Поэтому мы предпочтем 3-форму выражению (15.11). При этом, когда дело доходит до интерпретации, нельзя забывать, что значение этой 3-формы надо находить для «куба»

$\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z \Delta x \Delta y \Delta z$. Заметим теперь, что «тривекторнозначную 3-форму момента вращения» можно записать также в виде

5) запись в абстрактной форме $d\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}$

$$\begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{поворота}\end{pmatrix} = d\mathcal{P} \wedge \mathcal{R} = \mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|}\, dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (15.12)$$

Здесь

$$d\mathcal{P} = \mathbf{e}_\sigma\, dx^\sigma \quad (15.13)$$

есть картанов единичный тензор ранга $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Через $\mathcal{R}$ обозначен оператор кривизны, трактуемый как бивекторнозначная 2-форма:

$$\mathcal{R} = \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (15.14)$$

На языке компонент, как в (15.11), или на абстрактном языке, введенном в (15.12),— в обоих случаях нам приходится иметь дело с тривектором. Тривектор можно оставить и тривектором, как (в совсем ином контексте) элемент 3-объема на гиперповерхности в 4-пространстве можно оставить в виде тривектора. Однако удобнее перейти к дуальному представлению и говорить об элементе объема, как о векторе. Обозначим посредством $\star$ операцию дуальности, действующую лишь на контравариантные векторы, тривекторы и т. п. (но *не* на формы). Тогда в лоренцевой системе будем иметь $\star(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_0$, но $\star(dx^3) = dx^3$. В более общем виде

$$\star(\mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\mu) = \varepsilon_{\nu\lambda\mu}{}^\sigma \mathbf{e}_\sigma. \quad (15.15)$$

В этих обозначениях «векторнозначная 3-форма момента поворота принимает вид

6) запись в абстрактной форме $\star(d\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) = \mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau$

$$\begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{поворота}\end{pmatrix} = \star(d\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) = \mathbf{e}_\sigma \varepsilon_{\nu\lambda\mu}{}^\sigma R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|}\, dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta =$$

$$= \mathbf{e}_\sigma (\star R)_\nu{}^\sigma{}_{|\alpha\beta|}\, dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

или на следующем этапе

$$\begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{поворота}\end{pmatrix} = \star(d\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) = \mathbf{e}_\sigma (\star R^\star)_\nu{}^{\sigma\nu\tau} d^3\Sigma_\tau. \quad (15.16)$$

Здесь, как и в дополнении 5.4, через $d^3\Sigma_\tau$ обозначены базисные 3-формы; таким образом,

$$dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \varepsilon^{\nu\alpha\beta\tau}\, d^3\Sigma_\tau. \quad (15.17)$$

(В локально лоренцевой системе $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = d^3\Sigma_0$.)

Формула (15.16) занимает центральное место при анализе кривизны. Она исходит из элемента 3-объема и дает в результате момент поворота в этом 3-объеме. Тензор, который связывает исходный объем с конечным моментом,—«свернутый дважды дуальный» $\mathbf{R}$ — настолько важен, что заслуживает собственного названия. Он назван тензором Эйнштейна $\mathbf{G}$, т. е.

$$(\text{тензор Эйнштейна})^{\sigma\tau} \equiv G^{\sigma\tau} = G_\nu{}^{\sigma\nu\tau} = (\star R^\star)_\nu{}^{\sigma\nu\tau}. \quad (15.18)$$

Об этом тензоре уже шла речь в § 13.5, 14.2, а также в примерах в конце гл. 14. Выраженная через $\mathbf{G}$ связь между элементом 3-объема и «векторнозначным моментом поворота» принимает вид

$$\begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{поворота}\end{pmatrix} = {}^*(\mathbf{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) = \mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau. \tag{15.19}$$

В общей теории относительности количество «векторнозначного момента поворота» в элементе 3-объема $d^3\Sigma_\mu$ отождествляется с количеством энергии-импульса в этом же 3-объеме. Однако мы не будем пока делать этого отождествления и остановимся подробнее на свойствах сохранения момента поворота. Сначала мы рассмотрим их в формулировке на языке интегрального исчисления, где они являются следствием принципа $\partial\partial \equiv 0$. Затем мы рассмотрим их в дифференциальной формулировке как следствие тождества $\mathbf{dd} \equiv 0$.

§ 15.5. СОХРАНЕНИЕ МОМЕНТА ПОВОРОТА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПРИНЦИПА «ГРАНИЦА ГРАНИЦЫ РАВНА НУЛЮ»

Вывод сохранения полного момента поворота:

Момент поворота дает определение автоматически сохраняющейся величины. Другими словами, значение момента поворота для элементарного 3-объема $\Delta x\Delta y\Delta z$ по истечении промежутка времени Δt равно значению момента поворота для того же 3-объема в начале этого промежутка времени, исправленному на момент поворота, втекший туда через шесть граней 3-объема за прошедший промежуток времени (величина, пропорциональная $\Delta y\Delta z\Delta t$, и т. д.). Убедимся теперь в справедливости сохранения момента поворота на языке «границы границы». Будем действовать по схеме уравнения (15.8), переводя слова шаг за шагом на язык формул. Найдем количество момента поворота, рождаемого в элементарном 4-кубе Ω:

1) на $\partial\partial = 0$

$$\text{«рождение»} \underset{\text{определение}}{\equiv} \int_\Omega \begin{pmatrix}\text{«рождение момента поворота»}\\ \text{в элементарном 4-кубе}\\ \text{пространства-времени } \Omega\end{pmatrix} \underset{\text{определение}}{=} \int_\Omega \mathbf{d}^*\mathbf{G};$$

$$\int_\Omega \mathbf{d}^*\mathbf{G} \underset{\text{шаг 1}}{=} \int_{\partial\Omega} {}^*\mathbf{G} \underset{\text{шаг 2}}{=} \int_{\partial\Omega} {}^*(\mathbf{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) \underset{\text{шаг 3}}{=}$$

$$= \sum_{\substack{\text{восемь}\\ \text{3-кубов,}\\ \text{ограничи-}\\ \text{вающих } \Omega}} {}^*\left(\begin{matrix}\text{момент поворота}\\ \int_{\substack{\text{3-куб}\\ \text{соответствующий}\\ \text{данному 3-кубу}}} (\mathbf{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}),\end{matrix}\right) = \underset{\text{шаг 4}}{}$$

$$= \sum_{\substack{\text{восемь}\\ \text{граничных}\\ \text{3-кубов}}} \sum_{\substack{\text{шесть граней,}\\ \text{ограничивающих}\\ \text{данный 3-куб}}} \star \left(\begin{array}{c} \text{момент поворота} \\ \int\limits_{\substack{\text{грань}\\ \text{соответствующий}\\ \text{данной грани}\\ \text{данного куба}}} (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}), \end{array} \right) \equiv 0. \quad (15.20)$$

шаг 5

Здесь первый шаг представляет собой теорему Стокса. Второй шаг сводится к соотношению (15.19) между тензором Эйнштейна и моментом поворота. На третьем шаге интеграл по всей границе $\partial\Omega$ разбивается на интегралы по отдельным 3-кубам, из которых состоит эта граница. Во всех этих интегралах, к тому же, звездочка $\star$ трактуется как постоянная и выносится из-под знака интеграла. Причина этого достаточно проста: операция дуальности $\star$ затрагивает только метрику, а метрика локально постоянна по всему бесконечно малому 4-кубу, по границе которого берется интеграл. На шаге 4 использована формула

$$\mathbf{d}(\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) = \mathbf{d}\mathcal{P} \wedge \mathcal{R} + \mathcal{P} \wedge \mathbf{d}\mathcal{R} = \mathbf{d}\mathcal{P} \wedge \mathcal{R} \quad (15.21)$$

и теорема Стокса, позволяющая выразить каждый интеграл по 3-кубу в виде интеграла от $\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}$ по двумерной границе этого куба. Пятый шаг является заключительным. Он никак не связан с подынтегральной функцией. Он основан лишь на принципе $\partial\partial \equiv 0$.

Выражаясь кратко, сохранение момента поворота есть следствие двух обстоятельств. 1. Момент поворота, присущий произвольному элементарному 3-кубу, по определению представляет собой суммарное значение, полученное сложением шести моментов поворота, соответствующих шести граням этого куба. 2. Складывая в (15.20) эти суммарные значения для всех восьми 3-кубов, из которых состоит граница элементарного 4-куба Ω, мы учитываем вклад каждой данной 2-грани дважды: один раз — с одним знаком, а другой раз — с противоположным знаком. Таким образом, в силу принципа «граница границы равна нулю» сохранение момента поворота представляет собой тождество.

§ 15.6. СОХРАНЕНИЕ МОМЕНТА ПОВОРОТА, ВЫРАЖЕННОЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Каждый закон сохранения, сформулированный в интегральном виде, может быть переформулирован в дифференциальном виде, и сохранение момента поворота не является исключением. В этом случае выкладки не занимают много места. Найдем обобщенную

2) $\mathbf{d}\mathbf{d} = 0$

внешнюю производную от момента поворота в три этапа и покажем, что она обращается в нуль:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{d}^*\mathbf{G} &= \mathbf{d}\,[{}^*(\mathbf{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})] = \\ &= {}^*[\mathbf{d}(\mathbf{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})] = \\ &= {}^*[\mathbf{d}^2\mathcal{P}\wedge\mathcal{R} - \mathbf{d}\mathcal{P}\wedge\mathbf{d}\mathcal{R}] = \\ &= 0.\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{этап 1}\\&\text{этап 2}\\&\text{этап 3}\end{aligned}$$

На первом этапе использовано соотношение $\mathbf{d}^* = {}^*\mathbf{d}$. Звездочка оператора дуальности и обобщенная внешняя производная коммутируют, поскольку $\mathbf{d}$, примененный к контравариантному вектору, действует как ковариантная производная, а * не оказывает никакого действия на ковариантные векторы, т. е. 1-формы. Второй этап сводится к применению стандартного правила для действия на произведение тензорнозначных форм [см. соотношение (14.136)]. На третьем этапе речь идет о двух слагаемых. Первое слагаемое обращается в нуль, так как в нем равен нулю первый сомножитель, т. е. $\mathbf{d}^2\mathcal{P} = 0$ [структурное уравнение Картана; выражает «отсутствие кручения» у ковариантной производной; см. соотношение (14.26)]. Второе слагаемое тоже равно нулю в нашем случае, поскольку в нем равен нулю второй сомножитель, т. е. $\mathbf{d}\mathcal{R} = 0$ (полное тождество Бианки). В этом и состоит доказательство сохранения момента поворота, оказавшееся столь коротким.

Дополнение 15.2. ИСТОЧНИК ГРАВИТАЦИИ И МОМЕНТ ПОВОРОТА — ДВЕ ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ; ИХ НАИБОЛЕЕ УДОБНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

	Энергия-импульс как источник гравитации (кривизны пространства-времени)	Момент поворота как автоматически сохраняющаяся характеристика геометрии
Представление в виде векторнозначной 3-формы — независящего от координат геометрического объекта	Машина, позволяющая сказать, сколько энергии-импульса содержится в элементарном 3-объеме: $${}^*\mathbf{T} = \mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau$$ («дуальный тензор энергии-импульса»)	Машина, позволяющая сказать, какое количество полного момента поворота (выраженного в виде вектора) получается при сложении шести моментов поворота, соответствующих шести граням элементарного 3-куба: $${}^*(\mathbf{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) = {}^*\mathbf{G} = \mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau$$ («дуальный тензор Эйнштейна»)
Представление в виде тензора $\binom{2}{0}$ **(тоже независящий от координат геометрический объект)**	Сам тензор энергии-импульса $$\mathbf{T} = \mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}\mathbf{e}_\tau$$	Сам тензор Эйнштейна $$\mathbf{G} = \mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau}\mathbf{e}_\tau$$

	Энергия-импульс как источник гравитации (кривизны пространства-времени)	Момент поворота как автоматически сохраняющаяся характеристика геометрии
Представление на языке компонент (величины, зависящие от системы координат)	$T^{\sigma\tau}$	$G^{\sigma\tau}$
Закон сохранения на языке компонент	$T^{\sigma\tau}{}_{;\tau}=0$	$G^{\sigma\tau}{}_{;\tau}\equiv 0$
Закон сохранения на абстрактном языке для тензора $\binom{2}{0}$	$\nabla\cdot\mathbf{T}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{G}\equiv 0$
Закон сохранения на абстрактном языке, выраженный через внешнюю производную от дуального тензора (векторнозначной 3-формы)	$\mathbf{d}^*\mathbf{T}=0$	$\mathbf{d}^*\mathbf{G}\equiv 0$, или $\mathbf{d}^*(\mathbf{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})\equiv 0$
Тот же закон сохранения, выраженный в интегральной форме для элемента 4-объема	$\int\limits_{\partial\Omega}{}^*\mathbf{T}=0$	$\int\limits_{\partial\Omega}{}^*\mathbf{G}\equiv 0$, или $^*\int\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{H})\equiv 0$, или $^*\int\limits_{\partial\partial\Omega}(\mathscr{P}\wedge\mathscr{H})\equiv 0$

§ 15.7. ОТ СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ПОВОРОТА К ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ЭКСКУРС

«Вывод» уравнения поля Эйнштейна из требования: (сохранение суммарного момента поворота) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ (сохранение источника)

Источником тяготения является масса, или масса-энергия. Масса-энергия представляет собой одну компоненту 4-вектора энергии-импульса. Энергия и импульс — сохраняющиеся величины. Количество энергии-импульса в элементе 3-объема $d^3\Sigma$ равно

$$^*\mathbf{T}=\mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau \tag{15.22}$$

(см. дополнение 15.2). Сохранение энергии-импульса в элементарном 4-кубе Ω выражается в виде

$$\int\limits_{\partial\Omega}{}^*\mathbf{T}=0. \tag{15.23}$$

Этот закон сохранения не случаен. Согласно Эйнштейну и Картану, он выполняется «автоматически»; более того, его автоматическое выполнение есть следствие точного равенства между энергией-импульсом и автоматически сохраняющейся характеристикой кривизны. Что это за характеристика? Это момент поворота, удовлетворяющий закону автоматического сохранения:

$$\int_{\partial\Omega} {}^*\mathbf{G} = 0. \tag{15.24}$$

Другими словами, сохранение энергии-импульса можно сделать геометрическим по характеру и автоматическим по выполнению, воспользовавшись следующим рецептом: *отождествим тензор энергии-импульса* (с точностью до множителя 8π, или $8\pi G/c^4$, или другого множителя, который зависит от выбора единиц измерения) *с моментом поворота*; таким образом,

$$^*(\mathbf{d}\mathscr{P} \wedge \mathscr{R}) = {}^*\mathbf{G} = 8\pi {}^*\mathbf{T}, \tag{15.25}$$

или, эквивалентным образом (также на языке векторнозначных 3-форм),

$$\begin{pmatrix}\text{момент}\\ \text{поворота}\end{pmatrix} = {}^*(\mathbf{d}\mathscr{P} \wedge \mathscr{R}) = \mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau}\, d^3\Sigma_\tau =$$

$$= 8\pi \mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}\, d^3\Sigma_\tau, \tag{15.26}$$

или на языке тензоров

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau} \mathbf{e}_\tau = 8\pi \mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau} \mathbf{e}_\tau = 8\pi \mathbf{T}, \tag{15.27}$$

или на языке компонент

$$G^{\sigma\tau} = 8\pi T^{\sigma\tau} \tag{15.28}$$

(уравнение поля Эйнштейна; в гл. 17 оно рассмотрено более подробно и больше внимания уделено вопросу о его единственности; см. также дополнение 15.3). Такой простой оказывается связь между всей общей теорией относительности и принципом, утверждающим, что граница границы равна нулю. Никому еще не удавалось найти более убедительной основы для принципа сохранения импульса и энергии. Никому еще не удавалось глубже постигнуть действие материи на пространство и пространства на материю, которое мы называем тяготением.

Резюме: *в теории Эйнштейна сохранение энергии-импульса реализуется как тождество «граница границы равна нулю»*.

УПРАЖНЕНИЯ

15.1. Граница границы 4-симплекса

Исследуя развитие во времени геометрии, не обладающей какой-либо симметрией, когда приходится прибегать к расчетам на вычислительной машине, можно в качестве одного из возможных методов

разбить 4-геометрию на достаточно большое число достаточно малых симплексов [четырехмерный аналог двумерного треугольника и трехмерного тетраэдра; например, в качестве вершин «центрального симплекса» обычно берутся точки $(t, x, y, z) = (0, 1, 1, 1)$, $(0, 1, -1, -1)$, $(0, -1, 1, -1)$, $(0, -1, -1, 1)$, $(5^{1/2}, 0, 0, 0)$], в пределах каждого из которых геометрию можно считать плоской (лоренцевой), а всю кривизну — сосредоточенной в местах соединений этих симплексов (см. анализ динамики геометрии с помощью исчисления Редже в гл. 42). Определите («опишите математически») границу (трехмерную) такого симплекса. Возьмите один участок этой границы и определите его границу (двумерную). Взяв один участок этой двумерной границы, удостоверьтесь, что существует одно и только одно место в этом разложении границы границы, где данный участок взаимно уничтожается с другим двумерным участком («отсутствие граней» у 3-границы симплекса).

15.2. Тензор Бела — Робинсона [180—185] [1]

Определим тензор Бела — Робинсона посредством соотношения

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\rho\gamma\sigma} R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma} + {}^{*}R_{\alpha\rho\gamma\sigma}{}^{*}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma}. \tag{15.29}$$

Покажите, что в пустом пространстве-времени этот тензор можно переписать в виде

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\rho\gamma\sigma} R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma} + R_{\alpha\rho\delta\sigma} R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\gamma}{}^{\sigma} - \frac{1}{8} g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} R_{\rho\sigma\lambda\mu} R^{\rho\sigma\lambda\mu}. \tag{15.30а}$$

Покажите также, что в пустом пространстве-времени

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\,\alpha} = 0, \tag{15.30б}$$

$T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен, и его след равен нулю по всем парам индексов. (15.30в)

Обсуждение. Оказывается, что «канонический псевдотензор энергии-импульса» Эйнштейна (§ 20.3) для гравитационного поля в пустом пространстве-времени обладает второй производной, которая в нормальных римановых координатах имеет вид

$$t_{E\alpha\beta,\,\gamma\delta} = -\frac{4}{9}\left(T_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{4} S_{\alpha\beta\gamma\delta}\right). \tag{15.31а}$$

Здесь $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — совершенно симметричный тензор Бела — Робинсона, а $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяется соотношением

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\delta\rho\sigma} R_{\beta\gamma}{}^{\rho\sigma} + R_{\alpha\gamma\rho\sigma} R_{\beta\delta}{}^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{15.31б}$$

[1] *Sejnowski T. J.*, частное сообщение, 1973 г.

2 УПРАЖНЕНИЯ

$S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ появляется в ковариантном волновом уравнении для пустого пространства

$$\Delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv -R_{\alpha\beta\gamma\delta;\,\mu}{}^{;\,\mu} + R_{\alpha\beta\rho\sigma}R_{\gamma\delta}{}^{\rho\sigma} + 2\left(R_{\alpha\rho\gamma\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma} - R_{\alpha\rho\delta\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\gamma}{}^{\sigma}\right) = 0 \qquad (15.31в)$$

(Δ — разновидность волнового оператора Лихнеровича—Дерама [186]), когда мы записываем это уравнение в виде

$$\Box R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}{}_{;\,\mu}{}^{;\,\mu} = 2S_{[\alpha}{}^{[\gamma}{}_{\beta]}{}^{\delta]}. \qquad (15.31г)$$

Дополнение 15.3. ДРУГИЕ ТОЖДЕСТВА, КОТОРЫМ УДОВЛЕТВОРЯЕТ КРИВИЗНА

1. Источником гравитации является энергия-импульс.
2. Энергия-импульс находит свое выражение в тензоре энергии-импульса (или в дуальном тензоре) в виде векторнозначной 3-формы («энергия-импульс единицы 3-объема»).
3. Этот источник сохраняется (не рождается в элементарном 4-кубе пространства-времени).

Эти принципы лежат в основе того, что именно тождества Бианки исследуются в данной главе, тогда как двум другим, во всех остальных отношениях чрезвычайно интересным тождествам [176—178] не уделено никакого внимания. Одно из них связано с 4-формой

$$\Pi = \frac{1}{24\pi^2}\, g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\mathcal{R}_{\alpha\beta}\wedge\mathcal{R}_{\gamma\delta}, \qquad (1)$$

а другое — с 4-формой

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi^2\,|\det g_{\mu\nu}|^{1/2}}\left(\mathcal{R}_{12}\wedge\mathcal{R}_{30} + \mathcal{R}_{13}\wedge\mathcal{R}_{02} + \mathcal{R}_{10}\wedge\mathcal{R}_{23}\right). \qquad (2)$$

Обе эти величины построены из тензорных «2-форм кривизны»

$$\mathcal{R}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\, R_{\alpha\gamma\beta\delta}\, \mathbf{d}x^{\beta}\wedge\mathbf{d}x^{\delta}. \qquad (3)$$

Четырехмерный интеграл от каждой из этих величин по четырехмерной области Ω имеет значение, которое 1) является скаляром, 2) не равно тождественно нулю, 3) зависит от границы пространственно-временной области, по которой берется интеграл, но 4) не зависит ни от каких вариаций геометрии пространства-времени внутри этой поверхности (при условии, что эти вариации непрерывны и не меняют связность 4-геометрии в этой области). Свойство «1» лишает всякой возможности отождествить такой интеграл (скаляр) с энергией-импульсом (4-вектором). Свойство «2» не позволяет установить закон сохранения, поскольку из него следует отличное от нуля рождение в Ω.

Мы здесь не включили в рассмотрение также тензор Бела—Робинсона (см. упражнение 15.2), построенный билинейным образом из тензора кривизны, и целый ряд других тензоров, о которых см., например, в работе [179].

Возможно, когда-нибудь окажется, что один из этих тензоров, а может быть и все они имеют важный физический смысл.

Интеграл от 4-формы Γ из (2) по всему многообразию дает число, причем целое число (конечно, если этот интеграл и целое число имеют смысл),— так называемую характеристику многообразия Эйлера — Пуанкаре. Этот результат представляет собой обобщение на случай четырех измерений интеграла Гаусса — Бонне, хорошо известного в двумерной геометрии:

$$\int \left(\begin{matrix} \text{риманов инвариант скалярной кривизны} \\ \text{(равный } 2/a^2 \text{ для сферы радиуса } a) \end{matrix} \right) g^{1/2} d^2x.$$

Этот интеграл равен 8π для любого замкнутого ориентированного двумерного многообразия с топологией 2-сферы, причем его форма может иметь какой угодно причудливый вид; в случае 2-тора, деформированного каким угодно образом, он равен нулю; в случае других топологий он имеет для каждой из них вполне определенное значение.

ЛИТЕРАТУРА

Приведенный ниже список, подобно библиографии в работе [29], может служить лишь отправной точкой при ознакомлении с литературой, которая слишком обширна, чтобы можно было составить всеобъемлющий перечень. Более подробную библиографию по некоторым разделам можно найти, например, в работах [187—191] [1]). Иногда приводится не самое первое издание, а более позднее и более доступное. Почти все докторские диссертации в США можно получить в виде микрофильмов [2]). Мы хотим выразить свою благодарность Грегори Черлину, подготовившему первый вариант списка литературы, Нигелю Куту, внесшему многочисленные исправления, а также всем коллегам, без помощи которых многие из наиболее важных и трудноступных работ так и не попали бы в данный список.

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Теория поля, изд. 4, Физматгиз, М., 1962. [Форзац.]
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Теория поля, изд. 5, изд-во «Наука», М., 1967 [Форзац.]
3. *Adler R., Bazin M., Schiffer M.*, Introduction to General Relativity, McGraw-Hill, New York, 1965. [Форзац.]
4. *Anderson J. L.*, Principles of Relativity Physics, Academic Press, New York, 1967. [Форзац.]
5. *Bergmann P. G.*, Introduction to the Theory of Relativity, Prentice-Hall, New York, 1942. (Имеется перевод: Бергман П., Введение в теорию относительности, ИЛ, М., 1947.) [Форзац.]
6. *Cartan E.*, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1928 and 1946. (Имеется перевод: *Картан Э.*, Риманова геометрия в ортогональном репере, Изд-во МГУ; М., 1960.) [Форзац, § 14.5, 15.3, доп. 8.2.]
7. *Davies W. R.*, Classical Theory of Particles and Fields and the Theory of Relativity, Gordon and Breach, New York, 1970. [Форзац.]
8. *Eddington A. S.*, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1922. [Форзац.]

---

[1]) Список литературы [188] составлен на основе библиографии в книге [77].

[2]) University Microfilms, Inc., Ann. Arbor, Mich., 48106.

9. *Ehlers J.*, General Relativity and Kinetic Theory, в книге General Relativity and Cosmology, ed. Sachs R. K., Academic Press, New York, 1971. [Форзац.]
10. *Einstein A.*, The Meaning of Relativity, 3d ed., Princeton Univ. Press, Princeton, N.Y., 1950. (Имеется перевод: *Эйнштейн А.*, Сущность теории относительности, ИЛ, М., 1955.) [Форзац.]
11. *Eisenhart L. P.*, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, Princeton, N.Y., 1926. (Имеется перевод: *Эйзенхарт Л.*, Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.) [Форзац.]
12. *Фок В. А.*, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1959. [Форзац.]
13. *Fokker A. D.*, Time and Space, Weight and Inertia, Pergamon Press, London, 1965. [Форзац.]
14. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.*, The Large Scale Structure of Spacetime, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1973. [Форзац.]
15. *Hicks N. J.*, Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965. [Форзац, доп. 8.1.]
16. *Infeld L., Plebanski J.*, Motion and Relativity, Pergamon Press, New York, 1960. (Имеется перевод: *Л. Инфельд, Е. Плебанский*, Движение и релятивизм, ИЛ, М., 1962.) [Форзац.]
17. *Lichnerowicz A.*, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, Paris, 1955. [Форзац].
18. *McVittie G. C.*, General Relativity and Cosmology, Chapman and Hall, London, 1956. [Форзац.]
19. *Misner C. W.*, Gravitational Collapse в книге Brandeis Summer Institute 1968, Astrophysics and General Relativity, Gordon and Breach, New York, 1969, vol. I. [Форзац, § 12.1, доп. 8.1.]
20. *Moller C.*, The Theory of Relativity, Oxford Univ. Press, London, 1952; 2nd.ed., 1972. [Форзац.]
21. *Pauli W.*, Theory of Relativity, Pergamon Press, London, 1958. [Форзац.]
22. *Penrose R.*, Structure of Spacetime в книге Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics, Benjamin, New York, 1968. [Форзац.]
23. *Pirani F. A. E.*, Introduction to Gravitational Radiation Theory в книге *A. Trautman, F. A. E. Pirani, H. Bondi*, Lectures on General Relativity, vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965. [Форзац.]
24. *Roberison H. P., Noonan T. W.*, Relativity and Cosmology, Saunders, Philadelphia, 1968. [Форзац].
25. *Sachs R. K.*, Gravitational Radiation в книге Relativity, Groups and Topology, eds. DeWitt C., DeWitt B. S., Gordon and Breach, New York, 1964. [Форзац.]
26. *Schild A.*, Lectures on General Relativity Theory, в книге Relativity, Theory and Astrophysics, ed. Ehlers J., Providence, R.I., 1967. [Форзац, § 7.3.]
27. *Schouten J. A.*, Ricci-calculus, Springer, Berlin, 1954. [Форзац.]
28. *Schrödinger E.*, Space-Time Structure, Cambridge Univ. Press, England, 1950. [Форзац.]
29. *Synge J. L.*, Relativity: The General Theory, North-Holland, Amsterdam, 1960. (Имеется перевод: Синг Дж., Общая теория относительности, ИЛ, М., 1963.) [Форзац.]
30. *Thorne K. S.*, The General Relativistic Theory of Stellar Structure and Dynamics в книге High Energy Astrophysics, vol. III, eds. *C. DeWitt, E. Schatzman, P. Veron*, Gordon and Breach, New York, 1967. [Форзац.]
31. *Tolman R. C.*, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Clarendon Press, Oxford, 1934. (Имеется перевод: *Р. Толмен*, Относительность, термодинамика и космология, «Наука», М., 1974.) [Форзац.]
32. *Trautman A.*, Foundations and Current Problems of General Relativity Theory в книге *A. Trautman, F. A. E. Pirani, H. Bondi*, Lectures on General Relativity, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965. [Форзац, § 12.1, доп. 8.1, 12.4.]

33. *Weber J.*, General Relativity and Gravitational Waves, Wiley—Interscience, New York, 1961. [Форзац.] (Имеется перевод: Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, М., 1962.)
34. *Weinberg S.*, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 1972. (Имеется перевод: *С. Вайнберг*, Гравитация и космология, «Мир», М., 1975.) [Форзац.]
35. *Weyl H.*, Space-Time-Matter, Methuen, London, 1922. [Форзац.]
36. *Wheeler J. A.*, Geometrodynamics and the Issue of the Final State in Relativity в книге Relativity, Groups and Topology, eds. DeWitt C., DeWitt B. S., Gordon and Breach, New York, 1964. [Форзац.]
37. *Kollros L.* в книге Helle Zeit- Dunkle Zeit — In Memoriam Albert Einstein, ed. Carl Seelig, Europa, Zurich, 1956. [Предисловие.]
38. *Einstein A.*, введение к книге [77], 1949. [Предисловие, § 1.2.]
39. *Thomson W.*, *Lord Kelvin*, Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light, Clay, London, 1904. [Предисловие.]
40. *Pauli W.*, Relativitätstheorie в книге Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II, S. 539, Teubner, Leipzig, Germany, 1921. [Предисловие].
41. *Roll P. G.*, *Krotkov R.*, *Dicke R. H.*, Ann. Phys. (USA), 26, 442 (1964). [§ 1.3, 10.1, фиг. 1.6, доп. 1.2.]
42. *Estermann I.*, *Simpson O. C.*, *Stern O.*, Phys. Rev., 53, 947 (1938). [§ 1.3.]
43. *Dabbs J. W. T.*, *Harvey J. A.*, *Paya D.*, *Horstmann H.*, Phys. Rev., B 139, 756 (1965). [§ 1.3.]
44. *Witteborn F. C.*, *Fairbank W. M.*, Phys. Rev. Lett., 19, 1049 (1967). [§ 1.3.]
45. *Beall E. F.*, Phys. Rev., D1, 961 (1970). [§ 1.3, доп. 1.2.]
46. *Брагинский В. Б.*, *Панов В. И.*, ЖЭТФ, 61, 873 (1971). [Доп. 1.2.]
47. *Eötvos R. V.*, Math. Naturw. Ber. aus Ungarn, 8, 65 (1889). [Доп. 1.2.]
48. *Eötvös R. V.*, *Pekár D.*, *Fekete E.*, Ann. Phys. (Germany), 68, 11 (1922). [§ 10.1, доп. 1.2.]
49. *Einstein A.*, Ann. Phys. (Germany), 35, 898 (1911). [§ 1.3, 7.2, 7.4, 10.1.]
50. *Einstein A.*, предисловие к книге Concepts of Space, ed. Jammer M., Harper, New York, 1954, p. XV. [§ 1.3.]
51. *Robb A. A.*, Geometry of Time and Space, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng., 1936 (пересмотренное издание книги [151]). [Доп. 1.3, 13.1.]
52. *Halley E.*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 19, 913 (1693). [§ 1.5.]
53. *Kant I.*, Wöchentliche Frag- und Anzeigungs- Nachrichten, Kanter, Königsberg, 1754. [§ 1.5.]
54. *Westermann A.*, *Boissonade J. F.*, eds., Marini vita Procli, xxxcii, in Dioginis Laertii de Clarorum Philosophorum, II, Paris, 1878, r. 169. [Фиг. 1.8.]
55. *Neugebauer O.*, Greek Horoscopes, with H. B. van Hösen, American Philosophical Society, Philadelphia, Pa., 1959. [Фиг. 1.8.]
56. *Munk W. H.*, *MacDonald G. J. F.*, The Rotation of the Earth; a Geophysical Discussion, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1960. [Фиг. 1.8.]
57. *Curott D. R.*, Astron. Journ., 71, 264 (1966). [Фиг. 1.8.]
58. *Ginzel F. K.*, Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl., 8511, 663 (1882). [Фиг. 1.8.]
59. *Ginzel F. K.*, Sitzber Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl., 8811, 629 (1883). [Фиг. 1.8.]
60. *Ginzel F. K.*, Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl., 8911, (1884). [Фиг. 1.8.]
61. *Oppolzer Th. V.*, Math.-Naturwiss. Cl. d. Akad. der Wiss. Denkschriften, 52, Wien (1887). [Фиг. 1.8.]
62. *Ginzel F. K.*, Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Landergebiet der Klassischen Altertumwissenschaften und den Zeitraum von 900 vor Chr. bis 600 nach Chr., Mayer, Berlin, 1899. [Фиг. 1.8.]

63. *Neugebauer P. V.*, Astron. Nachr., **230**, 57 (1927). [Фиг. 1.8.]
64. *Neugebauer P. V.*, Astronomische Chronologie, De Gruyter, Berlin, 1929. [Фиг. 1.8.]
65. *Neugebauer P. V.*, Astron. Nachr., **237**, 221 (1930). [Фиг. 1.8.]
66. *Evenson K. M.*, *Wells J. S.*, *Petersen F. R.*, *Danielson B. L.*, *Day G. W.*, *Barger R. L.*, *Hall J. L.*, Phys. Rev. Lett., **29**, 1346 (1972). [§ 1.5.]
67. *Barnes J. A.*, A Non-mathematical Discussion of Some Basic Concepts of Precise Time Measurement, Tracor on Frequency, **2**, № 2 (Tracor Industrial Instruments, Austin, Texas), 1971. [Доп. 1.4.]
68. *Galilei G.*, Dialogo dei due massimi sistemi del mundo, Landini, Florence, 1632. (Имеется перевод: *Галилео Галилей*, Избранные труды в двух томах, изд-во «Наука», М., 1964; т. I. стр. 97.)
69. *Galilei G.*, Discorsi e dimostriazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Flzevir, Leiden, 1638. (Имеется перевод: *Галилео Галилей*, Избранные труды в двух томах, изд-во «Наука», М., 1964; т. II, стр. 109.) [Доп. 1.2, 1.9.]
70. *Galilei G.*, Siderous Nuncius, 1610. (Имеется перевод: *Галилео Галилей*, Избранные труды в двух томах, изд-во «Наука», М., 1964; т. I, стр. 11.) [Доп. 1.9.]
71. *Newton I.*, Philosophiae naturalis principia mathematica, 1st ed., Streater, London, 1687. (Имеется перевод: Собрание трудов академика А. Н. Крылова, изд-во АН СССР, М.— Л., 1936, т. 7.) [Доп. 1.10.]
72. *Newton I.*, Opticks, or a Treatise of the Reflection, Refraction, Inflection, and Colours of Light, 4th ed., 1730. (Имеется перевод: *И. Ньютон*, Оптика, или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света, Гостехиздат, М., 1954.) [Доп. 1.10.]
73. *Holton G.*, Einstein: The Life and Times, by Clark R. W., book review, New York Times Book Review, September 5, 1 (1971). [Доп. 1.11.]
74. *Klein M. J.*, Einstein: The Life and Times, by Clark R. W., book review, Science, **174**, 1315 (1971). [Доп. 1.11.]
75. *Born M.*, The Born—Einstein letters: Correspondence Between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955 with Commentaries by Max Born, translated by Irene Born, Walker, New York, 1971. [Доп. 1.11.]
76. *Einstein A.*, Geometry and Experience, address to Prussian Academy of Sciences, Berlin, Jan. 27, 1921, Sidelights on Relativity, Mathuen, London, 1922. [Доп. 1.11.]
77. *Schilpp P. A.*, ed., Albert Einstein: Philosopher — Scientist, Library of Living Philosophers, Evanston, Ill, 1949 (источник цитат *А. Эйнштейна*, *К. Менгера и М. фон Лауэ*). [Доп. 1.11, эпиграфы к § 1.2, к гл. 2 и 9.]
78. *Goldstein H.*, Classical Mechanics, Addision-Wesley, Reading, Mass., 1959. (Имеется перевод: *Г. Голдстейн*. Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.) [§ 2.1, 9.7, 33.5, упр. 33.7.]
79. *Leighton R. B.*, Principles of Modern Physics. McGraw-Hill, New York, 1959. [§ 2.1.]
80. *Jackson J. D.*, Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962. (Имеется перевод: *Дж. Джексон*, Классическая электродинамика, изд-во «Мир», М., 1965.) [§ 2.1.]
81. *Taylor E. F.*, *Wheeler J. A.*, Spacetime Physics, Freeman W. H., San Francisco, Calif., 1966. (Имеется перевод: *Э. Ф. Тейлор*, *Дж. А. Уилер*, Физика пространства-времени, изд-во «Мир», М., 1971.) [§ 2.1, фиг. 2.7, упр. 6.9.]
82. *Klein F.*, Erlangerprogram: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrischen Forschungen, 1872. (Имеется перевод: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей, под ред. А. П. Нордена, Гостехиздат, М., 1956, стр. 399.) [§ 2.2.]
83. *Weyl H.*, Math. Zs., 23, 271 (1925). [§ 2.2, эпиграф к гл. 2.]
84. *Veblen O.*, *Whitehead J. H. C.*, The Foundations of Differential Geometry,

Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1932; Reprinted 1953. [§ 2.2.]
85. *Nijenhuis A.*, Theory of the Geometric Object, dissertation, Amsterdam, 1952. [§ 2.2.]
86. *Chern S.-S.*, Geometric Structures on Manifolds, colloquium lectures, Amer. Math. Soc., Providence, 1960. [§ 2.2.]
87. *Chern S.-S.*, Bull. Am. Math. Soc., 72, 167 (1966). [§ 2.2.]
88. *Chern S.-S.*, Differential geometry: its past and its future в книге Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice, September 1970; Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 41. [§ 2.2.]
89. *Wheeler J. A.*, *Feynman R. P.*, Rev. Mod. Phys., 17, 157 (1945). [§ 4.7, доп. 2.1.]
90. *Wheeler J. A.*, *Feynman R. P.*, Rev. Mod. Phys., 21, 425 (1949). [§ 4.7, доп. 2.1.]
91. *Zeeman E. C.*, Journ. Math. Phys., 5, 190 (1964). [Доп. 2.1.]
92. *Dieudonné J.*, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960. (Имеется перевод: *Ж. Дьедонне*, Основы современного анализа, изд-во «Мир», М., 1964.) [§ 2.6.]
93. *Blaton J.*, Kgl. Danske Videnskab. Sels., Mat.-fys. Medd., 24, № 20 (1950). [§ 2.10.]
94. *Hagedorn R.*, Relativistic Kinematics, Benjamin, New York, 1964. [§ 2.10.]
95. *Sard R. D.*, Relativistic Mechanics, Benjamin, New York, 1970. [§ 2.10.]
96. *Messiah A.*, Quantum Mechanics, перевод с французского G. M. Temmer, North-Holland, Amsterdam, Holland, 1961. [Упр. 3.12.]
97. *Cartan É.*, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Exposés de Géométrie, 14, Hermann, Paris, 1945. (Имеется перевод: *Э. Картан*. Внешние дифференциальные системы отсчета и их геометрические приложения, изд-во МГУ, М., 1962.) [§ 4.1.]
98. *De Rham G.*, Variétés Différentiables, Hermann, Paris, 1955. (Имеется перевод: *Ж. де Рам*, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.) [§ 4.1.]
99. *Nickerson H. K.*, *Spencer D. C.*, *Steenrod N. E.*, Advanced Calculus, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1959. [§ 4.1.]
100. *Hauser W.*, Am. Journ. Phys., 38, 80 (1970). [§ 4.1.]
101. *Israel W.*, Differential Forms in General Relativity, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, series A, № 19, 1970. [§ 4.1.]
102. *Flanders H.*, Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Academic Press, New York, 1963. [§ 4.1, доп. 4.4, 8.1.]
103. *Spivak M.*, Calculus on Manifolds, Benjamin, New York, 1965. (Имеется перевод: *М. Спивак*, Математический анализ на многообразиях, изд-во «Мир», М., 1968.) [§ 4.1, доп. 4.1.]
104. *Cartan H.*, Formes Différentiels, Hermann, Paris, 1970. (Имеется перевод: *А. Картан*, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, изд-во «Мир», М., 1971.) [§ 4.1.]
105. *Choquet-Bruhat Y.*, Géométrie différentielle et systémes extérieurs, Monographies Universitaires de Mathématiques № 28, Dunod, Paris, 1968. [§ 4.1.]
106. *Misner C. W.*, *Wheeler J. A.*, Ann. Phys. (USA), 2, 525 (1957). [Доп. 4.1, 4.4, 15.1.]
107. *Schwartz L.*, Théorie des distributions, vols. 1 and 2, Hermann, Paris, 1950—1951. [§ 4.7.]
108. *Lighthill M. J.*, Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1958. [§ 4.7.]
109. *Rohrlich F.*, Classical Charged Particles; Foundations of Their Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965. [§ 4.7.]
110. *Lascoux J.*, Perturbation theory in quantum field theory and homology, в книге *De Witt C.*, *Wheeler J. A.* eds., Battelle Rencontres, Benjamin, New York, 1968, p. 354. [Упр. 4.5.]
111. *Whittaker E. R.*, Proc. R. Soc. London, 1, 367 (1904). [Упр. 4.10.]

112. *Everitt C. W. F.*, Maxwell as a student, preprint, Stanford University Stanford, Calif., 1970. [Доп. 4.6.]
113. *Campbell L., Garnett W.*, Life of James Clerk Maxwell, Macmillan, London, 1882. [Доп. 4.6.]
114. *Gupta S. N.*, Phys. Rev., 96, 1683 (1954). [§ 7.1.]
115. *Gupta S. N.*, Rev. Mod. Phys., 29, 337 (1957). [§ 7.1.]
116. *Gupta S. N.*, Quantum Theory of Gravitation, в книге Recent Developments in General Relativity, Pergamon, New York, 1962, p. 251. [§ 7.1.]
117. *Kraichnan R. H.*, Phys. Rev., 55, 1118 (1955). [§ 7.1.]
118. *Thirring W. E.*, Ann. Phys. (USA), 16, 96 (1961). [§ 7.1.]
119. *Feynman R. P.*, Lectures on Gravitation (неопубликованные заметки к лекциям, подготовили F. B. Morinigo, W. G. Wagner, Calif. Institute of Technology, 1963. [§ 7.1, доп. 7.1.]
120. *Weinberg S.*, Phys. Rev., B138, 988 (1965). [§ 7.1.]
121. *Deser S.*, Gen. Rel. and Grav., 1, 9 (1970). [§ 7.1.]
122. *Wentzel G.*, Quantum Theory of Fields, Interscience, New York, 1949. (Имеется перевод: *Г. Вентцель*, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, М., 1947.) [Доп. 7.1.]
123. *Gasiorowicz S.*, Elementary Particle Physics, Wiley, New York, 1966. (Имеется перевод: *С. Газиоровиц*, Физика элементарных частиц, изд-во «Наука», М., 1969.) [Доп. 7.1.]
124. *Fierz M., Pauli W.*, Proc. Roy. Soc., London, A173, 211 (1939). [Доп. 7.1.]
125. *Pound R. V., Snider J. L.*, Phys. Rev. Lett., 13, 539 (1964). [§ 7.2, 7.4.]
126. *Pound R. V., Snider J. L.*, Phys. Rev., B140, 788 (1965). [§ 7.2.]
127. *Pound R. V., Rebka G. A.*, Phys. Rev. Lett., 4, 337 (1960). [§ 7.2, 7.4.]
128. *Schild A.*, Texas Quarterly, 3, № 3, 42 (1960). [§ 7.3.]
129. *Schild A.*, Gravitational Theories of the Whitehead Type and the Principle of Equivalence, 1962, в книге Evidence for Gravitational Theories, ed. Moller C., Academic Press, New Work, 1962. [§ 7.3.]
130. *Einstein A.*, Jarb. Radioakt., 4, 411 (1908). [§ 7.4.]
131. *Bishop R. L., Goldberg S. I.*, Tensor Analysis on Manifolds, Macmillan, New York, 1968. [Доп. 8.1.]
132. *O'Neill B.*, Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966. [Доп. 8.1.]
133. *Auslander L., MacKenzie R. E.*, Introduction to Differentiable Manifolds, McGraw-Hill, New York, 1963. [Доп. 8.1.]
134. *Willmore T. J.*, An Introduction to Differential Geometry, Clarendon Press, Oxford, 1959. [Доп. 8.1.]
135. *Misner C. W.*, Differential Geometry and Differential Topology, в книге Relativity, Groups and Topology, eds. DeWitt C., DeWitt B. S., Gordon and Breach, New York, 1964, p. 881. [Доп. 8.1.]
136. *Cartan É.*, Ann. École Norm. Sup., 40, 325 (1923). [§ 8.2, 12.1, 12.2.]
137. *Cartan É.*, Ann. École Norm. Sup., 41, 1 (1924). [§ 8.2, 8.3, 12.1.]
138. *Arnold V. I., Avez A.*, Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, New York, 1968. [§ 8.2.]
139. *Hermann R.*, Lie Groups for Physicists, Benjamin, New York, 1966. [§ 8.2.]
140. *Sternberg S.*, Celestial Mechanics, Benjamin, New York, 1969. [§ 8.2.]
141. *Chern S.-S., Chevalley C.*, Bull. Am. Math. Soc., 58, 217 (1952). [Доп. 8.2.]
142. *Cartan E.*, Bull. Soc. Math. France, 29, 118 (1901). [Доп. 8.2.]
143. *Weber H.*, ed., B. Riemann: Gesammelte Mathematische Werke, 2nd ed., Dover, New York, 1953; (Перевод Habilitationsvorlesung имеется в книге: *Риман Б.*, Сочинения, ОГИЗ Гостехиздат, М.— Л., 1948, стр. 279.) [Доп. 8.5.]
144. *Weyl H.*, Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1949, p. 116. [Эпиграф к гл. 6, доп. 8.5.]
145. *Einstein A.*, Essays in Science, Philosophical Library, New York, 1934. Translated from Mein Weltbilde, Querdio Yerlag, Amsterdam, 1933. [Доп. 8.5.]

146. *Gilbert R. P.*, *Newton R.*, Analytic Methods in Mathematical Physics, Gordon and Breach, New York, 1970. [Доп. 8.5.]
147. *Schild A.*, Tearing Geometry to Pieces: More on Conformal Geometry, неопубликованная лекция, прочитанная 19 января 1970 г. на семинаре по теории относительности в Принстонском университете. [Доп. 10.2.]
148. *Ehlers J.*, *Pirani F. A. E.*, *Schild A.*, The Geometry of Free-fall and Light Propagation в книге General Relativity, Papers in Honor of J. L. Synge, Oxford Univ. Press, London, 1972, p. 63. [Доп. 10.2.]
149. *Kretschmann E.*, Ann. Phys. (Germany), 53, 575 (1917). [§ 12.5.]
150. *Blumenthal L. M.*, Theory and Applications of Distance Geometry, Clarendon Press, Oxford, England, 1953. [Доп. 13.1.]
151. *Robb A. A.*, A Theory of Time and Space, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1914. [Доп. 13.1.]
152. *Choquard P.*, Helv. Phys. Acta, 28, 89 (1955). [Фиг. 13.2.]
153. *Morse M.*, The Calculus of Variations in the Large, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1934. [Фиг. 13.2.]
154. *Morse M.*, *Cairns S. S.*, Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology: an Introduction, Academic Press, New York, 1969. [Фиг. 13.2.]
155. *Feynman R. P.*, *Hibbs A. R.*, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York, 1965. (Имеется перевод: *Фейнман Р.*, *Хибс А.*, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд-во «Мир», М., 1968.) [Фиг. 13.3.]
156. *Manasse F. K.*, *Misner C. W.*, Journ. Math. Phys., 4, 735 (1963). [§ 13.6.]
157. *Harrison B. K.*, Phys. Rev., 116, 1285 (1959). [§ 14.1.]
158. *Gauss K. F.*, Disquisitiones generales circa superficies curvas в книге Karl Friedrich Gauss Werke, IV, 1827, p. 217. [§ 5.9, доп. 5.3, 5.4, 14.1.]
159. *Fletcher J. G.*, Commun. Assoc. Comput. Machinery, 9, 552 (1966). [Доп. 14.3.]
160. *Hearn A. C.*, A Program for Symbolic Algebraic Computation, in Proceedings of SHARE XXXIV, 4.470, 1970. [Доп. 14.3.]
161. *d'Inverno R. A.*, Comput. Journ., 12, 124 (1969). [Доп. 14.3.]
162. *Barton D.*, *Bourne S. R.*, *Fitch J. P.*, Comput. Journ., 13, 32 (1970). [Доп. 14.3.]
163. *Tobey R. G.*, et al., PL/1 Formac Interpreter, Users Reference Manuel IBM Controlled Program Library 360D 03.3004, Hawthorne, N. Y., 1967. [Доп. 14.3.]
164. *Barton D.*, *Fitch J. P.*, Comm. Assoc. Comput. Machinery, 14, 542 (1971). [Доп. 14.3.]
165. *Fletcher J. G.*, *Clemens R.*, *Matzner R.*, *Thorne K. S.*, *Zimmerman B. A.*, Astrophys. Journ. Lett., 148, L91 (1967). [Доп. 14.3.]
166. *Ernst F. J.*, 7090 FORMAC subroutines: Exterior calculus, report number PORS IIT-9, Illinois Institute of Technology, 1968. [Доп. 14.3.]
167. *Harrison G. H.*, A Compact Method for Symbolic Computation of the Riemann Tensor, M. S. thesis, Tech. Report, Dept. of Physics and Astronomy, Univ. of Maryland, College Park, 1970. [Доп. 14.3.]
168. *Clemens R.*, *Matzner R.*, Technical Report № 635 of the Univ. of Maryland Department of Physics and Astronomy, 1967. [Доп. 14.3.]
169. *Hartle J. B.*, *Thorne K. S.*, Astrophys. Journ. (1974). [Доп. 14.3.]
170. *Tomonaga S.*, Prog. Theor. Phys., 1, 27 (1946); перепечатано в сборнике Selected Papers on Quantum Electrodynamics, Dover, New York, 1958. [Доп. 15.1.]
171. *Schwinger J.*, Phys. Rev., 74, 1439 (1948). [Доп. 15.1.]
172. *Weyl H.*, Was Ist Materie, Springer, Berlin, 1924. [Доп. 15.1.]
173. *Wheeler J. A.*, Phys. Rev., 97, 511 (1955). [Доп. 15.1.]
174. *Wheeler J. A.*, Gravitation as Geometry, II в книге Gravitation and Relativity, Benjamin, New York, 1964. [§ 15.3.]
175. *Misner C. W.*, *Wheeler J. A.*, Conservation Laws and the Boundary of a Boundary в книге Гравитация: Проблемы и перспективы, ред. Шелест В. П., Наукова Думка, Киев, 1972, стр. 338. [§ 15.3.]

176. *Allendoerfer C., Weil A.*, Trans. Am. Math. Soc., 53, 101 (1943). [Доп. 15.3.]
177. *Chern S.-S.*, Hamburg Abh., 20, 117 (1955). [Доп. 15.3.]
178. *Chern S.-S.*, Journ. Soc. Indust. Appl. Math., 10, 751 (1962). [Доп. 15.3.]
179. *Synge J. L.*, Tensorial Integral Conservation Laws in General Relativity, in CNRS 1962, p. 75, 1962. [Доп. 15.3.]
180. *Bel L.*, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, 247, 1094 (1958). [Упр. 15.2.]
181. *Bel L.*, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, 248, 1297 (1959). [Упр. 15.2.]
182. *Bel L.*, La radiation gravitationelle, in CNRS 1962, p. 119, 1962. [Упр. 15.2.]
183. *Robinson I.* неопубликованный доклад на Colloque Internationale sur les Théories Relativistes de la Gravitation, Abbaye de Royaumont, 1959. [Упр. 15.2.]
184. *Pirani F. A. E.*, Phys. Rev., 105, 1089 (1957). [Упр. 15.2.]
185. *Lichnerowicz A.*, Radiations en relativité générale, особенно Le tenseur de superénergie, in CNRS 1962, p. 93, 1962. [Упр. 15.2.]
186. *Lichnerowicz A.*, Propagateurs, commutateurs, et anticommutateurs en relativité générale в книге Relativity, Groups and Topology, eds. DeWitt C., DeWitt B. S., Gordon and Breach, New York, 1964. [Упр. 15.2.]
187. *Lecat M.*, Bibliographie de la relativite, Lamertine, Bruxelles, 1924.
188. *Bont N., Russ M., Laurence D. H.*, A Bibliographical Check List and Index to the Published Writings of Albert Einstein, Pageant Books, Paterson, N. J., 1960.
189. *Chick H. J.*, Theory of Gravitation 1920 — Present (Bibliography), Report LMS-2328 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1960.
190. *Chick H. J.*, Theory of Gravitation 1959—1963 (Bibliography), Report LMS-3099 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1964.
191. *Combridge J. T.*, Bibliography of Relativity and Gravitation Theory 1921—1937, Kings College, London, 1965.
192. *Södtng P.* и др., Review of Particle Properties, Physics Lett., 39B, 13 (1972). [Форзац.]
193. *Allen C. W.*, Astrophysical Quantities, Univ. of London, Athlone Press, London, 1963. (Имеется перевод 1-го издания: *К. Аллен*, Астрофизические величины, ИЛ, М., 1960.) [Форзац.]

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация света 102
Абсолютное время в теории Ньютона 356
— пространство в теории Ньютона 46, 76, 356
Ампера закон 162
Антисимметризация тензора 122, 125
Аффинная геометрия 242, 301, 303—327
Аффинный параметр геодезических 264, 305

Базисные векторы 87, 253, 287
— 1-формы 98, 132, 257, 289
— 2-формы 139, 196
— 3- и 4-формы 194
Бела — Робинсона тензор 459
Бетти числа 277
Бианки тождества 275, 280, 353, 397
— свернутые тождества 397, 457
Бивектор 123
Буст 101

Вариационный принцип в скалярной, векторной и тензорной теориях тяготения в плоском пространстве-времени 226—232
— — для нахождения геодезических 385—395
Вейля конформный тензор 397—399
Вектор числа-потока 181
Векторы 34—36
— определение в плоском пространстве-времени 85, 86
— — — искривленном пространстве-времени 245, 282—287
Внешнее исчисление 131—138, 423—430
— произведение, см. Косое произведение
Внешняя производная дифференциальной формы 121, 159
— — обобщенная 424, 425
— — p-формы общего вида 134, 154
— — тензора 120
Время, определение и эталоны измерения 54—61
Всемирное время 60

Галилеевы координаты 358—360
Гаусса теорема 136, 170, 191, 193—195
Гаусса — Бонне интеграл 461
— — теорема 375
Геодезические 30—31
— «динамический» вариационный принцип 394—395
— кривые с экстремальной собственной длиной 385—393
— обсуждение в рамках курса 1 245, 264
— — — — — 2 303—306

Геодезические прямые в локально лоренцевой геометрии 381—384
Геометрические единицы 59, 71
— объекты 84
Геометродинамика 30
— аналогия с электродинамикой 441—448
Гидродинамика ньютоновская в плоском пространстве-времени 196—200
Гиперболическое движение 211, 219
Голономный базис 259, 263, 294
Градиент в искривленных многообразиях 260—262, 313, 314, 323
— — плоском пространстве-времени 96, 97, 121
Граница границы 441—461
Грина функция 160, 162
Группа вращений SO (3), геодезические и связность 326, 327
— — — как пример многообразия 301, 302, 326, 327
— — — метрика 405, 406
— — — риманова кривизна 353
— — — структурные константы 302

Давление 177
Де Бройля волна 90—92, 95
Действие на расстоянии 31, 77, 160
Детерминант 202, 203
Дивергенция 122, 267, 276, 323
Дирака дельта-функция 161
Дифференциальная геометрия 245—280
— топология 281—302
Дуальные базисы 98, 160, 257, 289
— тензоры 123, 127, 137, 150, 160
Дуальный поворот 151

Запаздывающий потенциал 162

Идеальная жидкость 177, 183
Идеальный газ 182, 183
Излучение электромагнитных волн 151—153
Инертная масса 201
Инерционная система управления 307
Интегрирование дифференциальных форм 134, 135, 194, 195
— тензоров 191, 192
Интервал 51, 52

Калибровочные преобразования в линеаризованной теории тяготения 229, 231
— — — электромагнетизме 128
Калумоид Уиттекера 166
Каноническая структура 169
Канонические переменные 168
Картана структурные уравнения 432
Касательное пространство 254, 286, 287
Касательный вектор 245, 282—287
Ковариантная производная 261, 310
— — аддитивность 311
— — как машина с входными каналами 316
— — основные соотношения 278—280
— — симметрия 311, 428
— — совместность с метрикой 383, 384, 429, 430
Ковариантности всеобщей принцип 370
Ковариантные компоненты 114
Коммутатор как замыкающий четырехсторонник 297, 298
— касательных векторов 256, 259, 293—296
— ковариантных производных 334, 335
Коммутационные коэффициенты 256, 259, 294, 431
— — группы вращений 302
Компоненты векторов 35, 36, 86—88
— тензоров 113
— 1-форм 98
Конгруэнция кривых 296
Контравариантные компоненты 114
Координаты 34—38, 41, 42
Кориолиса силы и ускорения 222, 359, 405
Косое произведение альтернированных тензоров 169
— — векторов и 1-форм 123, 139
— — форм общего вида 133
Красное смещение в гравитационном поле 236—239
Кривая 282
Кривизна гауссова 2-поверхности 410—412
— методы вычисления 407—440
— оператор 335, 427, 453
— основные соотношения 278—280
— скалярная 275, 397
— 2-формы 423-430
— Якоби, оператор 351, 369
Кронекера символ 53, 54
Кручение, отсутствие у ковариантной производной 311, 456

Леви — Чивиты тензор 126, 253, 256
Ли закон переноса 295
— производная 296
Линейный элемент, см. Метрика

Локально инерциальная система отсчета 46—48, 382
— лоренцева система координат 260, 384
Лоренца преобразования 101—103, 106, 107
— сила 110, 140
Лоренцева геометрия 50—54, 88, 349
— калибровка 129, 162

Максвелла уравнения 119, 120, 128, 153—155
Метрика базируется на расстояниях 379—381
— в лоренцевых координатах 53, 54
— — пространстве-времени Ньютона — Картана 368, 369
— — эвклидовых координатах 53
— — электромагнетизме 155
— определение 252, 253, 373—375
— связь с линейным элементом 116, 117
— совместность с ковариантной производной 383, 384, 429, 430
Мнимая временная координата 88, 89
Многообразие дифференцируемое 39, 40, 298—301
Момент импульса в плоском пространстве-времени 200, 204
— — операторы 295
— — параллельный перенос 222
— — плотность 196, 200
— — разложение на собственную и орбитальную составляющие 206
— поворота 450—454

Неголономный базис 259, 263, 294
Непрерывности уравнение 196
Норма p-формы 137
Ньютона — Картана теория тяготения, геометрическая формулировка Картана 354—371
— — — — несовместимость со специальной теорией относительности 224, 225, 372, 373
— — — — стандартная ньютонова формулировка 224, 369, 370

Опережающий потенциал 162
Ориентация объемов 177—179, 191, 192
— пространства 137
— 1-формы 91
— 2-формы 141, 142, 148, 149
— 3-формы 158
Отклонение геодезических 63—67
Отклонение геодезических в пространстве-времени Ньютона — Картана 337—339, 362, 363
— — вывод уравнения 329—334
— — уравнение на языке курса 1 273, 274
— света в гравитационном поле 68, 233

Парадокс близнецов 212
Параллельный перенос в кратком изложении 259, 260
— — — подробном изложении 306—312
— — по замкнутому контуру 341—347
Параметр отбора 273, 329
Параметризация геодезической 303—305
p-вектор 132
— простой 133
Перигелия прецессия 227, 232, 233
Планковская длина 39
Плоское многообразие 67, 347—349
Принцип наименьшего действия 167
Производная по направлению как касательный вектор 282—286
— — — оператор 97, 99
Пуанкаре преобразование 102

Разделяющий вектор 42, 62—64, 274, 330
Размерность многообразия 39
Римана тензор кривизны 64, 275, 331, 334—337, 339—341
— — — дважды дуальный тензор 396
— — — связь с 2-формами кривизны 427, 428
— — — симметрии 275, 351, 396—398
— — — основные соотношения 279, 280
— — — число независимых компонент 397, 398
Римановa геометрия в рамках курса 1 245—280
— — — — — 2 372—406
— — символическое представление поверхностью яблока 30
Римановы нормальные координаты 350, 405
Риччи тензор кривизны 275, 355, 369, 397
Ролла — Кроткова — Дикке эксперимент, см. Этвеша — Дикке эксперимент

Свертка тензора 121
— p-формы с p-вектором 133
Свободное падение, независимость от химического состава (слабый принцип эквивалентности) 43—45, 48—50
Связности коэффициенты 262, 320
— — закон преобразования 324
— — связь с метрикой 263, 271, 383
— — симметрия 267
Сечение столкновений 108
Силы инерции 222, 359, 405
Симметризация тензора 122, 125
Симметрии тензора 125, 168, 169
Симплекс 380, 459
Симплектическая структура 169, 170
Сингулярность координатная 36
Системы координат 34—42
— — галилеевы 358—360
— — локально лоренцевы 260, 384
— — римановы нормальные 350, 405
— — ускоренного наблюдателя 213
— — Ферми нормальные 405
Скалярное произведение векторов 53, 89
Скорости параметр в преобразованиях Лоренца 101, 102
— 4-вектор 86—88, 96
Собственная система отсчета ускоренного наблюдателя 399—405
События 33—35, 281
Совместность метрики и ковариантной производной 383, 384, 429, 430
Сохранения законы, «автоматическое» выполнение 444
— — эквивалентность дифференциальной и интегральной формулировок 191
— — электрического заряда 128, 138, 201, 446, 447
— — энергии-импульса 186—191
Стокса теорема 136, 170, 171
Столкновения частиц 107—108

Тензор энергии-импульса в общем случае 73, 129, 173, 174, 176
— — — идеальной жидкости 177, 183
— — — роя частиц 182
— — — электромагнитного поля 184
Тензоры в многообразиях общего вида 282, 291
— — плоском пространстве-времени 112—115
— перестановок 127, 168, 169
Томаса прецессия 222, 223
Транспозиция тензора 122
Тривектор в общем случае 123
— объема 177

Угловая скорость в пространстве-времени 217, 221
Уравнение геодезических 264, 325
Ускоренный наблюдатель в искривленном пространстве-времени 399—405
— — — плоском пространстве-времени 207—223

Фейнмановская сумма по траекториям 389
Ферми нормальные координаты 405
Ферми — Уолкера перенос 210, 216—218
Формы в общем виде 132
— векторно- и тензорнозначные 423—430
— замкнутые 155, 156, 164
— простые 133, 134, 137
1-формы в общем виде 90—95, 258, 282, 289—291
— без вращения 164
— безвихревые 164
— объема 174, 178
2-формы 123, 143—151, 423
Фробениуса теорема 165

Центр массы 204
Центроид 203

Часы идеальные 369
— конкретного вида 61
— плохие и хорошие 56

Шилда доводы 237—239
— лестница 310

Эвклидова геометрия 50—54
Эйлера углы 301, 302
Эйнштейна правило суммирования 42
— тензор кривизны 276, 397, 453
— уравнение поля 74
Эквивалентности принцип 43, 208, 259, 311, 361, 365
Электродинамика в плоском пространстве-времени 109—130
Электромагнитное поле, векторный потенциал 128
— — дуальный тензор 145, 146
— — осциллирующего диполя 153
— — преобразования Лоренца 118

Электромагнитное поле, простейший вид (каноническое представление) 162, 163
— — тензор 110, 111, 139
— — точечного заряда 149, 150
Энергия-импульс, 4-вектор 90, 102
— — плотность 176, 196
— — тензор, см. Тензор энергии-импульса
Этвеша — Дикке эксперимент 44, 45, 49
Эфемеридная секунда 59

Юнга диаграммы 125

Якоби тензор кривизны 352
— тождество 296
Якобиан 133, 192, 202—203

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим посылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, «Мир».

Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер

ГРАВИТАЦИЯ том 1

Редактор Н. Телеснин. Художник В. Медников
Художественный редактор В. Бисенгалиев
Технический редактор Е. Потапенкова
Корректор Н. Гиря

Сдано в набор 5/VIII 1976 г. Подписано к печати 2/III 1977 г. Бумага тип. № 1 70×90 1/16 = 14,88 бум. л. 34,81 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 28,84. Изд. № 2/9000. Цена 3 р. 26 к. Зак. 01457

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.

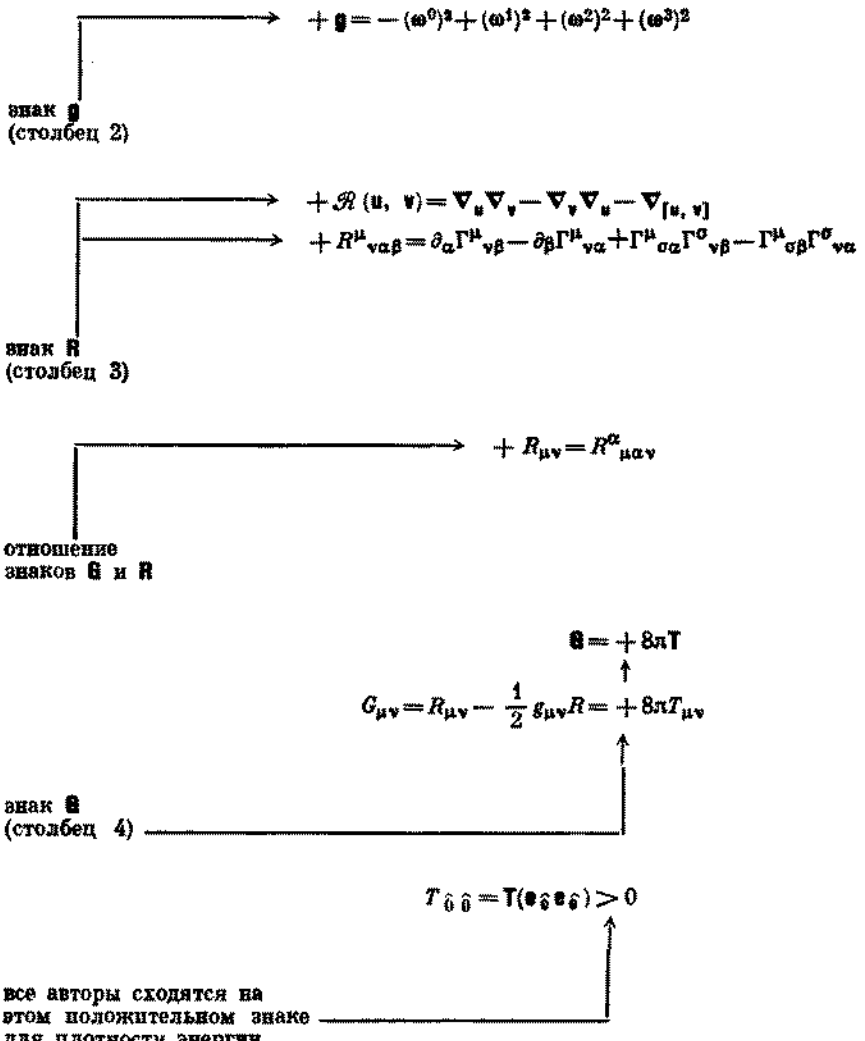
ТАБЛИЦА ВЫБОРА ЗНАКОВ

Авторы	Знак g	Знак тензора Римана R	Знак тензора Эйнштейна G	Четырехмерные пространственно-временные индексы
Ландау, Лифшиц [1] «пространственноподобный выбор»	+	+	+	латинские
Ландау, Лифшиц [2] «времениподобный выбор»	−	+	+	»
Мизнер, Торн, Уилер (данная книга)	+	+	+	греческие
Адлер, Базин, Шиффер [3]	−	−	−	»
Андерсон [4]	−	−	− [2]	»
Бергман [5]	−	− [1]	−	»
Картан [6]		−	−	
Дэвис [7]	−	+	−	латинские
Эддингтон [8]	−	+	−	греческие
Элерс [9]	+	+	+	латинские
Эйнштейн [10]	−	+	−	греческие
Эйзенхарт [11]		+	−	
Фок [12]	−	− [1]	−	»
Фоккер [13]	−	−	+	латинские
Хоукинг, Эллис [14]	+	+	+	»
Хикс [15]		+	+	
Инфельд, Плебанский [16]	−	+	−	греческие
Лихнерович [17]	−	+	+	»
Маквитти [18]	−	+	−	»
Мизнер [19]	+	+	+	»
Мюллер [20]	+	−	−	латинские
Паули [21]	+	−	−	»
Пенроуз [22]	−	−	−	»
Пирани [23]	−	−	−	»
Робертсон, Ноонан [24]	+	+	−	»
Закс [25]	+	+	+	»
Шилд [26]	−	+	−	»
Шоутен [27]		−	+	
Шредингер [28]	−	+	−	»
Синг [29]	+	+	−	»
Торн [30]	−	+	+	греческие
Толман [31]	−	+	−	»
Траутман [32]	−	−	−	латинские
Вебер [33]	+	+	+	греческие
Вейнберг [34]	+	−	−	»
Вейль [35]	−	+	+	латинские
Уилер [36]	+	+	+	греческие

[1] Необычное расположение индексов у компонент R дает другой знак $R_{\mu\nu\alpha\beta}$.
[2] В этой работе $\varkappa < 0$ есть гравитационная постоянная, взятая с обратным знаком.

ВЫБОР ЗНАКОВ

В этой книге выбор знаков совпадает с «пространственноподобным выбором» книги Ландау и Лифшица [1]. Ниже стрелками отмечены положительные знаки. В таблице на левой странице форзаца указаны знаки, которыми пользуются другие авторы.



Сделанный выше выбор знака R удобен с точки зрения методов, свободных от координат, как, например, в операторе кривизны $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, 2-формах кривизны (соотношение 14.19), при обращении с матрицами (упражнение 14.9). Определения Ric и G с принятыми выше знаками таковы, что их собственные значения (и $R \equiv R^{\mu}{}_{\mu}$) положительны для стандартных сфер с положительно определенной метрикой.

ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОСТОЯННЫХ В ОБЫЧНЫХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЕДИНИЦАХ [1]

Фундаментальные постоянные		
Гравитационная постоянная		$G = (6{,}673 \pm 0{,}003) \cdot 10^{-8}$ см^3/г·с^2 = 1
Скорость света		$c = (2{,}997\,924\,562 \pm 0{,}000\,000\,011) \cdot 10^{10}$ см/с = 1
	полезные сочетания	$G/c^2 = 0{,}7425 \cdot 10^{-28}$ см/г = 1,476 64 км/$M_\odot$ = 1
		$c^5/G = 3{,}629 \cdot 10^{59}$ эрг/с = $2{,}030 \cdot 10^5\, M_\odot c^2$/с = 1 (множитель, характеризующий излучение энергии)
		$G/c = 2{,}226 \cdot 10^{-18}$см^2 гц/г = 1 (множитель, характеризующий поглощение энергии)
		$c^2/G^{1/2} = 3{,}479 \cdot 10^{24}$ Гс·см = $3{,}479 \cdot 10^{24}$ ед. напряжения СГСЭ = 1
Постоянная Планка		$\hbar = (1{,}054\,592 \pm 0{,}000\,008) \cdot 10^{-27}$ г·см^2/с = $2{,}612 \cdot 10^{-66}$ см^2
	планковская длина L^*	$(\hbar G c^3)^{1/2} = 1{,}616 \cdot 10^{-33}$ см
	планковское время T^*	$(\hbar G/c^5)^{1/2} = 5{,}391 \cdot 10^{-44}$ с
	планковская масса M^*	$(\hbar c/G)^{1/2} = 2{,}177 \cdot 10^{-5}$ г
	планковская плотность M^*/L^{*3}	$c^5/\hbar G^2 = 5{,}157 \cdot 10^{93}$ г/см^3
Квант заряда		$e = (4{,}803\,25 \pm 0{,}000\,02) \cdot 10^{-10}$ (г·см^3/с^2)$^{1/2}$ = $1{,}381 \cdot 10^{-34}$ см
Обратное значение постоянной тонкой структуры $1/\alpha$		$\hbar c/e^2 = 137{,}0360 \pm 0{,}0002$
Масса покоя электрона		$m_e = (9{,}109\,56 \pm 0{,}000\,05) \cdot 10^{-28}$ г = $8{,}1873 \cdot 10^{-7}$ эрг = = 0,511 004 МэВ = $5{,}9301 \cdot 10^9$ К = $6{,}764 \cdot 10^{-56}$ см
Масса покоя протона		$M_p = (1{,}672\,614 \pm 0{,}000\,012) \cdot 10^{-24}$ г = $1{,}503\,27 \cdot 10^{-3}$ эрг = = 0,938 259 ГэВ = $1{,}088\,83 \cdot 10^{13}$ К = $1{,}2419 \cdot 10^{-52}$ см
Боровский радиус		$a_0 = \hbar^2/m_e e^2 = 0{,}529\,177 \cdot 10^{-8}$ см
Комптоновская длина волны электрона		$\lambda_e = \hbar/m_e c = 3{,}861\,59 \cdot 10^{-11}$ см
Классический радиус электрона		$r_0 = e^2/m_e c^2 = 2{,}817\,94 \cdot 10^{-13}$ см
Атомная единица энергии		$e^2/a_0 = m_e e^4/\hbar^2 = 4{,}359\,83 \cdot 10^{-11}$ эрг = 27,2116 эВ = $3{,}157\,86 \cdot 10^5$ К = = $3{,}602 \cdot 10^{-60}$ см

Переводные множители (см. также выше «Фундаментальные постоянные»)	
Длина	1 пс = $3{,}0856 \cdot 10^{18}$ см; 1 св. год = $0{,}94605 \cdot 10^{18}$ см; 1 а. е. = $1{,}495\,985 \cdot 10^{13}$ см
Время	1 год = $3{,}155\,692\,6 \cdot 10^7$ с; 1 сутки = 86 400 с; 1 сидерические сутки = = 86 164,091 с
Масса, энергия, температура	1 эВ = $1{,}160\,48 \cdot 10^4$ К = $1{,}602\,192 \cdot 10^{-12}$ эрг = $1{,}782\,68 \cdot 10^{-33}$ г = $1{,}324 \cdot 10^{-61}$ см

Электромагнитное излучение	
Излучение черного тела	
плотность энергии $= aT^4$	$a = 7{,}5647 \cdot 10^{-15}$ эрг·см$^{-3}$ К$^{-4}$
излучение единицы поверхности $= \sigma T^4$	$\sigma = \frac{1}{4} ac = 5{,}6696 \cdot 10^{-5}$ эрг·см$^{-2}$ с$^{-1}$ К$^{-4}$
максимум спектра $dE/d\lambda$	$\lambda_{\text{макс}} T = 0{,}289\,79$ см·К $= (0{,}289\,79$ Å$)\,(10^8$ К$)$
Тормозная излучательная способность ионизованного водорода	$\varepsilon = (6 \cdot 10^{20}$ эрг/г·с$)\,(\rho_{\text{г·см}^{-3}})\,T_{\text{К}}^{1/2}$
Тормозной коэффициент непрозрачности ионизованного водорода	$K_{ff} = (0{,}8 \cdot 10^{23}$ см^2/г$)\,(\rho_{\text{г·см}^{-3}})\,T_{\text{К}}^{-7/2}$
Сечение Томсона	$\sigma_T = (8\pi/3)\,r_e^2 = 0{,}665\,24 \cdot 10^{-24}$ см^2
Коэффициент непрозрачности ионизованного водорода по электронному рассеянию	$K_{es} = 0{,}398$ см^2/г
Вселенная	
Масса Солнца	$M_\odot = (1{,}476\,64 \pm 0{,}000\,02) \cdot 10^5$ см $= 1{,}989 \cdot 10^{33}$ г $= 4{,}9255$ мкс
Радиус Солнца	$R_\odot = (6{,}9598 \pm 0{,}0007) \cdot 10^{10}$ см
Светимость Солнца	$L_\odot = (3{,}90 \pm 0{,}04) \cdot 10^{33}$ эрг/с $= (1{,}07 \cdot 10^{-26})\,c^5/G$
Расстояние от Земли до Солнца	1 а. е. $= (1{,}495\,985 \pm 0{,}000\,005) \cdot 10^{13}$ см $= 499{,}007$ с
Масса Земли	$M_\oplus = (5{,}977 \pm 0{,}004) \cdot 10^{27}$ г $= 0{,}4438$ см
Средний радиус Земли	$R_\oplus = 6{,}371\,03 \cdot 10^8$ см
Масса Млечного Пути (Галактики)	$M_G = 1{,}8 \cdot 10^{11}\,M_\odot = 2{,}7 \cdot 10^{16}$ см $= 0{,}028$ св. лет
Расстояние до центра Галактики	$r_\odot = 10$ кпс $= 30\,000$ св. лет
Диаметр Галактики	$D_G \sim (30$—$50)$ кпс $\sim (100\,000$—$150\,000)$ св. лет
Толщина Галактики в районе Солнца	$h_G \approx 500$ пс ≈ 1500 св. лет
Ближайшие галактики: расстояние и масса	Большое Магелланово Облако, 52 кпс, $10^{10,4}\,M_\odot$; Малое Магелланово Облако, 54 кпс, $10^{9,2}\,M_\odot$; Туманность Андромеды (M31), 570 кпс, $10^{11,5}\,M_\odot$
Скопления галактик: число членов, расстояние, диаметр	Местная группа, 16 членов, $d \sim D \sim 0{,}4$ Мпс: скопление в Деве, 2500 членов, $d \sim 11$ Мпс; $D \sim 12$ Мпс; «типичное» скопление, 130 членов, $D \sim 3$ Мпс
Постоянная Хаббла	$H = 55$ км·с$^{-1}$ Мпс$^{-1} = (1{,}7 \cdot 10^{28}$ см$)^{-1} = (18 \cdot 10^9$ лет$)^{-1}$
Плотность светящейся материи во Вселенной	$\langle\rho\rangle = 2 \cdot 10^{-31}$ г/см^3

[1] Численные значения взяты из (или вычислены на основании) [192, 193].